

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider –Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية والري  
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat sciences en Génie Civil**  
Spécialité : Structures

**Élément fini pour l'analyse du comportement  
mécanique des structures en matériaux composites  
avancés**

Présentée par :

**HIRANE Hicham**

Soutenue publiquement le 03/07/2023

**Devant le jury composé de :**

<b>Dr. BELOUNAR Lamine</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. BELARBI Mohamed-Ouejdi</b>	<b>MCA</b>	<b>Rapporteur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. MAALEM Toufik</b>	<b>Professeur</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Batna</b>
<b>Dr. MESSAI Abderraouf</b>	<b>MCA</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Sétif</b>

# ***DÉDICACE***

*Je dédie ce travail à*

*Ma famille et tous ceux qui me sont chers.*

# REMERCIEMENTS

Je suis reconnaissant envers DIEU tout-puissant pour m'avoir gardé en bonne santé et m'avoir donné la force et la détermination pour accomplir ce travail humble.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon encadreur, **Mohamed-Ouejdi BELARBI**, maître de conférences à l'Université de Biskra, pour son suivi attentif, ses conseils inestimables et sa disponibilité remarquable tout au long de la préparation de ce mémoire, ainsi que pour son aide précieuse lors de sa rédaction.

Je remercie également tous les membres du jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements aux enseignants du département de Génie Civil de l'Université de Biskra, notamment le Professeur Tati Abdelouahab et le Docteur Abdelhak Khechai, qui m'ont soutenu et aidé durant cette période, ainsi que ses conseils fructueux.

# Résumé

Dans ce travail de recherche, un nouveau modèle élément fini est développé pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre de plaques sandwich fonctionnellement graduées (FG). L'élément fini proposé est un élément de type  $C^0$  quadrilatère isoparamétrique défini par huit nœuds et treize degrés de liberté pour chacun. Il est formulé sur la base du modèle layerwise proposé par les auteurs Belarbi and Tati en 2015 pour les plaques sandwich multicouches. Le modèle layerwise présenté suppose un champ de déplacement d'ordre supérieur pour le cœur et un champ de déplacement du premier ordre pour les deux peaux, en maintenant une continuité de déplacement au niveau d'interface. L'avantage de ce présent modèle repose sur son nombre de variables est fixe et n'augmente pas lorsque le nombre de couches augmente. Ceci est une caractéristique très importante par rapport aux modèles layerwise conventionnels. Dans la présente analyse, trois types de plaques sandwichs fonctionnellement graduées ont été étudiés : une plaque FG isotrope, une plaque sandwich avec des peaux homogènes et un cœur FG, et une plaque sandwich avec des peaux FG et un cœur homogène. Les propriétés mécaniques de la plaque sandwich FG sont supposées varier continuellement dans l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance P-FGM. Les équations de mouvement de la plaque sandwich FG sont obtenues via le principe classique de Hamilton. La performance et la fiabilité du présent modèle élément fini, en termes de précision et de rapidité de convergence, sont démontrées à travers une série d'exemples. Les résultats numériques obtenus via du présent modèle sont comparés avec des solutions analytiques 2D, quasi-3D, 3D ainsi qu'avec d'autres modèles éléments finis avancés disponibles dans la littérature. Par ailleurs, une étude paramétrique détaillée est présentée afin de montrer l'effet de certains paramètres comme le rapport d'épaisseur, le rapport d'aspect, la distribution des matériaux, la configuration des plaques sandwich (rapport d'épaisseur cœur-peaux), les conditions aux limites, l'indice de fraction volumique ; sur le comportement mécanique et dynamique des plaques sandwich FG symétriques et non symétriques.

## ***Mots clés :***

Matériaux fonctionnellement gradués, Élément fini, Layerwise, Analyse statique, vibration libre, Plaque sandwich.

# Abstract

In this research work, a new finite element model is developed for the analysis of bending and free vibration behavior of functionally graded (FG) sandwich plates. The proposed finite element is an isoparametric  $C^0$  quadrilateral element defined by 8 nodes and thirteen degrees of freedom for each. It is formulated based on the layerwise model proposed by the authors Belarbi and Tati in 2015 for multilayer sandwich plates. The presented layerwise model assumes a higher-order displacement field for the core and a first-order displacement field for the two face sheets, maintaining a displacement continuity at the interface layers. The advantage of present layerwise model relies on its number of variables is fixed and does not increase when increasing the number of lamina layers. This is a very important feature compared to the conventional layerwise models. In the present analysis, three common types of FG plates, namely, (i) isotropic FG plates; (ii) sandwich plates with FG face sheets and homogeneous core and (iii) sandwich plates with homogeneous face sheets and FG core. The mechanical properties of the FG sandwich plate are assumed to vary continuously in the thickness according to a power law distribution P-FGM. The equations of motion of the FG sandwich plate are obtained via the classical Hamilton's principle. The performance and reliability of the present finite element model, in terms of accuracy and of rate of convergence, are demonstrated through a series of examples. The numerical results of present model are compared with 2D, quasi-3D, 3D analytical solutions as well as with other advanced finite element models available in the literature. Moreover, a detailed parametric study is presented in order to show the effect of certain parameters such as the thickness ratio, the aspect ratio, the distribution of materials, the configuration of the sandwich plates (core-face thickness ratio), the boundary conditions, the volume fraction index; on the mechanical and dynamic behavior of symmetrical and non-symmetrical FG sandwich plates.

## **Keywords:**

Functionally graded materials, Finite element, Layerwise, Static analysis, free vibration, Sandwich plate.

## المخلص

في هذا العمل البحثي، تم تطوير نموذج جديد للعناصر المحدودة لتحليل الانحناء والاهتزاز الحر لألواح الساندويتش المتدرجة وظيفيًا (FG). العنصر المحدد المقترح هو عنصر من نوع  $C^0$  رباعي الأضلاع معرف بثمانية عقد وثلاث عشرة درجة من الحرية لكل منها. تمت صياغته بناءً على نموذج لايريز الذي اقترحه المؤلف بلعربي و تاتي في 2015 من اجل الواح الساندويتش متعددة الطبقات. يفترض نموذج لايريز المقدم مجال إزاحة عالي المستوى للطبقة الوسطى وحقل إزاحة من الدرجة الأولى للطبقتين القشريتين ، مع الحفاظ على استمرارية الإزاحة بين الصفائح. تكمن ميزة هذا النموذج الحالي هو أن عدد المتغيرات الخاصة به ثابت ، ولا يزداد عندما يزداد عدد الطبقات. هذه ميزة مهمة جدًا مقارنة بنماذج لايريز التقليدية. في التحليل الحالي، تمت دراسة ثلاثة أنواع من ألواح الساندويتش المتدرجة وظيفيًا: لوحة FG ، ولوحة ساندويتش ذات طبقات قشرية متجانسة وطبقة وسطى FG ، ولوحة ساندويتش ذات طبقات قشرية FG وطبقة وسطى متجانسة. يُفترض أن الخصائص الميكانيكية للوحة شطيرة FG تتغير باستمرار من خلال السماكة وفقًا لتوزيع قانون الطاقة P-FGM. يتم الحصول على معادلات الحركة للوحة ساندويتش FG من خلال المبدأ الكلاسيكي لهاملتون. يتم توضيح أداء وموثوقية نموذج العنصر المحدود هذا ، من حيث الدقة وسرعة التقارب ، من خلال سلسلة من الأمثلة. تمت مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها من خلال هذا النموذج مع الحلول التحليلية ثنائية الأبعاد وشبه ثلاثية الأبعاد وثلاثية الأبعاد بالإضافة إلى نماذج العناصر المحدودة المتقدمة الأخرى المتوفرة في الأدبيات. بالإضافة إلى ذلك ، تم تقديم دراسة بارامترية مفصلة لإظهار تأثير بعض المعلمات مثل نسبة السماكة ، ونسبة العرض إلى الطول ، وتوزيع المواد ، وتكوين ألواح الساندويتش (نسبة سماكة اللب إلى السماكة القشرية) ، وظروف الحدود ، مؤشر الكسر الحجمي ؛ على السلوك الميكانيكي والديناميكي لألواح شطيرة FG المتماثلة وغير المتماثلة..

### الكلمات المفتاحية:

المواد المتدرجة وظيفيًا، العناصر المحدودة، لايريز، التحليل السكوني، اهتزاز الحر، ساندويتش

# Table des matières

Résumé .....	i
Abstract .....	ii
ملخص .....	iii
Table des matières .....	iv
Liste des figures .....	viii
Liste des tableaux .....	xi
Liste Des Notations .....	xiii
Introduction générale.....	1
Introduction.....	1
Objective de la thèse .....	2
Plan de la thèse .....	2

## **Chapitre 1: Généralités sur les matériaux sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM)**

1.1 Introduction .....	5
1.2 Les matériaux sandwichs .....	6
1.3 Les composants des matériaux sandwichs .....	7
1.3.1 Les peaux.....	7
1.3.2 Le cœur.....	7
1.3.3 L'interface.....	7
1.4 Domaines d'utilisation des matériaux sandwichs .....	8
1.4.1 Construction aérospatiale .....	8
1.4.2 Construction automobile et ferroviaire.....	8
1.5 Les Matériaux à gradient de propriétés (FGM) .....	8
1.6 Concept des matériaux FGM.....	9

1.7 Comparaison entre matériaux à propriétés graduelles et matériaux composites conventionnels.....	11
1.8 Classification conventionnelle des matériaux FGM .....	11
1.8.1 En fonction de la structure du FGM.....	12
1.8.2 En fonction du gradient.....	12
1.9 Avantages et inconvénients du FGM.....	15
1.9.1 Les avantages des matériaux fonctionnellement gradués .....	15
1.9.2 Les inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués .....	15
1.10 Domaines d'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués.....	16
1.11 Lois régissant la variation des caractéristiques matérielles des plaques FGM..	17
1.11.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	19
1.11.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	20
1.11.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	21
1.12 Modèles et théories pour les structures sandwichs FGM .....	21
1.12.1 Modèles tridimensionnels (3D) .....	21
1.12.2 Modèles bidimensionnelles (2D) .....	22
1.12.2.1 Approche monocouche équivalente .....	22
1.12.2.1.1 La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) .....	23
1.12.2.1.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	24
1.12.2.1.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	25
1.12.2.2 Approche par couche .....	29
1.12.2.2.1 Les Modèles couches discrètes .....	30
1.12.2.2.2 Les modèles zig-zag .....	31
1.13 Modèles des plaques FGM .....	31
1.13.1 Modèles des plaques FGM basés sur les théories du premier ordre .....	32
1.13.2 Modèles des plaques FGM basés sur les théories d'ordre supérieur .....	33
1.14 Conclusion .....	36



## **Chapitre 2 Étude du comportement des structures sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)**

2.1 Introduction .....	38
2.2 Formulation théorique.....	39
2.2.1 Configuration géométrique .....	39
2.2.1.1 Type A : Plaques en FGM isotropes.....	39
2.2.1.2 Type B : Plaques sandwich avec un cœur en FGM et des peaux homogènes .....	41
2.2.1.3 Type C : Plaques sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM.....	42
2.2.2 Estimation des propriétés mécaniques .....	44
2.2.3 La cinématique du modèle layerwise utilisé. ....	44
2.2.3.1 Champ de Déplacement de la couche centrale (cœur) .....	44
2.1.1.1.1 Relations cinématiques de la couche centrale .....	45
2.2.3.2 Champ de déplacement des peaux .....	46
2.2.3.2.1 Relations cinématiques des peaux .....	48
2.2.4 Les équations constitutives.....	50
2.2.4.1 Les efforts résultants dans le cœur .....	50
2.2.4.1.1 Résultantes en membrane .....	50
2.2.4.1.2 Moments de flexion et de torsion .....	51
2.2.4.1.3 Résultantes d'ordre supérieur (second ordre) .....	51
2.2.4.1.4 Résultantes d'ordre supérieur (troisième ordre) .....	51
2.2.4.1.5 Résultantes de cisaillement .....	51
2.2.4.1.6 Résultantes d'ordre supérieur en cisaillement .....	51
2.3 Conclusion .....	54

## **Chapitre 3 Développement d'un nouvel élément fini isoparamétrique (FEM-Q8-LW) pour l'analyse des plaques sandwichs**

3.1 Introduction .....	57
------------------------	----

3.2 Formulation de l'élément (FEM-Q8-LW) .....	58
3.2.1 Description de l'élément (FEM-Q8-LW) .....	58
3.2.2 Approximation nodale de l'élément (FEM-Q8-LW).....	58
3.2.3 Équation du mouvement.....	62
3.3 Conclusion .....	69

## **Chapitre 4 Résultats et validation numérique de l'élément FEM-Q8-LW**

4.1 Introduction .....	71
4.2 Validation de l'élément dans l'analyse statique .....	75
4.3 Validation de l'élément dans l'analyse de la vibration libre .....	81
4.4 Conclusion.....	95
Conclusion générale.....	96
Références bibliographiques .....	99

# Liste des figures

## Chapitre 1

### Généralités sur les matériaux sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM)

<b>Figure 1.1 :</b>	Schéma d'un sandwich .....	6
<b>Figure 1.2 :</b>	Schéma d'une structure microscopique graduée avec des matériaux à la fois céramique et métallique .....	10
<b>Figure 1.3 :</b>	Différence entre les caractéristiques des matériaux composites FGM et les matériaux composites conventionnels .....	11
<b>Figure 1.4 :</b>	Divers types de FGM. (a) le modèle discontinue (b) le modèle continu; (c) Gradient de la constitution (f) Gradient de la taille; (d,g) gradient de la direction; (e,h) gradient de la fraction volumique .....	13
<b>Figure 1.5 :</b>	Catégorisation des FGM en fonction de leur gradient .....	13
<b>Figure 1.6 :</b>	Classification des directions du gradient .....	14
<b>Figure 1.7 :</b>	Structure géométrique d'une plaque FGM.....	18
<b>Figure 1.8 :</b>	Changement de la fraction de volume dans une plaque P-FGM.....	19
<b>Figure 1.9 :</b>	Changement de la fraction de volume dans une plaque S-FGM.....	20
<b>Figure 1.10:</b>	Changement de la fraction de volume dans une plaque E-FGM.....	21
<b>Figure 1.11 :</b>	Cinématique de la théorie classique des plaques sous l'hypothèse de Kirchhoff.....	24
<b>Figure 1.12 :</b>	Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin .....	25
<b>Figure 1.13 :</b>	Comparaison de la théorie d'ordre supérieur (HSDT) avec (FSDT) et (CPT) .....	26

<b>Figure 1.14 :</b>	Champ de déplacements des modèles couches discrètes .....	30
<b>Figure 1.15 :</b>	Champ de déplacements des modèles zig-zag .....	31

## Chapitre 2

### Etude du comportement des structures sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

<b>Figure 2.1 :</b>	Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.....	39
<b>Figure 2.2 :</b>	Géométrie d'une plaque en FGM, (Type A).....	40
<b>Figure 2.3 :</b>	La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de k, (Type A).....	40
<b>Figure 2.4 :</b>	Géométrie d'une plaque sandwich avec cœur en FGM et des peaux homogènes, (TypeB) .....	41
<b>Figure 2.5 :</b>	La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque pour divers valeurs de k d'une plaque sandwich avec cœur en FGM et des peaux homogènes, (TypeB).....	42
<b>Figure 2.6 :</b>	Géométrie d'une plaque sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM, (TypeC) .....	43
<b>Figure 2.7 :</b>	La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque pour divers valeurs de k d'une plaque sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM, (TypeC) .....	43
<b>Figure 2.8 :</b>	Cinématique du modèle utilisé .....	47

## Chapitre 3

### Développement d'un nouvel élément fini isoparamétrique (FEM-Q8-LW) pour l'analyse des plaques sandwichs

<b>Figure 3.1 :</b>	Géométrie de l'élément FEM-Q8-LW et les variables cinématiques nodales correspondantes.....	58
---------------------	---	----

## Chapitre 4

### Résultats et validation numérique de l'élément

#### FEM-Q8-LW

<b>Figure 4.1 :</b>	La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de configurations des plaques sandwiches P-FGM.....	74
<b>Figure 4.2 :</b>	Effets de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différentes conditions aux limites sur la flèche centrale adimensionnelle d'une plaque carrée FGM (Al/ZrO <sub>2</sub> -1) soumise à une charge uniformément répartie ( $a/h = 5$ ) .....	77
<b>Figure 4.3 :</b>	Variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque sandwich carrée (1-0-1) FGM de type C encadrée et soumise à une charge sinusoïdale pour différents indices de fraction volumique ( $k$ ).....	78
<b>Figure 4.4 :</b>	Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents configurations sur la flèche centrale adimensionnelle des plaques sandwich carrées encadrées FGM de type C ( $a/h = 10$ ) .....	80
<b>Figure 4.5 :</b>	Effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) avec l'indice de fraction volumique ( $k$ ) sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich carrées encadrées FGM de type C.....	82
<b>Figure 4.6 :</b>	Effet du rapport d'aspect ( $b/a$ ) avec différentes conditions aux limites sur la fréquence naturelle adimensionnelle de la plaque FGM (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) ( $a/h = 10$ , $k = 5$ ) .....	87
<b>Figure 4.7 :</b>	Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents configuration d'épaisseur sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich FGM hardcore ( $a/h = 10$ ).....	88
<b>Figure 4.8:</b>	Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents rapports d'épaisseur cœur-peau sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich FGM softcore ( $a/h=10$ ).....	89
<b>Figure 4.9 :</b>	Six premières formes de mode de flexion d'une plaque sandwich FGM simplement appuyée de type C. ( $a/h = 10$ et $k = 1$ ) .....	92

# Liste des tableaux

## Chapitre 1

### Généralités sur les matériaux sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM)

<b>Tableau 1.1 :</b>	Les propriétés de la céramique en comparaison avec les propriétés du métal.....	10
<b>Tableau 1.2 :</b>	Divers fonctions de forme des théories HSDT pour des plaques FGM .....	29

## Chapitre 4

### Résultats et validation numérique de l'élément FEM-Q8-LW

<b>Tableau 4.1 :</b>	Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FG .....	71
<b>Tableau 4.2 :</b>	Détails de Conditions aux limites utilisées dans la présente étude ..	72
<b>Tableau 4.3 :</b>	Flèche centrale adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée FGM (Al/ZrO <sub>2</sub> -1) soumise à une charge uniformément répartie avec différentes conditions aux limites ( $k$ ) .....	76
<b>Tableau 4.4 :</b>	Flèche centrales adimensionnelles ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwichs carrées FGM (Al/ZrO <sub>2</sub> -2) encastées (type C) soumises à une charge répartie sinusoïdalement .....	79
<b>Tableau 4.5 :</b>	Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle ( $\sigma_{xz}$ ) des plaques sandwich FGM (Type C, Al/ ZrO <sub>2</sub> -2), simplement appuyées $a/h=10$ .....	81
<b>Tableau 4.6 :</b>	Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées FGM (Al*/ZrO <sub>2</sub> -2) simplement appuyées .....	83

<b>Tableau 4.7 :</b>	Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques rectangulaires FGM (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) avec différentes conditions aux limites .....	86
<b>Tableau 4.8 :</b>	Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich carrées FGM simplement appuyées (type C), cas du hardcore.....	90
<b>Tableau 4.9 :</b>	Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich carrées FGM simplement appuyées (type C), cas du softcore .....	91
<b>Tableau 4.10 :</b>	Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwichs 2-1-2.carrées FGM (Al/Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) de type C avec deux conditions aux limites différentes .....	93
<b>Tableau4.11:</b>	Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich FGM (Type B, Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /Al), simplement appuyées 1-8-1 .....	95

# Liste Des Notations

$FGM$	Les matériaux à gradient de propriétés où fonctionnellement gradués.
$P_i$	Les propriétés du matériau constitutif $i$
$V$	La fraction volumique du matériau constitutif $i$
$k$	Le paramètre du matériau
$E(z)$	Le module de Young en fonction de $z$
$E_c$	Le module de Young de la céramique
$E_m$	Le module de Young de métal
$\nu_c$	Le coefficient de Poisson de la céramique
$\nu_m$	Le coefficient de Poisson de métal
$\rho_c$	La masse volumique de la céramique
$\rho_m$	La masse volumique de métal
$a$	La longueur de la plaque
$b$	La largeur de la plaque
$h$	L'épaisseur de la plaque
$x, y, z$	Coordonnées cartésienne
$\xi, \eta$	Coordonnées intrinsèques
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$u, v, w$	Déplacements au plan médian de la plaque
$\psi_x^c, \psi_y^c$	Les rotations du premier ordre de la section autour des axes $y$ et $x$ , respectivement du cœur
$\eta_x^c, \eta_y^c, \zeta_x^c$ et $\zeta_y^c$	Des termes d'ordre supérieur du cœur
$\delta_i$	Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément
$N_i$	Fonctions d'interpolation
$N(x, y)$	Résultantes en membrane
$M(x, y)$	Moments de flexion et de torsion
$\bar{N}(x, y)$	Résultantes d'ordre supérieur (second ordre)
$\bar{M}(x, y)$	Résultantes d'ordre supérieur (troisième ordre)
$V(x, y)$	Résultantes de cisaillement
$S_x, S_y, R_x, R_y$	Résultantes de cisaillement d'ordre supérieur



$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$	Les éléments qui constituent les matrices de rigidité réduites de le cœur
$\delta U$	La variation de l'énergie de déformation interne
$\delta W$	La variation du Travail externe
$\delta T$	La variation de l'énergie cinétique
$[J]$	Matrice jacobéenne
$I_i$	Les moments d'inerties
$\{f_e\}$	Le vecteur force
$[K_e]$	La matrice de rigidité élémentaire
$[M_e]$	La matrice de masse élémentaire
(Al)	Aluminium
(Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Alumine
(ZrO <sub>2</sub> -1)	Zircone
SSSS	Simplement appuyé
EEEE	Encastré
SLSL	Simplement appuyé - Libre

# Introduction générale

## 1. Introduction

Au XXe siècle, les caractéristiques mécaniques exceptionnelles des matériaux composites multicouches (e.g., bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, excellente durabilité,...) ont suscité un grand intérêt dans divers domaines d'ingénierie (les constructions civiles, la marine, le transport, la navigation et les applications aérospatiales,...). Au départ, les éléments composites ont été employés dans plusieurs pièces structurales, en particulier dans le domaine aérien. Actuellement, l'abaissement de leurs frais de production autorise l'exploitation de ces substances dans une gamme de domaines toujours plus étendue (Véhicule, navigation, construction, ...). Les matériaux composites les plus populaires se divisent en deux types : les stratifiés et les sandwichs. Les composites stratifiés sont composés de plusieurs couches superposées, chacune pouvant être orientée différemment, ce qui entraîne une variation des propriétés mécaniques selon les directions. Les matériaux sandwich sont constitués de trois couches fondamentales, chacune ayant ses propres caractéristiques mécaniques : deux peaux minces, souvent stratifiés, ayant des propriétés mécaniques remarquables. Ils ont un module d'élasticité important, collées sur un cœur épais, léger et mécaniquement faible, qui sert principalement à s'opposer aux contraintes de cisaillement. Ces couches distinctes sont fixées ensemble par adhésion ou fusion. Les matériaux composites sandwichs deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales. Néanmoins, la transition brutale des propriétés matérielles de la structure sandwich d'une couche à l'autre provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations, de délaminage et d'autres mécanismes d'endommagement. Pour pallier ces effets nuisibles, une solution a été proposée, en 1984, par un groupe de chercheurs japonais en utilisant un matériau à gradient de propriétés. Sa signification originale est FGM : Functionally Graded Material. Ce sont des matériaux composites dont les propriétés mécaniques, physiques et thermiques varient d'une manière graduelle et continue à travers l'épaisseur.

Dans la thématique de la modélisation des structures sandwich en FGM, nous avons constaté, d'après la revue de la littérature, qu'un grand nombre de chercheurs ont été orienté

au développement des modèles analytiques basés sur l'approche monocouche. D'après ces auteurs, ces modèles sont terriblement difficiles à obtenir dans la majorité des cas de géométrie et de conditions aux limites. Par conséquent, il est nécessaire de développer de nouveaux modèles éléments finis capables de décrire avec précision le comportement mécanique et dynamique des structures sandwichs en FGM.

## **1. Objectif de la thèse**

Les objectifs qu'on espère atteindre dans ce travail de recherche est la contribution à la modélisation du comportement mécanique et dynamique des structures sandwichs en FGM en développant d'un nouvel élément fini isoparamétrique. Il s'agit d'exploiter le modèle layerwise développé précédemment par les auteurs. De plus, un but supplémentaire de cette recherche est de faire une étude paramétrique détaillée pour examiner l'influence des différents paramètres mécaniques et géométriques sur la variation du déplacement transversal ainsi que les fréquences naturelles des plaques isotrope FGM et des plaques sandwichs en FGM minces et épaisses.

## **2. Plan de la thèse :**

Cette thèse se compose de quatre chapitres.

**Le premier chapitre** dédie à présenter des généralités sur les matériaux sandwichs, leurs domaines d'utilisation, des concepts générales sur les FGM, leurs caractéristiques, leur évolution historique, leurs procédés de production, et leurs domaines d'utilisation. De même qu'une présentation synthétique des théories, des approches et des modèles d'éléments finis qui sont employés et proposés par les chercheurs pour étudier le comportement statique et dynamique des structures isotropes et des structures sandwichs en matériau à gradient fonctionnel.

**Le deuxième chapitre** est porte sur la présentation et la formulation théorique du modèle layerwise utilisé dans ce travail de recherche pour l'analyse des structures sandwich FGM. Dans ce présent modèle, on applique la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) pour modéliser les deux peaux, tandis que la théorie du troisième ordre (TSDT) est appliquée pour modéliser le cœur. La combinaison de ces deux théories permet de répondre aux conditions de continuité des déplacements à l'interface et aux conditions de

compatibilité. Ainsi, nous allons présenter dans chapitre le comportement mécanique et les équations constitutives des plaques sandwich FGM.

**Le troisième chapitre** sera consacré à la formulation d'un nouvel élément fini quadrilatère isoparamétrique (FEM-Q8-LW). Cet élément est un élément Lagrangien, géométriquement simple, définit par huit nœud et treize degrés de liberté pour chacun. La formulation de cet élément développé est basée sur le modèle layerwise présenté dans le deuxième chapitre.

La validation et la performance de l'élément développé est présentés dans le **quatrième chapitre** à travers une série d'exemples en flexion et en vibration libre des plaques FGM isotropes et sandwichs FGM symétrique/non symétrique, avec différents combinaison des matériaux, de géométrie et de conditions aux limites. Les résultats obtenus seront comparés à ceux déterminés analytiquement et ceux obtenus via d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

Finalement, le travail se termine par une conclusion générale résumant les résultats obtenus.

**CHAPITRE 1**

**GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX  
SANDWICHS ET LES MATÉRIAUX À  
GRADIENT DE PROPRIÉTÉS FONCTIONNEL  
(FGM)**

# CHAPITRE 1

## Généralités sur les matériaux sandwichs et les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM)

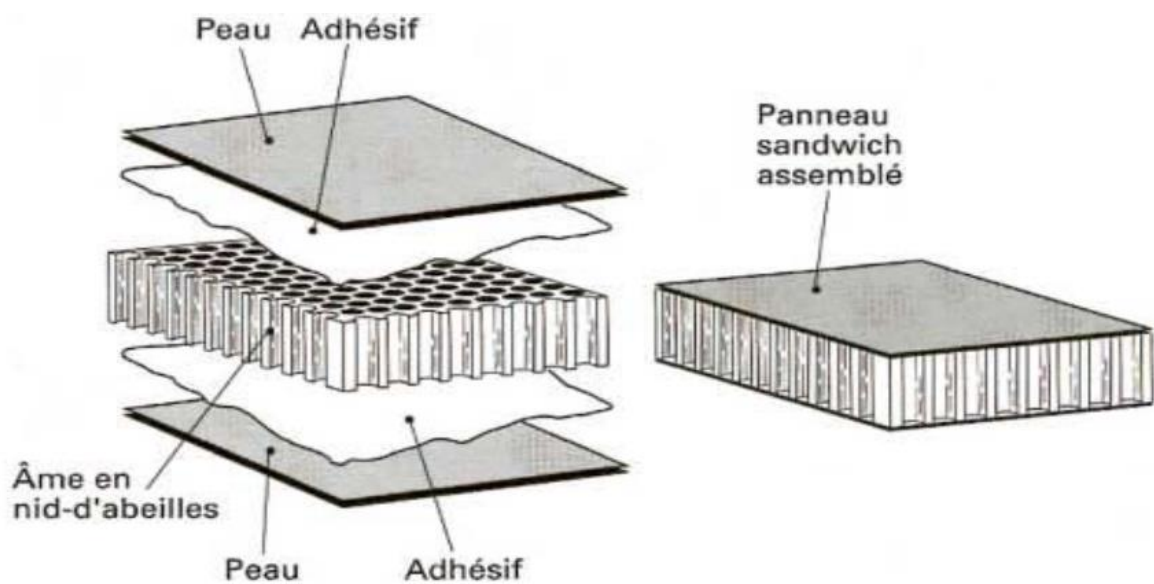
### 1.1 Introduction

Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, les caractéristiques mécaniques élevées des matériaux composites sandwich (e.g., une densité réduite, une immense robustesse, et une rigidité considérable, ont suscité beaucoup d'intérêt dans diverses applications d'ingénierie. Bien que ces matériaux offrent des avantages comme la rigidité, la résistance, la légèreté et la réduction des coûts, les matériaux sandwichs présentent également des problèmes liés à leur hétérogénéité. La transition brutale des propriétés matérielles de la structure sandwich d'une couche à l'autre provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations, de délaminage et d'autres mécanismes d'endommagement. Pour surmonter ces effets nuisibles, ce problème a suscité beaucoup d'attention par les chercheurs [1]. Une solution a été proposée, en 1984, par un groupe de chercheurs japonais en utilisant un matériau à gradient de propriétés. Sa signification originale est FGM : Functionally Graded Material. Ce sont des matériaux composites dont les propriétés mécaniques, physiques et thermiques varient d'une manière graduelle et continue à travers l'épaisseur [2].

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques généralités sur les matériaux sandwichs avec leurs domaines d'utilisation. De plus, nous allons présenter les concepts de base des matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM), leur évolution historique, leurs procédés de production, et leurs domaines d'utilisation. De même qu'une présentation synthétique des théories, des approches et des modèles d'éléments finis qui sont employés et proposés par les chercheurs pour étudier le comportement statique et dynamique des structures isotropes et des structures sandwichs en matériau à gradient fonctionnel.

## 1.2 Les matériaux sandwichs

Les matériaux sandwichs se distinguent comme l'un des matériaux composites les plus fréquemment employés. Dans la construction de pièces composites, les structures sandwichs jouent un rôle important. La structure composite sandwichs est constituée de trois couches principales : deux peaux minces et rigides et le cœur. Les deux peaux ont un module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction. Ils peuvent être des matériaux isotropes ou des matériaux composites stratifiés renforcé par des fibres. Entre les deux peaux, il y a une couche épaisse, nommée âme ou cœur, faible densité et faibles caractéristiques mécaniques (Fig.1.1). Son rôle principal est de résister aux efforts de cisaillement. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure. Les adhésifs les plus fréquemment employés sont des époxy, des époxy modifiés ou des polyamides époxy. Cette configuration donne à la structure sandwich une résistance et une rigidité spécifique avec une faible densité.



**Fig.1.1** Schéma d'une structure sandwich [3]

Lorsque l'on choisit les matériaux à utiliser pour une application donnée, il est crucial de prendre en compte toutes les propriétés et les attributs de ces matériaux, tels que le revêtement, le cœur, l'adhésif et autres, car cela peut directement influencer la qualité du produit final. Par conséquent, en ajoutant un matériau de base peu dense pour augmenter l'épaisseur du panneau sandwich, cela peut considérablement augmenter sa rigidité avec un poids faible.

### **1.3 Les composants d'une structure sandwich**

Généralement, les structures sandwich sont constituées de trois couches principales dont les propriétés mécaniques sont différentes: deux peaux, couche centrale (cœur), et de l'interface de liaison.

#### **1.3.1 Les peaux**

En général, les peaux possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction). Ils peuvent être en bois, en métal ou des matériaux composites stratifiés. La nature et la disposition des couches dans les matériaux composites sont influencées par leur utilisation spécifique. Les peaux sont conçues pour absorber les efforts de flexion issus des contraintes normales (traction ou compression).

#### **1.3.2 Le cœur**

Les matériaux sandwich nécessitent un cœur légère et ayant une bonne résistance au cisaillement pour assurer la transmission des contraintes de traction-compression appliquées au sandwich. Les cœurs creux et les nids d'abeilles sont des éléments fréquemment employés dans les structures à grande résistance mécanique. Bien qu'elles offrent des performances relativement élevées, leur coût de fabrication est coûteux. Pour les cœurs pleines, les mousses ou le balsa, sont couramment employés pour la fabrication de structures sandwichs planes ou courbées, en raison de leur excellente performance par rapport à leur coût.

#### **1.3.3 L'interface**

On peut assembler la structure sandwich par le collage ou par la soudure. Dans le cadre de la simulation numérique, on considère que les trois différents composants sont liés parfaitement entre elles.



## 1.4 Domaines d'utilisation des matériaux sandwichs

### 1.4.1 Construction aérospatiale

Les panneaux sandwichs ont acquis une popularité grandissante dans l'industrie aérospatiale pour la fabrication de pièces structurales minces ou épaisses. On les utilise dans divers domaines comme l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire. Par exemple : les éléments accessoires comprenant les portes trappes du train d'atterrissage ainsi que les carénages divers situés entre l'aile, le fuselage, les mâts des réacteurs et les glissières de volets.

Les panneaux acoustiques ont une construction sandwich avec une peau intérieure perforée et une couche de tissu microporeux collée dessus du côté moteur. Dans l'industrie de l'hélicoptère, on utilise souvent des pièces monolithiques ou des sandwichs avec des peaux en composites collées sur une base en nida.

### 1.4.2 Construction automobile et ferroviaire

Les véhicules tels que les camions et les autobus peuvent être construits en utilisant des matériaux sandwichs assemblés par collage, tels que des peaux en stratifié et des cœurs sont constituées de mousse polystyrène expansé.

Les matériaux sandwichs sont populaires dans l'industrie des transports en commun, comme les tramways et le métro, car ils peuvent résister aux démarrages fréquents. Les portes d'accès sont fabriquées à partir de panneaux sandwichs composés de peaux en stratifié verre/polyester ou en aluminium collées avec des adhésifs intérieurs. Les structures sandwichs avec un cœur en nida aluminium ou nomex sont également utilisés pour les portes.

## 1.5 Les Matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Les couches dans les structures composites multicouches sont liées entre elles pour optimiser les performances de ces structures en termes de propriétés mécaniques, thermiques, acoustiques, et autres. Cette approche présente le désavantage de générer des zones de contraintes concentrées au niveau des interfaces entre les couches, susceptibles de causer des délaminages, des fissures, ainsi que d'autres types de dommages, en raison de la brusque variation des caractéristiques mécaniques d'une couche à l'autre [4].

En optant pour un gradient de composition, on peut obtenir une transition sans heurts des propriétés et réduire les singularités grâce à l'emploi de matériaux à gradient de propriétés nommé : matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Material, FGM). Les matériaux FGM sont des matériaux composites avancés produits en ajustant de manière continue les fractions de volume dans la direction de l'épaisseur afin de créer un profil bien défini [4]. Récemment, ces matériaux ont été l'objet d'une attention particulière en raison de leur capacité à réduire les disparités dans les caractéristiques matérielles et les contraintes thermiques.

## **1.6 Concept des matériaux FGM**

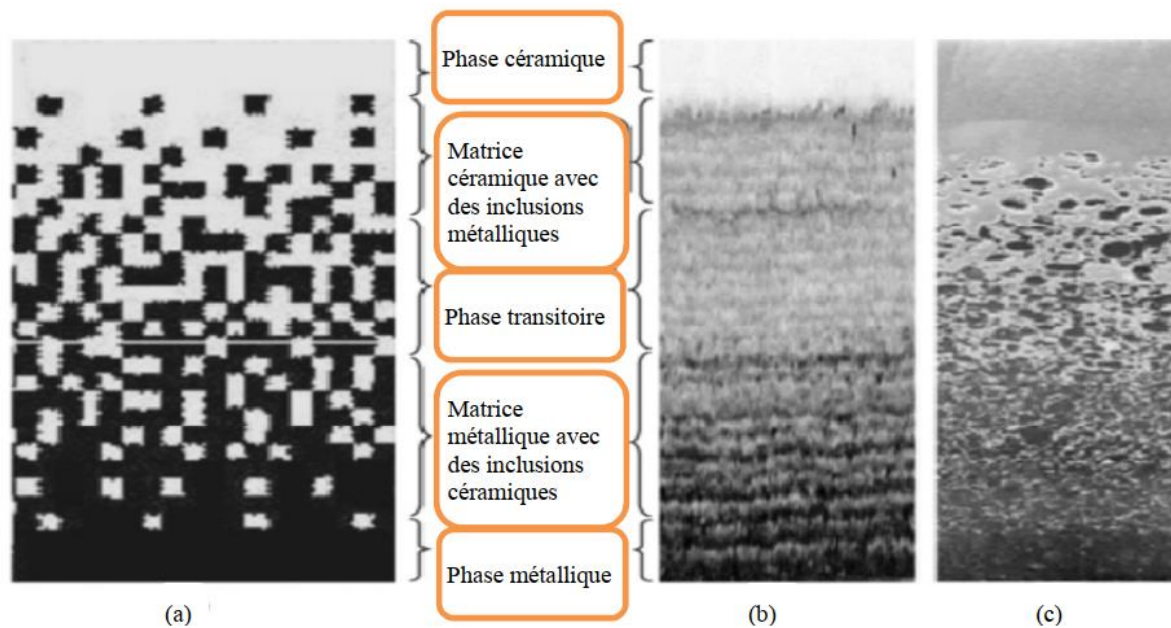
En 1984, Niino et son équipe de Sendai, ont découvert pour la première fois les matériaux à gradient fonctionnel au laboratoire national d'aérospatiale du Japon. L'objectif consiste à fabriquer des matériaux servant de bouclier thermique pour les constructions spatiales et les réacteurs de fusion. Les FGM ont la capacité d'être employés dans de nombreuses applications, notamment pour les enduits de barrières thermiques pour les moteurs en céramique, les turbines à gaz et les couches minces optiques, etc.

Les matériaux FGM sont couramment constitués de plusieurs couches avec des composants variés comme des métaux et des céramiques, et le tableau (1.1) présente une comparaison de leurs propriétés mécaniques. On peut constater sur la Figure 1.2 qu'ils se composent de matériaux hétérogènes au niveau microscopique. Les FGM se caractérisent par une composition en constante évolution qui se traduit par une microstructure différente des matériaux composites conventionnels. Le gradient obtenu peut déterminer les propriétés des FGM dans certains cas.

Par conséquent, les matériaux FGM présentent plusieurs avantages qui dépassent ceux des composites stratifiés, tels qu'une réduction potentielle des contraintes transversales et de la membrane, une résistance accrue au décollement, une amélioration de l'effort résiduel, une augmentation des propriétés thermiques, une résistance à la rupture plus élevée et une réduction des facteurs d'intensité d'effort. Plusieurs publications portant sur différents aspects des matériaux FGM ont été produites, par exemple : Suresh et Mortensen [5]; Birman et Byrd [6].

**Tableau 1.1.** Les propriétés de la céramique en comparaison avec les propriétés du métal [7]

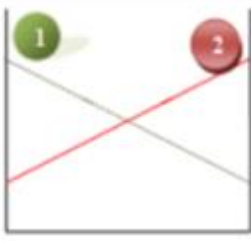
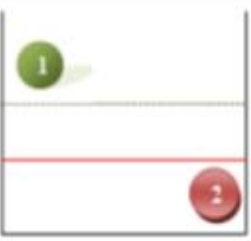
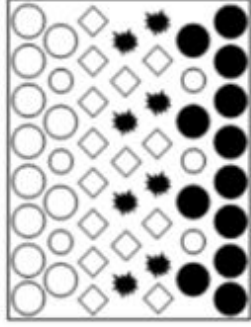
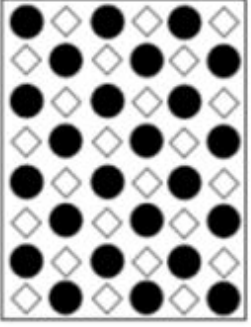
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance thermique</li> <li>- Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>- Faible conductivité thermique</li> </ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Élimination des problèmes de l'interface</li> <li>-Relaxation les contraintes thermiques</li> </ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Bonne résistance mécanique</li> <li>- Conductivité thermique élevée</li> <li>- Très bonne ténacité</li> </ul>



**Fig.1.2** Schéma d'une structure microscopique graduée avec des matériaux à la fois céramique et métallique [8].

**1.7 Comparaison entre matériaux à propriétés graduelles et matériaux composites conventionnels :**

Les matériaux à propriétés graduelles ont une structure microscopique hétérogène. Le FGM se distingue des matériaux composites conventionnels grâce aux changements continus de sa microstructure. Les gradients dans les propriétés de FGM sont le résultat du changement continu de sa composition. La Fig.1.3 représente les différences schématiques de la microstructure et des propriétés entre les FGM et les matériaux composites traditionnels.

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance thermique</p> <p>2 Résistance mécanique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Éléments constitutifs:</b></p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>Fibre ◊*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Fig .1.3** Différence entre les propriétés des matériaux composites FGM et les matériaux composites conventionnels [9].

**1.8 Classification conventionnelle des matériaux FGM**

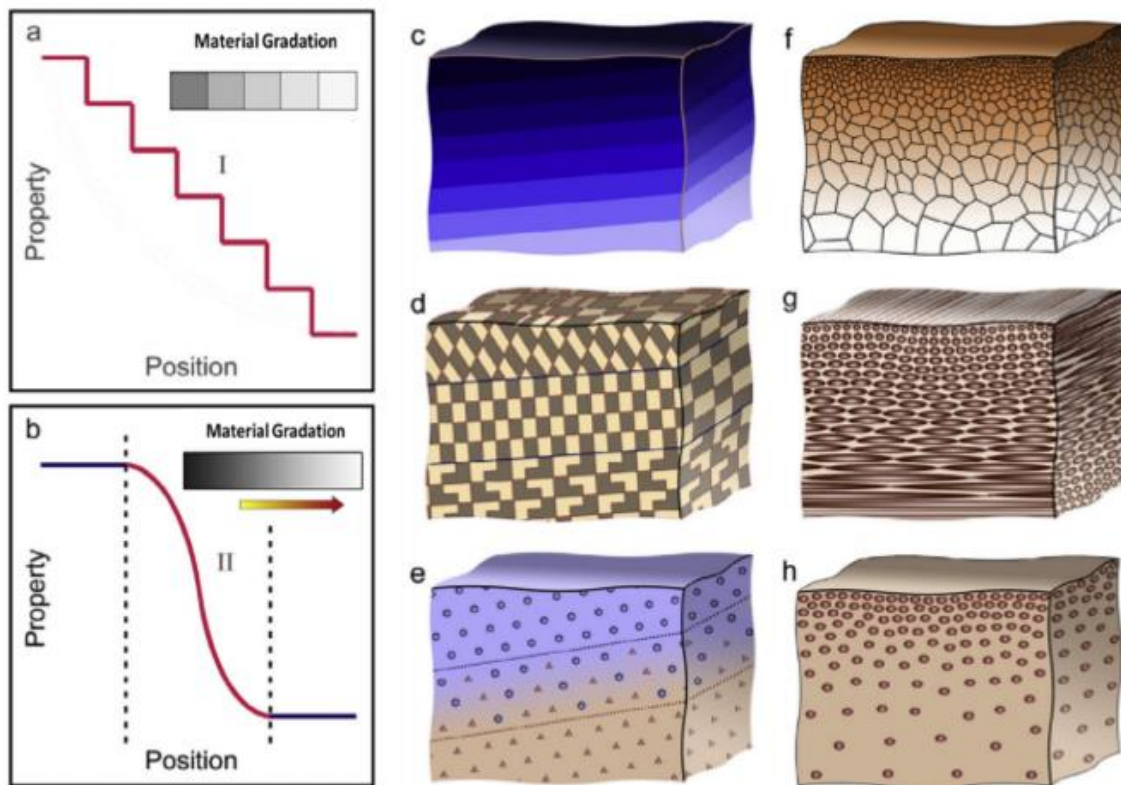
Depuis l'émergence des matériaux FGM, l'idée était de supprimer l'interface présente dans les matériaux composites traditionnels et de la remplacer par une interface graduelle. Ce matériau a suscité un intérêt grandissant, ce qui a conduit au développement de diverses variantes de FGM. Le type d'utilisation anticipé joue un rôle crucial dans la sélection de la FGM appropriée. Il est possible de classer les divers types de FGM produits actuellement en fonction de plusieurs critères [10].

### 1.8.1 En fonction de la structure du FGM

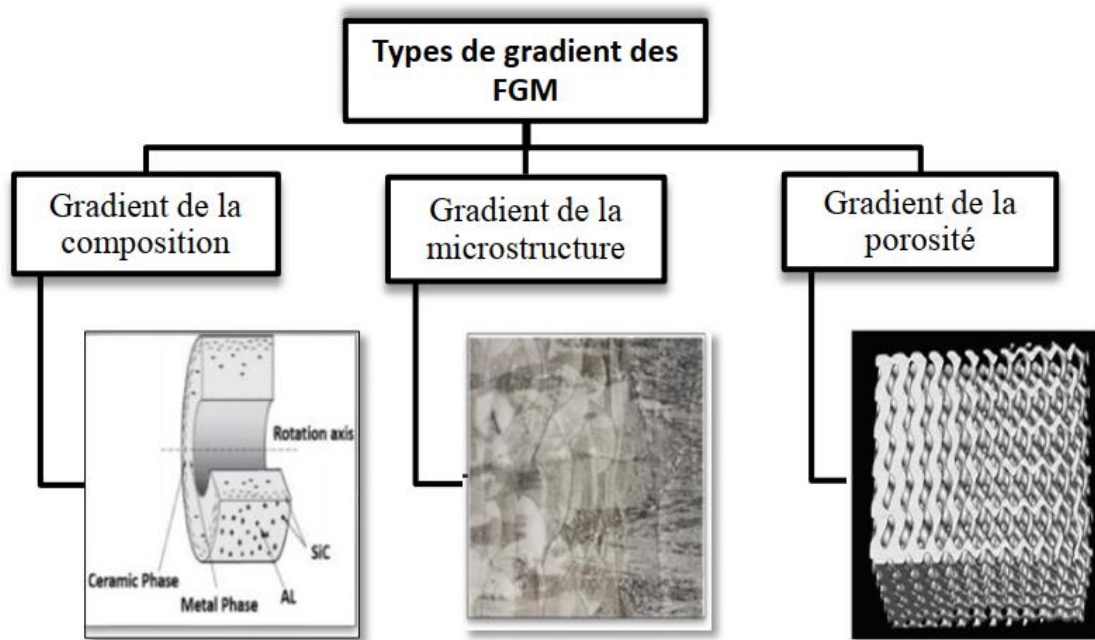
Les matériaux fonctionnels gradient présentent des changements graduels dans leur composition, leurs composantes ou leurs structures microscopiques (tels que les dimensions des granules, la qualité de la texture, la porosité,...). Dans au moins une orientation, entraînant des variations fonctionnelles liées à au moins une propriété [11]. Deux modèles de progression fonctionnelle sont disponibles pour ce faire : le modèle continu et le modèle discontinu. Si les FGM ont un changement progressif, cela crée une structure à plusieurs couches avec des interfaces entre ces couches distinctes. (Fig.1.4.a) [12,13]. En revanche, les FGM avec variation continue présentent un changement de la constitution et de la structure microscopique qui se génère de façon homogène sur toute l'étendue du matériau, sans qu'aucune zone ou ligne de démarcation ne puisse être observée pour distinguer les propriétés de chaque partie (Fig.1.4.b). On peut observer une gradation spatiale à différents niveaux, qu'ils soient globaux ou locaux. En termes de graduation globale, les propriétés du matériau varient sur une grande étendue. En revanche, la mesure graduée locale se restreint à un lieu particulier dans la substance, tel qu'un revêtement sur la surface ou une jonction dans la région inter faciale [14]. On peut également catégoriser les FGM en fonction de leur composition (Fig.1.4.c), la dimension des particules (Fig.1.4.f), leurs orientations (Fig.1.4.d, g) et la fraction volumique des constituants (Fig.1.4.e, h) [15]. La gradation structurelle du matériau peut être exprimée à travers une fonction de transition qui expose la relation entre la localisation spatiale et l'état de la graduation [16].

### 1.8.2 En fonction du gradient

D'après la Fig.1.5, il est possible de classer les FGM en trois groupes distincts en fonction de leur gradient: leur composition chimique, leur microstructure et leur porosité[17]. La composition chimique des FGM influe sur le type de gradient qui se forme et dépend de la nature des matériaux, qui peuvent présenter des phases et structures chimiques variées. Les étapes de production diffèrent en fonction de la quantité de substance artificielle utilisée et des paramètres de fabrication des matériaux [18].



**Fig.1.4** Divers types de FGM. (a) le modèle discontinu (b) le modèle continu ; (c) Gradient de la constitution (f) Gradient de la taille ; (d,g) gradient de la direction ; (e,h) gradient de la fraction volumique [11].

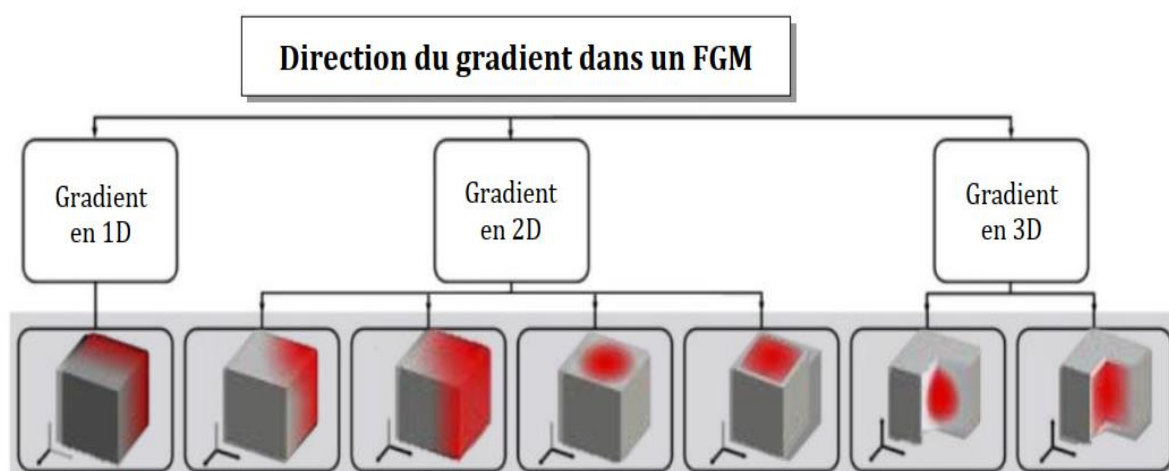


**Fig.1.5** Catégorisation des FGM en fonction de leur gradient [15].

Le processus de solidification peut mener à l'obtention d'une microstructure graduée dans le FGM. Diverses microstructures peuvent être générées depuis de la surface jusqu'au cœur du matériau grâce au refroidissement lent de son noyau dans ce type de processus [19]. Il est réalisable d'avoir un cœur solide et une surface plus résistante grâce à ce type de gradient, ce qui augmente la durabilité [17].

La modification de la porosité dans le volume du matériau peut conduire à la création d'un gradient de porosité fonctionnelle, grâce aux variations de la localisation spatiale. L'altération de la densité est en corrélation avec la modification des caractéristiques mécaniques, ce qui peut améliorer les performances de la pièce pour certaines utilisations qu'un matériau unique [20]. Il est possible de mesurer la taille des particules de poudre en utilisant les pores de différentes tailles pendant de la graduation dans le matériau en vrac. Pour les applications biomédicales, ce matériau fonctionnel est crucial car il est destiné à remplacer un matériau naturel présentant une porosité graduelle, ce qui favoriserait l'incorporation de l'implant et des tissus environnants [21].

Les dimensions du gradient vectoriel, configuration géométrique et distribution équipotentielles de surface sont des facteurs cruciaux à prendre en compte dans la conception d'un FGM. Les propriétés et les fonctions du composant subissent une influence de l'orientation du gradient lors de leur élaboration [22]. La Fig.1.6 démontre qu'il est possible de créer la conception et les diverses formes de gradient volumétrique en 1D, 2D ou 3D, en répartissant uniformément les matériaux ou en utilisant des motifs spéciaux [23,24].



**Fig.1.6** Classification des directions du gradient [24].

## 1.9 Avantages et inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués

Il y a des avantages et des inconvénients liés aux matériaux fonctionnellement gradués.

### 1.9.1 Les avantages des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux fonctionnellement gradués procurent plusieurs propriétés dans des domaines différents et pourraient être conceptualisées sur la base d'un simple revêtement [25]. D'autre part, plusieurs chercheurs comme Bansal et ses collègues [25] ont fourni divers avantages et potentiels concernant les matériaux fonctionnellement gradués qui sont cités ci-dessous:

- Réduire les contraintes thermiques résultant des disparités de coefficients de dilatation thermique entre les matériaux employés.
- Lorsqu'il n'y a pas d'interface claire, cela devrait entraîner une meilleure gestion globale des contraintes.
- Une amélioration de la liaison entre divers matériaux, comme le métal et la céramique.
- Il est possible d'étendre la zone fonctionnelle avant que la limite de déformation plastique ne soit atteinte.
- Élimination du phénomène de délaminage.
- Amélioration de la capacité de résistance à la rupture.
- Éviter les singularités de contraintes dans plusieurs zones, y compris les surfaces libres, les coins, les points de départ de fissures, etc.

### 1.9.2 Inconvénients des matériaux fonctionnellement gradués

La production des FGM pose un grand obstacle et cela à cause de l'inadéquation entre les diverses caractéristiques des matériaux utilisés. On peut évoquer la taille des particules, la forme et la température, etc. Afin d'être plus explicite, on présume que le matériau fonctionnellement gradué est composé de deux matériaux, l'un en céramique et l'autre en métal, chacun ayant une température différente, ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ) respectivement.



Généralement, un tel mélange est couramment défini par  $T_2$  inférieur à  $T_1$ , alors une semblable composition présente en premier lieu une haute porosité et une faible cohésion entre les divers constituants et en second lieu une application bornée de ce matériau.

De ce fait, la fabrication de ce type de matériau doit être dans des conditions comme une atmosphère protectrice ou à une pression basse mais malheureusement ces deux procédés sont très coûteux [25].

### 1.10 Domaines d'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués

Il y a plusieurs domaines où l'on peut appliquer le concept des FGM. Créé à l'origine pour répondre aux besoins de l'industrie aéronautique, il était doté de FGM qui présentait des caractéristiques opposées de conductivité et d'isolation thermique. A l'heure actuelle, ils autorisent la création de matériaux à la fois légers, robustes et durables, qui peuvent être employés dans une variété de domaines, comme :

#### ➤ **Aérospatial**

Grâce à la présence d'un élément à faible conductivité thermique, il est possible employés les FGM dans des environnements à température élevée. Les éléments de l'industrie aérospatiale, tels que les pièces des engins spatiaux (propulseur, fuselage des vaisseaux spatiaux, etc.), bénéficient grandement de l'emploi de FGM en raison de leur résistance exceptionnelle aux gradients thermiques élevés.

#### ➤ **Médecine**

Les FGM sont largement utilisées dans le secteur de l'orthopédie et de la dentisterie pour les implants dentaires et la reconstruction osseuse.

#### ➤ **Défense**

Pour assurer une protection efficace, il est indispensable que les matériaux défensifs, comme les panneaux blindés et les vêtements anti-balles, soient impénétrables. Les FGM sont particulièrement utiles Pour les utilisations militaires grâce à leur capacité à empêcher la propagation des fissures, qui est l'une de leurs principales caractéristiques.

### ➤ Énergie nucléaire

Les dispositifs de conversion d'énergie font usage des FGM. Ils sont employés comme revêtement de protection pour fournir une barrière thermique aux ailettes de turbine dans le moteur à turbine à gaz, les générateurs thermoélectriques, les piles à combustible, et les générateurs atomiques.

#### 1.11 Lois régissant la variation des caractéristiques matérielles des plaques FGM

Les FGM sont des matériaux qui combinent deux ou plusieurs constituants ayant des caractéristiques de structure et de fonction divers, avec une transition continue de leur constituant et leur distribution de porosité, afin d'améliorer l'efficacité de la structure qu'ils forment. Les matériaux FGM se distinguent principalement par leurs structures microscopiques non homogène et leurs caractéristiques macroscopiques graduées dans l'espace. Durant la production de ces matériaux, il est essentiel de déterminer la constitution multi phase selon l'épaisseur, qui est un facteur déterminant. La considération du principe des mélanges selon le modèle de Voigt est requise afin de considérer la dépendance des propriétés en fonction de la position [12].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1.1)$$

Où  $P_i$  et  $V_i$  représentent respectivement, les caractéristiques mécaniques et la fraction volumique du composante  $i$ , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.2)$$

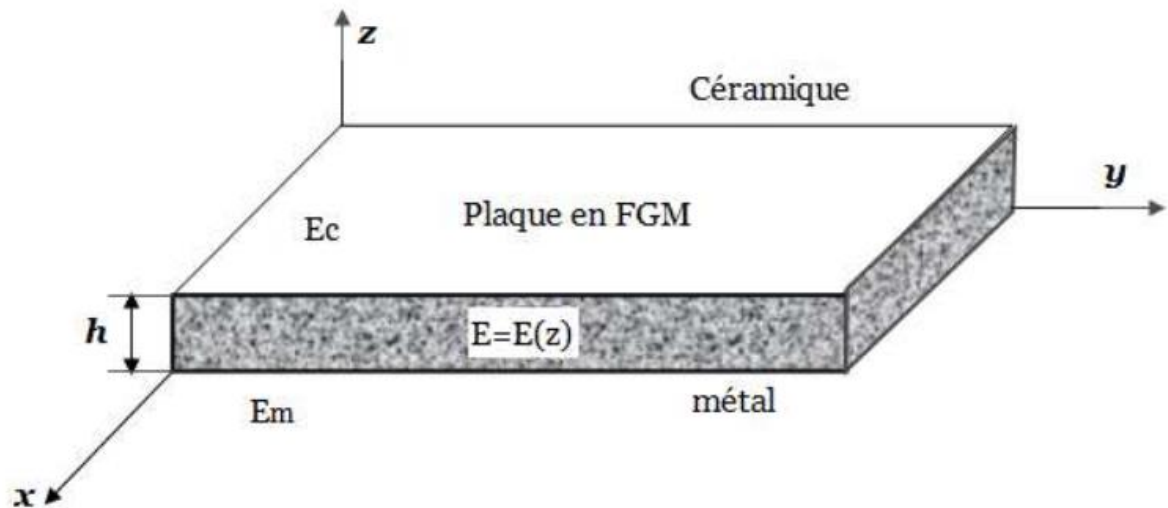
En général, les structures FGM les plus courantes se composent de deux matériaux: du métal et de la céramique, où la loi de Voigt deviendra comme suit :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (1.3)$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (1.4)$$

La variation des fractions de volume permet de définir les matériaux FGM. Les fonctions les plus couramment employées par les chercheurs afin d'exprimer les fractions de volume sont la fonction de puissance, exponentielle ou sigmoïde. Les particules doivent être liées de manière suffisamment résistante à l'intérieur pour résister à la rupture et également de manière suffisamment résistante à l'extérieur pour éviter l'usure.



**Fig.1.7** Structure géométrique d'une plaque FGM [26]

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées  $x$  et  $y$ , alors que l'axe  $z$  est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et orienté dans la direction de l'épaisseur. Les caractéristiques du matériau, notamment son module d'élasticité et son coefficient de Poisson, diffèrent entre les faces supérieure et inférieure, avec une variation continue en fonction de l'épaisseur (axe  $z$ ) soit :  $E = E(z)$  et  $\nu = \nu(z)$ .

Selon Jin et Batra [27], l'impact du coefficient de Poisson sur les déformations est minime en comparaison avec celui du module de Young. En conséquence, il est possible de supposer que le coefficient de Poisson reste constant. Alors que, la variation du module de d'élasticité à travers l'épaisseur de la plaque FGM est déterminée par la loi de puissance, la loi d'exponentielle ou la loi de sigmoïde.

### 1.11.1 Propriétés matérielles de la plaque en fonction d'une loi de puissance (P-FGM)

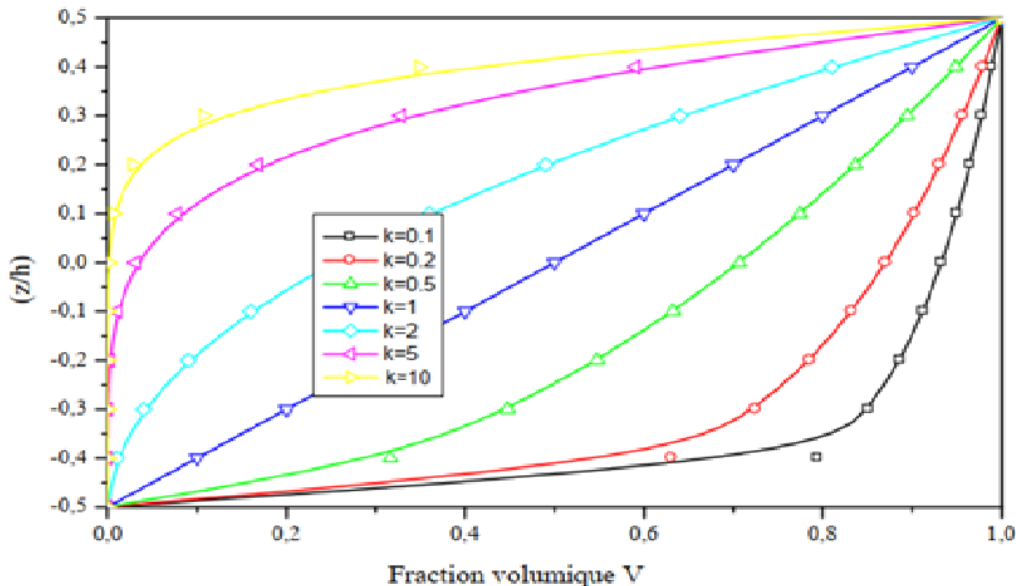
On peut exprimer la fraction volumique de type P-FGM en fonction d'une loi de puissance de la manière suivante :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1.5)$$

L'épaisseur totale de la plaque est représentée par  $h$ , tandis que  $k$  désigne un paramètre matériel. Après avoir établi la fraction volumique locale  $V(z)$ , on peut appliquer la loi des mélanges pour calculer les caractéristiques matérielles d'une plaque P-FGM[28]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.6)$$

Respectivement,  $E_m$  et  $E_c$  représentent les modules de Young pour la face inférieure ( $z = -h/2$ ) et la face supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM. La Fig.1.8 illustre la variation du module de Young selon l'épaisseur de la plaque P-FGM. Il est évident que la fraction volumique varie rapidement à proximité de la surface inférieure lorsque  $k < 1$ , et augmente rapidement à proximité de la surface supérieure lorsque  $k > 1$ .



**Fig.1.8** Changement de la fraction de volume dans une plaque P-FGM

1.11.2 Propriétés matérielles de la plaque en fonction d'une loi de sigmoïde(S-FGM)

Deux fonctions de loi de puissance ont été utilisées par Chi et Chung [28] pour définir la fraction de volume de la plaque S-FGM afin d'obtenir une bonne distribution des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.7}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.8}$$

En appliquant la loi des mélanges, on peut déterminer le module de Young de la plaque S-FGM par:

$$E(z) = E_1V_1(z) + (1-V_1(z))E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \tag{1.9}$$

$$E(z) = E_1V_2(z) + (1-V_2(z))E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \tag{1.10}$$

Le changement de la fraction volumique de la Plaque S-FGM est illustrée dans la figure 1.9, qui montre des distributions sigmoïdes conformes aux équations (1.7) et (1.8).

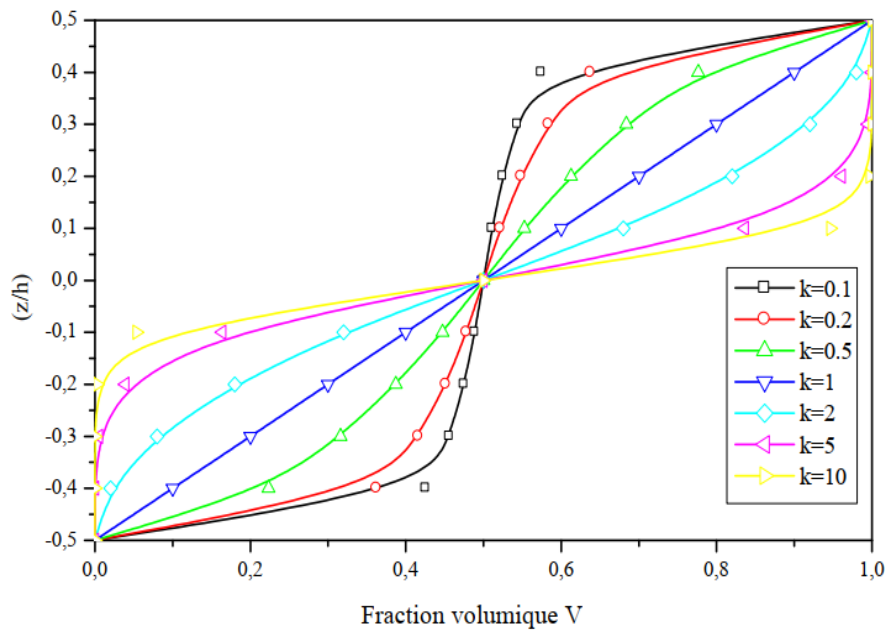


Fig.1.9 Changement de la fraction de volume dans une plaque S-FGM

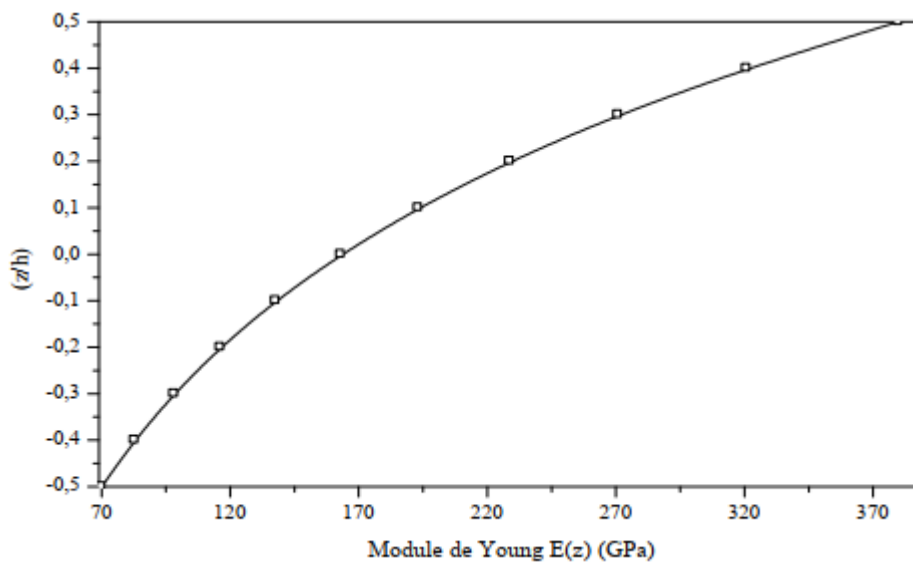
### 1.11.3 Propriétés matérielles de la plaque en fonction d'une loi d'exponentielle(E-FGM)

La fonction exponentielle de Delale et Erdogan [29] est l'une des méthodes les plus fréquentes utilisées par les chercheurs pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM.

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (1.11)$$

$$\text{Avec } B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (1.12)$$

La Fig.1.10 illustre le changement du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.



**Fig.1.10** Changement de la fraction de volume dans une plaque E-FGM

## 1.12 Modèles et théories pour les structures sandwichs FGM

Dans la littérature, il existe deux modèles principaux : les modèles tridimensionnelles (3D) et les modèles bidimensionnelles (2D).

### 1.12.1 Modèles tridimensionnels (3D)

L'approche tridimensionnelle a pour objectif d'obtenir des résultats plus précis, souvent utilisés comme référence, mais peu d'auteurs l'ont adoptée à cause de son coût en temps de calcul et en capacité de stockage de la base de données requise, qui est plus importante que

dans l'analyse bidimensionnelle. Il est difficile d'obtenir des solutions 3D dans la plupart des cas de géométrie et de conditions aux limites. Une des réponses à la problématique de l'élasticité 3D est l'article de Pagano [30], qui a présenté une solution en série sinusoïdale pour le problème de flexion des plaques stratifiées rectangulaires. Noor et al. [31] ont proposé une solution analytique pour résoudre les problèmes de flambement et de vibration libre des panneaux sandwichs.

### 1.12.2 Modèles bidimensionnelles (2D)

En raison de leur facilité de modélisation et de calcul par rapport aux modèles 3D, les modèles 2D sont largement utilisés par les auteurs dans la majorité des applications concernant l'analyse de structures multicouches. Les modèles 2D les plus couramment employés sont l'approche de la monocouche équivalente (ESL), qui est une approximation globale, et l'approche par couche (ou layerwise, LW), qui est basée sur une approximation locale.

#### 1.12.2.1 Approche monocouche équivalente

L'approche la plus couramment utilisée dans la littérature est l'approche monocouche équivalente. Cette approche est reposée sur l'hypothèse que la plaque multicouche hétérogène peut être assemblée à une seule couche équivalente homogène qui présente les mêmes caractéristiques que toutes les couches. Cette approche permet d'obtenir une vision globale et précise du comportement du multicouche, incluant la flèche transversale, la fréquence naturelle et la charge critique de flambement [32]. L'approche ESL est simple et peu coûteuse en temps de calcul en raison de son utilisation d'un petit nombre de variables dépendantes.

Dans cette approche, on distingue trois théories les plus populaires dans la littérature, à savoir :

- Théorie classique des plaques (CLPT)
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)
- Théories d'ordres supérieurs (HSDT)

### 1.12.2.1.1 La théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CLPT)

La théorie CLPT est reconnue comme la théorie la plus simple des théories ESL, mais elle n'est applicable qu'aux plaques minces. L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Fig.1.11). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse (CT)<sup>1</sup> ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ) et les déformations/contraintes normales ( $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$ ). Pour une plaque homogène et isotrope, la proportion de cisaillement dans la flèche est liée de manière directe à l'élancement ( $L/h$ ) [33,34].

En se basant sur les hypothèses énoncées précédemment, on peut écrire le champ de déplacement de la théorie CLPT comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Où :

$u_0$  et  $v_0$  : Les déplacements de la membrane dans les sens  $x$  et  $y$  respectivement.

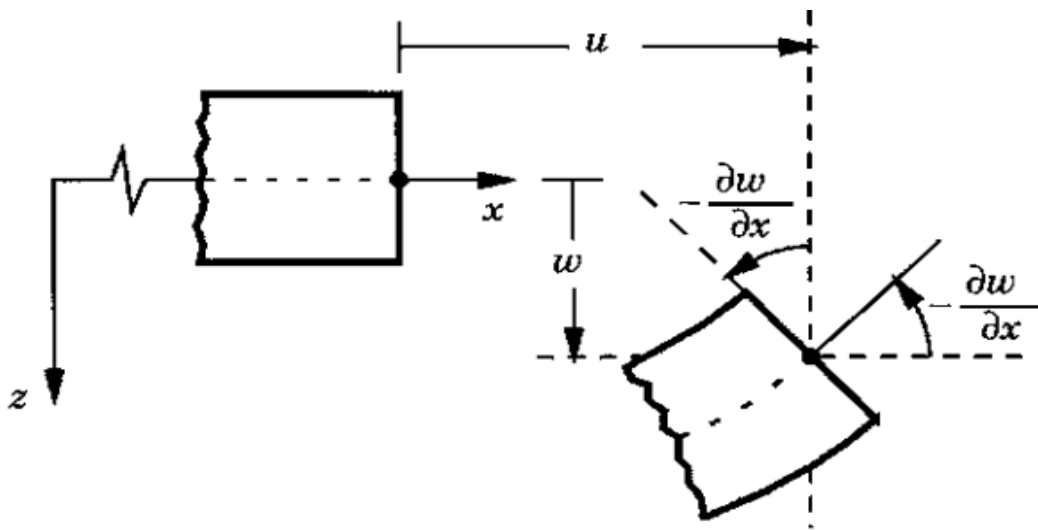
$w_0$  : la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}$  : sont les rotations engendrées par la flexion (sans cisaillement).

---

<sup>1</sup>Cisaillement Transverse





**Fig.1.11** Cinématique de la théorie classique des plaques sous l'hypothèse de Kirchhoff [35]

#### 1.12.2.1.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Pour les plaques épaisses ou moyennement épaisses, il est nécessaire de prendre en compte les déformations engendrées par le cisaillement transverse. La théorie du premier ordre (FSDT) peut être perçue comme une version améliorée de la théorie classique (CLPT). Cette théorie se base principalement sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin : les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (en raison de l'effet du cisaillement transverse), (Fig.1.12). Toutefois, pour assurer la précision, il est impératif d'incorporer un facteur de correction de cisaillement, car les déformations sont constantes dans toute l'épaisseur de la plaque.

En se basant sur les hypothèses énoncées précédemment, le champ de déplacement de la théorie FSDT s'écrit comme suit :

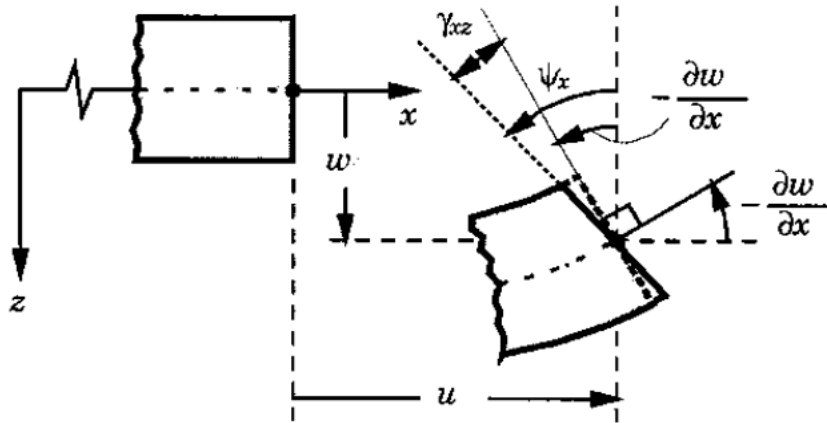
$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Où:

$u_0$  et  $v_0$  : sont les déplacements de la membrane dans les sens  $x$  et  $y$ , respectivement.

$w_0$  : la flèche ou le déplacement transversal de la plaque.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement.



**Fig.1.12** Cinématique de la théorie de premier ordre des plaques sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [35].

### 1.12.2.1.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Contrairement aux théories CLPT et FSDT, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire de champs de déplacement à travers l'épaisseur (Fig.1.13). Cette théorie HSDT permet de décrire les contraintes de cisaillement transversal d'une manière parabolique et précise sans recours à des facteurs de correction. Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par différents chercheurs par exemple : Reddy [36], Reddy et Phan [37], Iyengar et al.[38], Murty et al.[39].

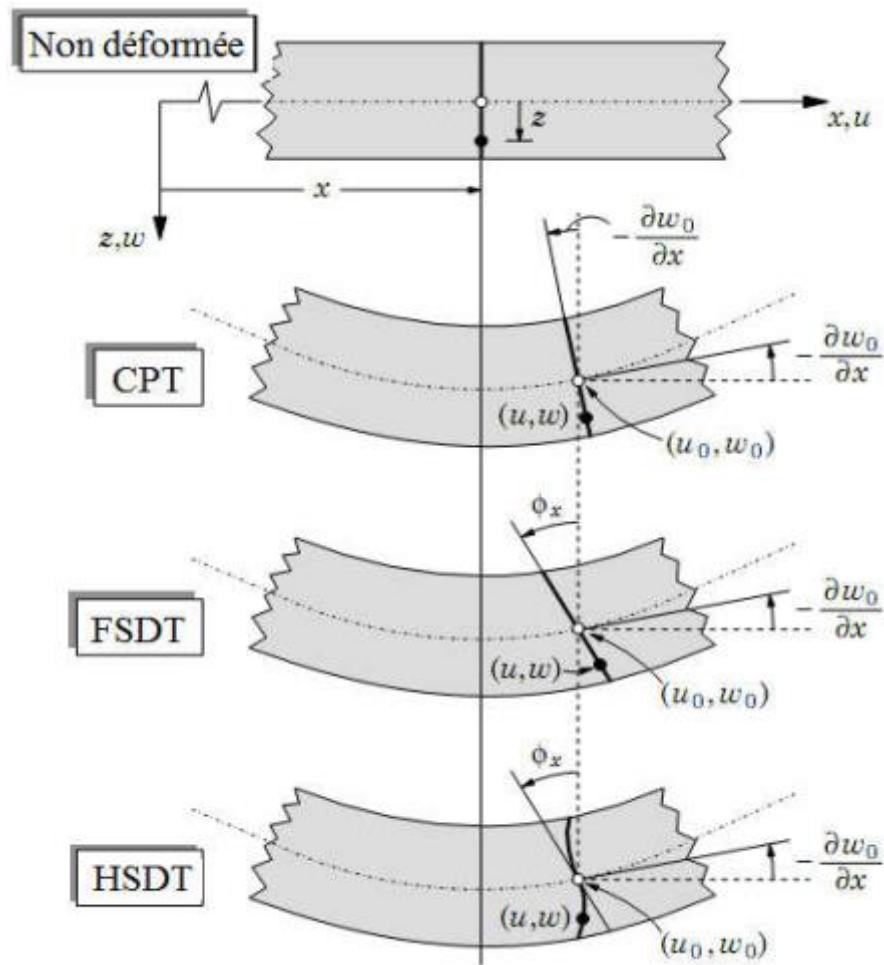


Fig.1.13 Comparaison de la théorie d'ordre supérieur (HSDT) avec (FSDT) et (CPT).

Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est souvent exprimé de cette façon :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Où :

$u_0$  et  $v_0$  : sont les déplacements de la membrane dans les sens  $x$  et  $y$  respectivement.

$w_0$  : est la flèche de la plaque.

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.

$$\text{Avec } \begin{cases} \varphi_x = \frac{dw_0(x, y)}{dx} + \phi_x \\ \varphi_y = \frac{dw_0(x, y)}{dy} + \phi_y \end{cases}$$

$f(z)$ : représente la fonction de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque. On peut mettre  $f(z) = 0$  pour la théorie classique CLPT et  $f(z) = z$  pour la théorie du premier ordre (FSDT).

Des contributions significatives pour le développement de modèles d'ordre élevé, exprimant la fonction de cisaillement  $f(z)$ , ont été proposées par de nombreux auteurs dans la littérature.

Les modèles HSDT ont une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur pour représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée. Parmi les modèles HSDT les plus connus et fréquemment utilisés dans la littérature scientifique, on peut citer :

- La fonction d'Ambartsumyan [40];

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (1.16)$$

- La fonction de Reissner [41] :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (1.17)$$

- La fonction de Reddy[36] (la plus populaire), Murthy [42] Avec ;

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (1.18)$$

Le modèle de Reddy suppose que le déplacement membranaire ont une forme cubique, tandis que le déplacement transversal ( $w$ ) est constant [36]. Dans le cas homogène, ce modèle fournit une estimation précise des contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution tridimensionnelle élastique [43]. Les contraintes de cisaillement transverse sont réparties selon une courbe parabolique à travers l'épaisseur (dans le cas d'un multicouche,

chaque couche doit suivre la même courbe). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Contrairement à d'autres modèles qui utilisent des fonctions polynomiales d'ordre supérieur, Touratier [44] a proposé une théorie d'ordre supérieure de forme sinusoïdal appelée SSDT (Sinusoidal Shear Deformation plate Theory) qui utilise une fonction trigonométrique sinusoïdale pour représenter la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. La théorie du Touratier donne des résultats plus précis par rapport à la théorie de Reddy en ce qui concerne la détermination les contraintes de CT.

La fonction est écrite de la manière suivante :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (1.19)$$

Karama et al. [45] ont proposé une fonction exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé, nommée ESDPT (Exponential Shear Deformation Plate Theory) qui peut être obtenue en appliquant leurs formules :

$$f(z) = z.e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (1.20)$$

Opter pour la fonction exponentielle permet de développer la variable  $z$  en puissances paires et impaires, tandis que la fonction Touratier [44] (sinus) n'autorise qu'un développement en puissances impaires.

Divers fonctions de cisaillement transverse ont été employées pour élaborer d'autres théories d'ordre élevé. Le tableau 1.2 résumé quelque fonctions de CT les plus populaire.

**Tableau 1.2.** Divers fonctions de CT de forme HSDT pour des structures FGM

Théorie	Fonction de CT ( $f(z)$ )
Reddy [36]	$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Touratier [44]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Karama [45]	$f(z) = ze^{-2(z/h)^2}$
Reissner [41]	$f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Soldatos [46]	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
Mantari [47]	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + m \left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Ait Atmane [48]	$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]}$
Elmeiche [49]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} - z$
Aydogdu [50]	$f(z) = z\alpha^{-\frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}} ; \alpha > 0$
Nguyen [51]	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z\left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$

### 1.12.2.2 Approche par couche

L'objectif de cette approche par couche ou layerwise (LW) est d'améliorer la description des effets d'interface pour les structures composites multicouches traditionnels. Les matériaux FGM peuvent également être traités selon cette approche. Des chercheurs tels que Chabot [52], Carrera [53], Afaq [45], et Reddy [36] ont développé plusieurs modèles en utilisant l'approche par couche. En subdivisant la structure multicouche, on obtient des sous-structures

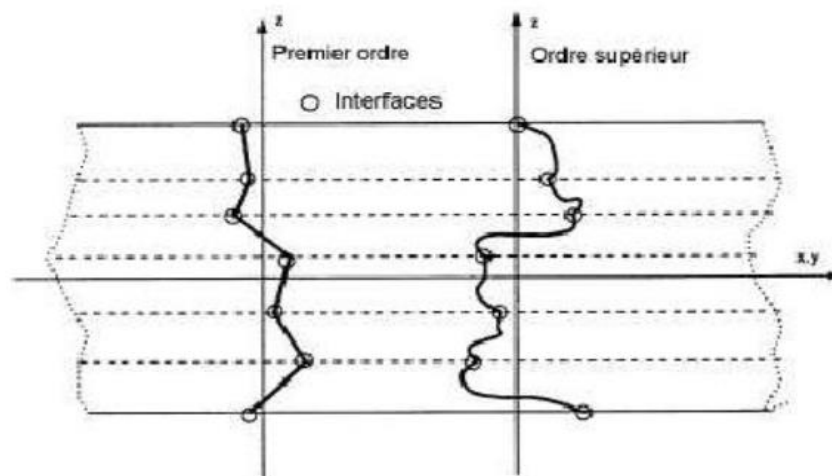
qui correspondent chacune à une couche ou à un groupe de couches. Chaque couche est modélisée individuellement en utilisant la théorie CLPT, FSDT ou HSDT, qui impose un champ de déplacement continu aux interfaces entre les diverses couches. Malgré leur coût relativement élevé (le nombre de variable dépend du nombre de couche, c.-à-d. le nombre de variable augmente avec l'augmentation du nombre de couche), ces types de modèles offrent une précision supérieure, surtout lorsqu'il s'agit de calculer des contraintes normale et de cisaillement transversales.

Les modèles qui utilisent le concept par couche peuvent être généralement classés en deux catégories:

- Les modèles couches discrètes.
- Les modèles zig-zag.

#### 1.12.2.2.1 Modèles couches discrètes

Contrairement aux modèles d'ordre supérieur, les modèles à couches discrètes offrent une meilleure approximation des champs en fonction de l'épaisseur du multicouche en utilisant une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (Fig.1.14). Les couches discrètes modélisent le multicouche comme une groupe de plaques (objets 2D) reliées par des forces d'interface. La continuité des contraintes de CT doit être assurée aux interfaces. Il existe une corrélation entre le nombre de couches de la plaque composite et le nombre de paramètres inconnus.



**Fig.1.14** Champ de déplacements des modèles couches discrètes [54].

### 1.12.2.2.2 Les modèles zig-zag

Il est possible que les caractéristiques des couches stratifiées soient différentes, comme c'est le cas pour les plaques multicouches hybrides qui ont des contraintes de cisaillement inter-laminaire et des contraintes d'interface non continues. Étant donné que les modèles d'ordre élevé ne permettent pas de rendre compte de la discontinuité dans les stratifiés, plusieurs auteurs ont élaboré une théorie zig-zag d'ordre élevé, comme celle développée par Cho [55,56], qui se révèle très utile pour l'analyse des plaques composites stratifiées et pour mieux appréhender les effets d'interface. En divisant la structure multicouche en sous structures, on peut appliquer une théorie de premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur à chaque sous structure (Figure 1.17). Les conditions de continuité peuvent être vérifiées par les modèles Zig-Zag. L'avantage principal de cette théorie Zig-Zag est que le nombre de variable est indépendant du nombre de couches. Murakami [57] et Carrera [58] font partie des auteurs ayant proposé des évolutions considérables afin de présenter une répartition non linéaire des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque.

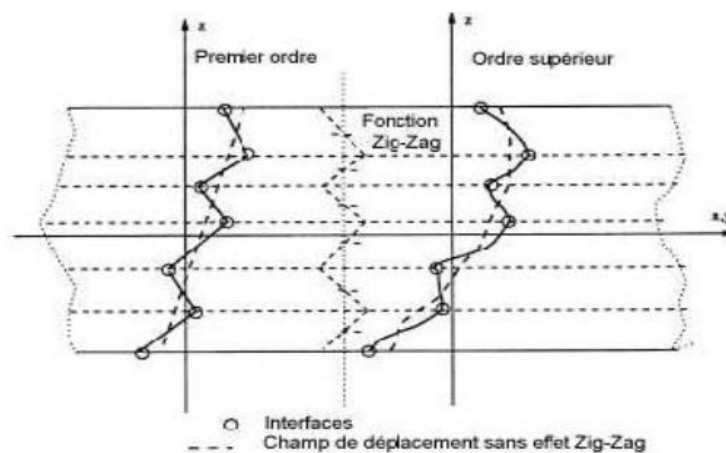


Fig.1.15 Champ de déplacements de la théorie Zig-Zag [54].

### 1.13 Modèles des plaques FGM

Malgré le caractère novateur des structures FGM, il existe un nombre important de chercheurs qui ont étudié et analysé le comportement des structures FGM (statique, dynamique, flambement, ..).



### 1.13.1 Modèles des plaques FGM basés sur la théorie du premier ordre (FSDT)

En utilisant la méthode des éléments finis, Praveen et Reddy [59] ont étudié le comportement statique et dynamique non linéaire des plaques FGM soumises à des charges transversales dynamiques et à un champ thermique. Lanhe [60] ont analysé le comportement du flambement thermique d'une plaque FGM simplement appuyée ayant en utilisant la théorie de la déformation du premier ordre. La résolution des équations d'équilibre et de flambement s'est faite de manière analytique.

Batra et Jin [61] ont exploité la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre à l'aide de la méthode des éléments finis pour examiner la vibration libre des plaques FGM rectangulaires. Yaghoobi H et Yaghoobi P [62] ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre afin d'analyser le comportement de flambement des plaques sandwichs FGM symétriques exposées à des charges mécaniques. Le travail mené par Mantari et Granados [63] portait sur l'analyse des vibrations de plaques composites FGM. Ils ont utilisé une théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) qui ne contient que quatre inconnues.

En utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre, Draoui et al [64] ont étudié le comportement statique et de la vibration libre des plaques sandwich composites renforcées par des fibres en carbone nanotubes. L'étude menée par Lidiya et al. [65] sur le comportement en flambement et en vibration libre des plaques sandwich composées de matériaux isotropes et fonctionnellement gradués de formes arbitraires s'est basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT).

En utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), Hashemi et Jafari [66] ont analysé les vibrations non linéaires d'une plaque rectangulaire à gradient fonctionnel (FG) en contact avec un fluide. Ils ont également calculé la pression exercée par le fluide sur la surface libre de la plaque en utilisant la fonction de potentiel de vitesse et l'équation de Bernoulli.

Kumar et al. [67] a employé la théorie FSDT pour examiner l'analyse de vibration libre d'une plaque en matériau à gradient fonctionnel (FGM) incorporant de la porosité sur une base élastique. La vibration libre et la stabilité des plaques stratifiées et des coques FGM ont été

examinées par Kurpa et Shmatko [68] en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre. En s'appuyant sur la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre, un élément de plaque isoparamétrique à huit nœuds  $C^0$  a été développé par Karakoti et al. [69] pour examiner la réponse transitoire non linéaire de plaques sandwich et de panneaux de coque en matériau poreux à gradient fonctionnel (FGM).

Quoc et al. [70] ont formulé un nouvel élément fini isoparamétrique  $C^0$  pour analyser le comportement de vibration libre de grande amplitude des plaques sandwich fonctionnellement graduées avec porosité. L'élément, contient neuf nœuds, est formulé sur la base de la théorie FSDT. L'utilisation d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, Thai et al. [71] ont analysé le comportement de la flexion, de la vibration libre et du gauchissement d'une plaque sandwich en FGM.

### 1.13.2 Modèles des plaques FGM basés sur les théories d'ordre supérieur (HSDT)

À l'aide de la théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDT), Reddy [72] a formulé des modèles en éléments finis et des théories HSDT afin d'analyser le comportement dynamique non linéaire de plaques FGM épaisses exposées à une pression uniforme.

Une étude portant sur la vibration non linéaire d'une plaque FGM simplement appuyée a été présentée par Huang et Shen [73]. La méthode utilisée pour élaborer cette étude était basée sur une théorie des plaques en cisaillement d'ordre supérieur en conjonction avec les équations de Von-Karman.

Das et al. [74] ont développé un élément fini de plaque triangulaire  $C^1$  basé sur la théorie HSDT pour analyser le comportement statique et dynamique des panneaux sandwich épaisses avec ou sans noyau FG soumis à un chargement thermomécanique. Shen [75] a examiné le post-flambage des plaques FGM symétriques en utilisant une théorie des plaques d'ordre supérieur qui tient compte des effets thermiques, ainsi que des imperfections géométriques initiales.

En se basant sur la théorie HSDT, Matsunaga [76] a examiné les phénomènes de flambement et de vibration libre des plaques FGM. Les séries de puissances ont été employées pour présenter le champ de déplacements. Le modèle proposé par les auteurs est

capable de prédire avec précision les fréquences propres, les charges critiques de flambage et de la distribution des déplacements et des contraintes dans la plaque FGM. En utilisant la théorie d'ordre élevé, Ait Atmane et al. [48] ont proposé une solution analytique basée sur la méthode de Navier pour analyser la réponse dynamique des plaques FGM simplement appuyée soutenue sur une fondation élastique.

D'une manière similaire, Bodaghi et Saidi [77] ont étudié le flambement d'une plaque épaisse FGM rectangulaire en proposant des solutions analytiques basés sur la méthode de Lévy à l'aide de la théorie d'ordre supérieur de Reddy. Dans leur étude, la plaque est simplement appuyée sur les quatre côtés et est soumise à divers types de charges en plan. Les auteurs ont mis au point une procédure qui permet de dissocier les cinq équations différentielles en deux équations distinctes à résoudre.

À l'aide de la théorie HSDT, un élément fini de plaque isoparamétrique quadrilatéral  $C^0$  est développé par Talha et Singh [78] pour étudier la flexion et la vibration des plaques FGM. Cet élément est défini par neuf nœuds avec treize degrés de liberté (DDL). Dans le même contexte, un élément quadrilatéral  $C^0$  à huit nœuds avec 13 DDL par nœud a été utilisé par Natarajan et Manickam [79] pour étudier le comportement statique et dynamique de plaques sandwich FGM épaisses/minces, en se basant sur la théorie HSDT.

Neves et al. [80] ont employé la théorie de cisaillement hyperbolique et sinusoïdal d'ordre supérieur pour analyser le comportement statique, dynamique et de stabilité des plaques isotropes et des plaques sandwichs FGM. Shen et Wang [81] ont utilisé les schémas de Voigt et de Mori-Tanaka, conjointement avec la théorie d'ordre supérieur, afin d'effectuer des études sur le comportement de vibration de petites et grandes amplitudes de plaques sur des fondations élastiques de Pasternak.

Afin d'étudier la vibration libre des plaques sandwich dans des environnements thermiques variés, Khalili et Mohammadi [82] ont élaboré une théorie améliorée des plaques d'ordre supérieur. La vibration libre d'une plaque fonctionnellement graduée a été examinée par Jha et al. [83] en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur et la théorie de déformation normale.

Alijani et Amabili [84] ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour examiner la vibration forcée non linéaire de plaques épaisses en FGM. Afin

d'étudier de la flexion, du flambement et des fréquences naturelles des plaques en FGM, Nguyen [85] a formulé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. À l'aide du logiciel ANSYS, Liu et al. [86] ont examiné le comportement de la vibration libre des plaques sandwich en FGM en utilisant l'approche par couche avec la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Afin d'évaluer le comportement statique et vibratoire des plaques isotropes et sandwichs FGM, Nguyen et al. [87] ont élaboré un élément triangulaire  $C^0$  à trois nœuds avec 7 DOF basé sur l'approche MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) avec l'aide de la théorie HSDT.

Gupta et al. [88], dans leur étude, ont créé un élément quadrilatère  $C^0$  à neuf nœuds basé sur la théorie HSDT afin de calculer la fréquence naturelle de la plaque FGM pour différentes conditions aux limites. Les auteurs ont analysé également l'impact de l'inhomogénéité du matériau, des indices de fraction volumique, des conditions aux limites et de la géométrie sur la fréquence naturelle de ces plaques FGM. Une nouvelle théorie quasi-3D d'ordre supérieur a été proposée par Benbakhti et al. [89] pour examiner le comportement de la flexion de plaques sandwich fonctionnellement graduées soumises à une charge thermique.

Pour étudier la vibration thermique des plaques sandwich et des coques en matériau FGM, Pandey et Pradyumna [90] ont développé une formulation d'éléments finis basée sur l'approche par couches d'ordre élevé. Les mêmes auteurs, Pandey et Pradyumna [92], dans un autre travail, ont proposé une nouvelle approche par couche d'ordre élevé. Pour les analyses du comportement de la flexion et de la vibration libre de plaques sandwich symétriques en FGM. Dans leur modèle, les auteurs supposent un champ de déplacement du premier ordre pour modéliser les deux peaux (supérieure et inférieure), tandis que la couche centrale est modélisée via la théorie d'ordre élevé.

En utilisant la méthode d'échantillonnage des surfaces (SaS), Kulikov et al. [91] ont conçu un élément quadrilatère hybride mixte à quatre nœuds pour analyser les contraintes 3D des plaques FGM. Cong et al [93] est employé la théorie HSDT pour analyser le comportement de flambement et de post-flambage des plaques FGM soumise à des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques. Le matériau étudié est un matériau FGM poreux placée sur des fondations élastiques. Daikh et Zenkour [94] proposé une nouvelle

théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour examiner la vibration libre et de flambage mécanique des plaques sandwich poreux FGM.

En se basant sur la méthode d'analyse isogéométrique (IGA) avec la théorie quasi-3D d'ordre supérieure (quasi 3D-HSDT), Van et Lee [95] ont étudié la réponse dynamique des plaques en matériau à gradient fonctionnel comportant des géométries complexes. Le comportement vibratoire des plaques en matériau FGM situés sur une fondation élastique de type Winkler/Pasternak/Kerr a été examiné par Li et ses collègues [96] en utilisant une nouvelle théorie quasi-3D trigonométrique incluant la fonction de cisaillement de Reddy.

Belkhouja et al [97] ont employé une théorie quasi-3D et 2D hybride de déformation par cisaillement d'ordre élevé pour étudier le comportement de la flexion, de la vibration libre et du flambage des plaques FGM. La réponse vibratoire d'une plaque FGM s'appuyé sur une base viscoélastique a été étudiée par Frahlia et son équipe en utilisant la théorie HSDT.

#### **1.14 Conclusion**

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté quelques généralités sur les matériaux sandwichs avec leurs domaines d'utilisation ainsi les concepts de base des matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (FGM) avec leur évolution historique, leurs procédés de production, leurs domaines d'utilisation ainsi les différentes lois de mélange. Nous avons présenté également une revue sommaire sur les approches, les théories et les différents modèles d'éléments finis qui servent à analyser le comportement mécanique, dynamique de stabilité des structures en matériaux à gradient de propriétés fonctionnel et des structures sandwich FGM en particulier. La partie suivante portera sur la présentation et la formulation théorique du modèle layerwise pour la modélisation des plaques sandwichs FGM.

# **CHAPITRE 2**

## **ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES STRUCTURES SANDWICH EN MATÉRIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUÉS (FGM)**

# Chapitre 2

## Etude du comportement des structures sandwich en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

### 2.1 Introduction

Ce chapitre se concentre sur la présentation du comportement mécanique des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) et en particulier les plaques sandwichs en FGM. La formulation théorique du comportement mécanique des structures sandwich en FGM est basée sur un nouveau modèle de type layerwise. Ce modèle est développé initialement par Belarbi et Tati [99] pour l'analyse des structures sandwich multi couche. Dans ce présent modèle, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est utilisée pour modéliser les deux peaux, tandis que la théorie du troisième ordre (TSDT) est appliquée pour modéliser le cœur. La combinaison de ces deux théories permet de répondre aux conditions de continuité des déplacements à l'interface et aux conditions de compatibilité. L'avantage de ce présent modèle repose sur son nombre de variables est fixe, n'augmente pas lorsque le nombre de couches augmente. Ceci est une caractéristique très importante par rapport aux modèles layerwise conventionnels et facilite considérablement l'analyse d'ingénierie. Dans la présente étude, trois types de plaques sandwichs fonctionnellement graduées ont été étudiés : une plaque FG isotrope, une plaque sandwich avec des peaux homogènes et un cœur FG, et une plaque sandwich avec des peaux FG et un cœur homogène. Loi de puissance P-FGM est utilisé pour estimer les propriétés mécaniques de la plaque sandwich FG.

## 2.2 Formulation théorique

### 2.2.1 Configuration géométrique

Une plaque sandwich en FGM rectangulaire est considérée comme illustré dans la Figure.2.1. La plaque a une longueur  $a$ , une largeur  $b$  et une épaisseur  $h$ . Le plan médian de la plaque ( $z = 0$ ) est considéré comme le plan de référence. Dans la présente étude, trois types de plaques FGM sont étudiés : plaques FGM isotropes (Type A), plaques sandwich avec un cœur FGM et des peaux homogènes (Type B), plaques sandwich avec un cœur homogène et des peaux en FGM (Type C).

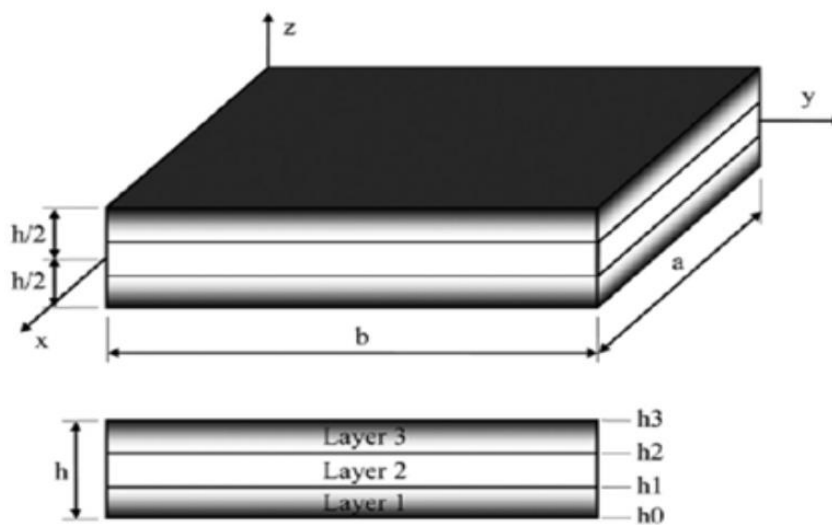


Fig.2.1 Géométrie d'une plaque sandwich en FGM.

#### 2.2.1.1 Type A : Plaques en FGM isotropes

En général, la plaque FGM est fabriquée en combinant le métal avec la céramique, dans lequel la composition varie du haut vers le bas (voir la figure.2.2). La fraction volumique de la plaque FGM varie selon l'axe de l'épaisseur via une fonction de loi de puissance comme suit :

$$V_c(z) = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^k, \quad z \in [-h/2, h/2] \quad (2.1)$$



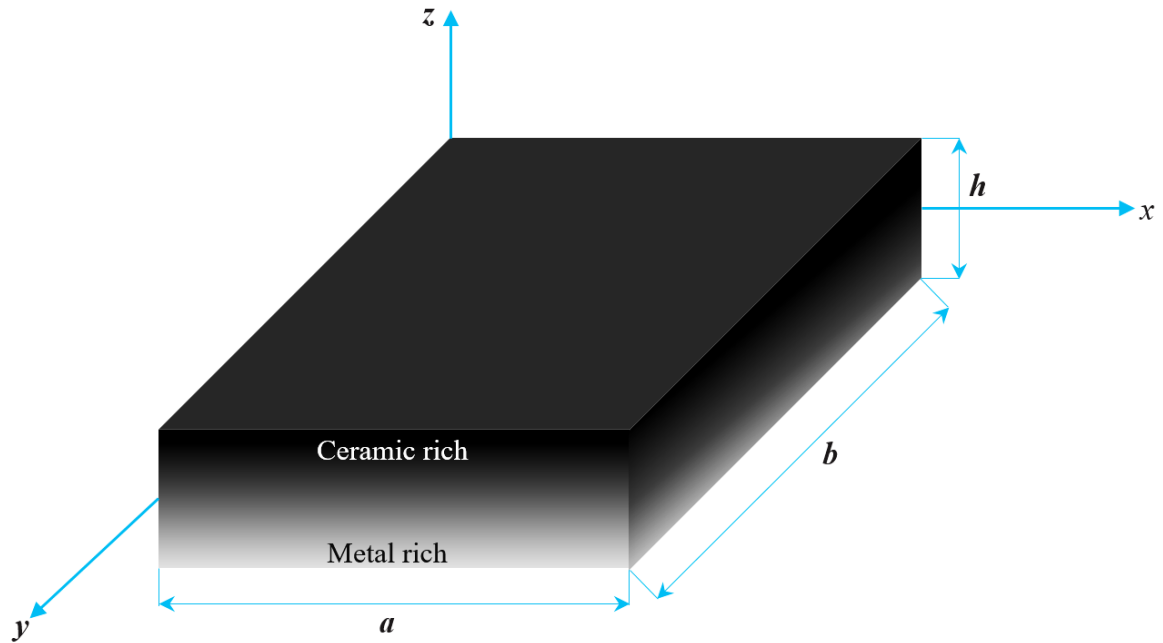


Fig. 2.2 Géométrie d'une plaque en FGM, (Type A).

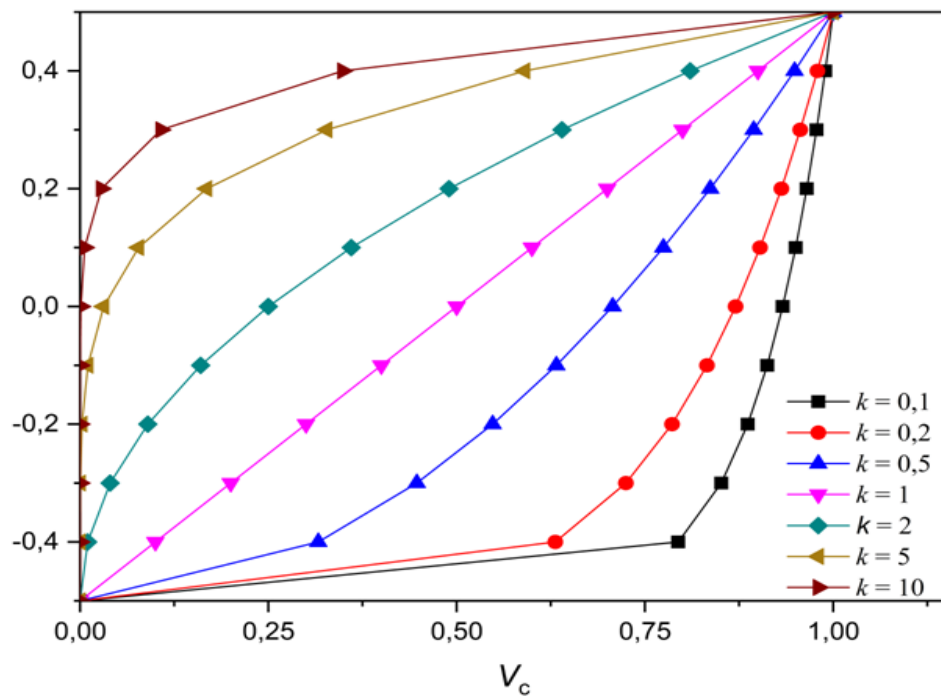


Fig.2.3 La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de  $k$ , (Type A)

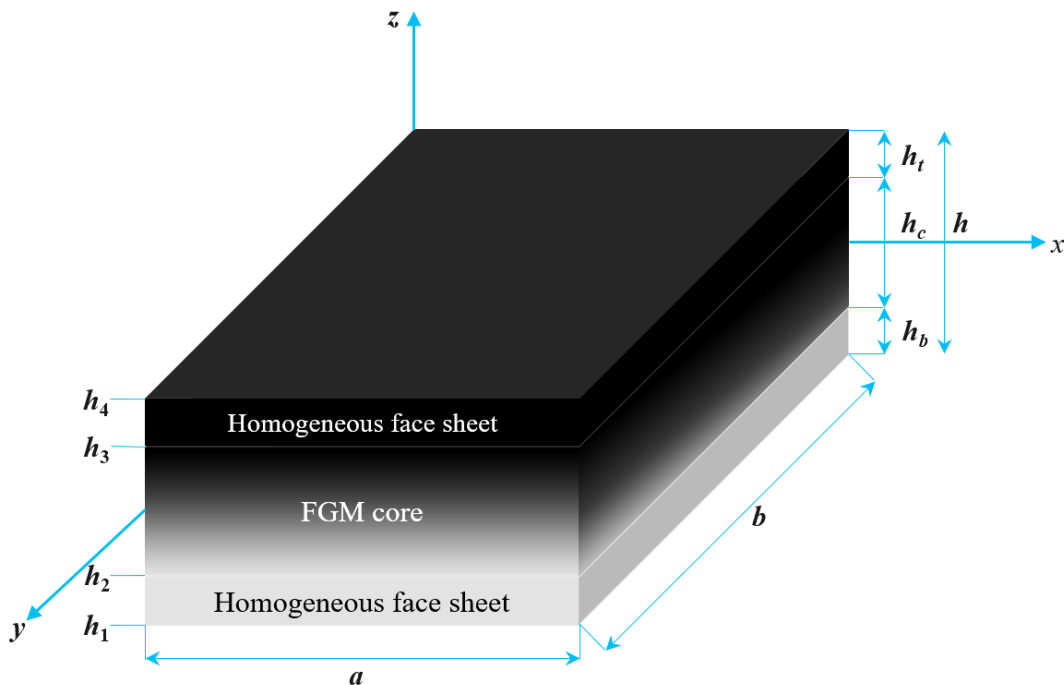
### 2.2.1.2 Type B : Plaques sandwich avec un cœur en FGM et des peaux homogènes.

Dans ce type, les deux peaux supérieure et inférieure, d'épaisseur ( $h_t$ ) et ( $h_b$ ), sont, respectivement, en céramique et en métal pure, tandis que la couche centrale, d'épaisseur ( $h_c$ ), est en matériau FGM, qui est graduée du métal à la céramique (voir Figure 2.4). On peut noter que y a pas d'interfaces entre le cœur et les feuilles de surface.

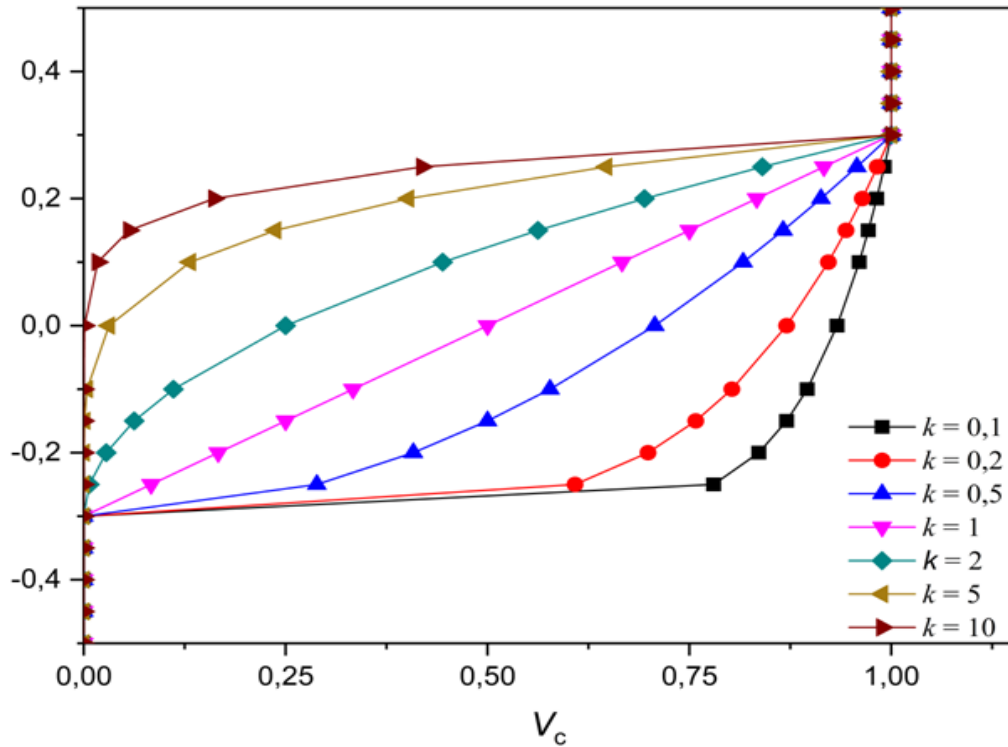
Les niveaux d'épaisseurs des deux interfaces, la surface supérieure et la surface inférieure sont désignées par  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$ , respectivement. La fraction volumique de chaque matériau composant est définie comme :

$$\begin{aligned} V_1(z) &= 1 && \text{for } z \in [h_3, h_4], \text{ Peau supérieure;} \\ V_2(z) &= \left( \frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^k && \text{for } z \in [h_2, h_3], \text{ Coeur;} \\ V_3(z) &= 0 && \text{for } z \in [h_1, h_2], \text{ Peau inférieure} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où  $h_1 = -(h_c / 2 + h_b)$ ,  $h_2 = -h_c / 2$ ,  $h_3 = h_c / 2$ ,  $h_4 = (h_t + h_c / 2)$  comme illustré à la (Figure 2.4).



**Fig.2.4** Géométrie d'une plaque sandwich avec cœur en FGM et des peaux homogènes (Type B).



**Fig.2.5** La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de  $k$  d'une plaque sandwich avec cœur en FGM et des peaux homogènes (TypeB).

### 2.2.1.3 Type C : Plaques sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM

Dans le troisième type, on suppose que les deux peaux inférieure et supérieure sont des FGM, tandis que le cœur est composé d'un matériau homogène isotrope (comme on peut le voir dans la Figure 2.6). Il est possible d'exprimer la fraction volumique de la plaque sandwich FGM dans ce cas de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 V_1(z) &= \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k && \text{for } z \in [h_3, h_4], \text{ Peau inférieure;} \\
 V_2(z) &= 1 && \text{for } z \in [h_2, h_3], \text{ Core;} \\
 V_3(z) &= \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k && \text{for } z \in [h_1, h_2], \text{ Peau supérieure}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

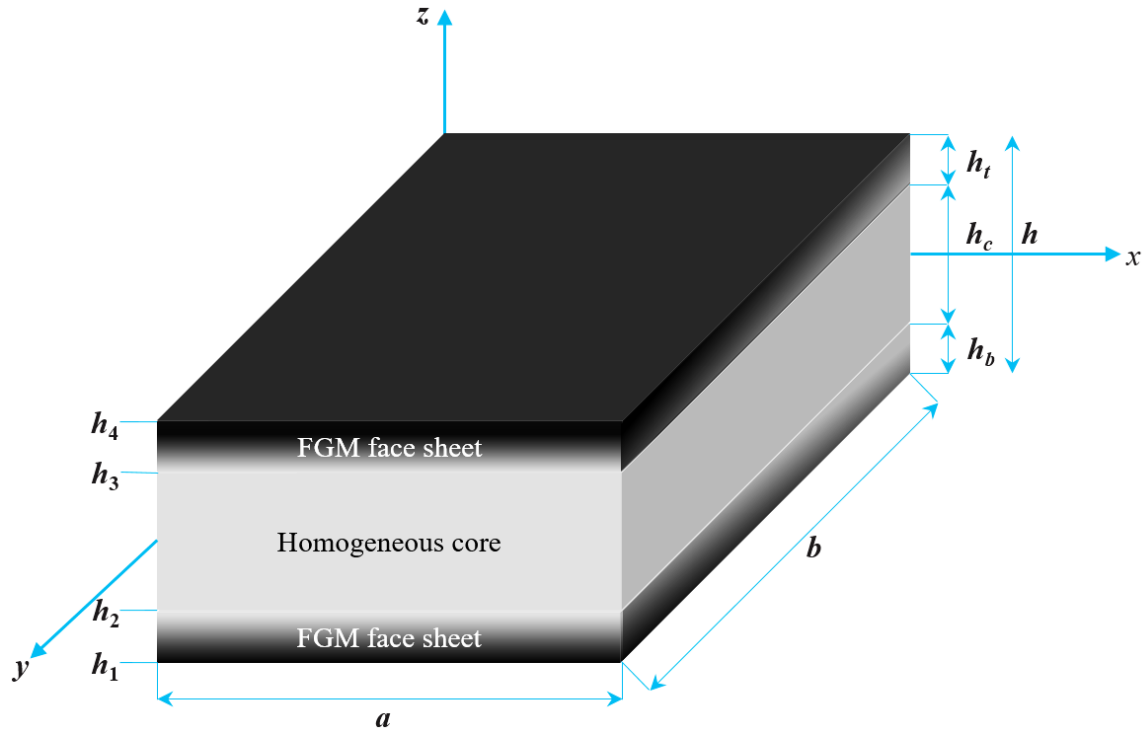


Fig.2.6 Géométrie d'une plaque sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM. (TypeC).

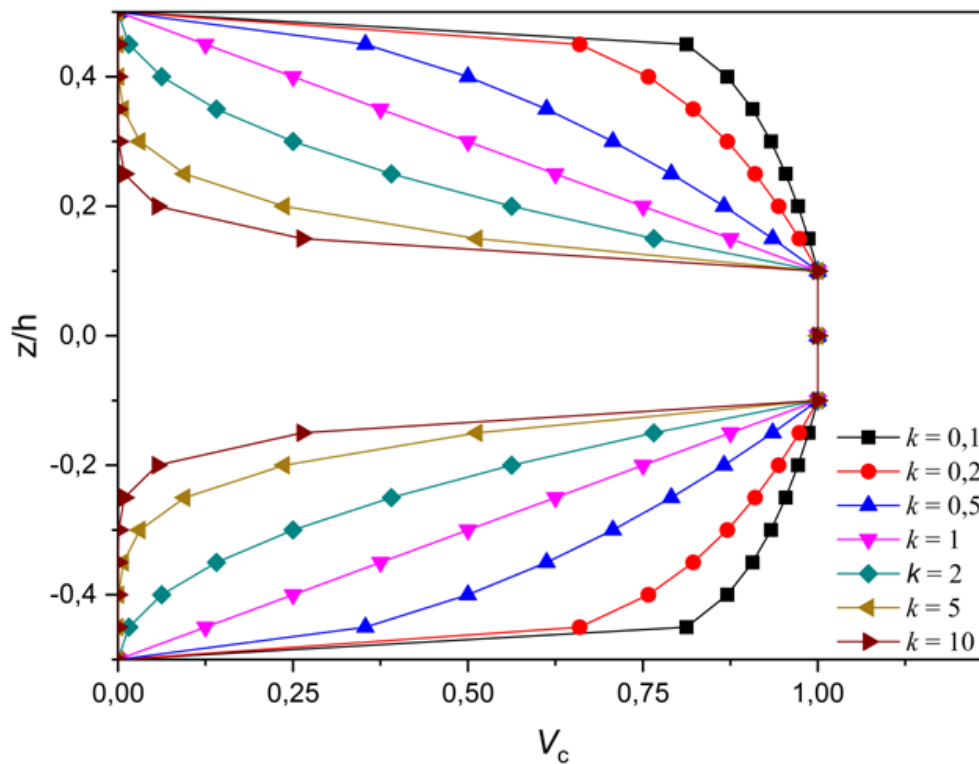


Fig.2.7 La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de  $k$  d'une plaque sandwich avec un cœur homogènes et des peaux en FGM. (TypeC).

### 2.2.2 Estimation des propriétés mécaniques

En supposant que les propriétés matérielles varient de manière continue à travers l'épaisseur en adoptant la distribution de loi de puissance, pour calculer ces propriétés. On peut utiliser la règle de mélange suivante :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2) V^{(n)} \quad (2.4)$$

Où  $P^{(n)}(z)$  représente les caractéristiques de chaque couche  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) du matériau, tel que, le module d'élasticité  $E$ , la masse volumique  $\rho$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ .  $V^{(n)}$  est la fraction volumique de chaque couche dépend du type de plaque FGM. Dans le cas du type A, les caractéristiques de la face inférieure et supérieure de la plaque ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ) sont  $P_2$  et  $P_1$ , respectivement. Dans le cas du type B, la couche 3 détient la caractéristique  $P_1$  et la couche 1 détient la caractéristique  $P_2$ . Dans le cas du type C, les caractéristiques de la face inférieure et supérieure de la couche 1 ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ) sont  $P_2$  et  $P_1$ , respectivement, tandis que pour la couche 3 ( $h_3 \leq z \leq h_4$ ), c'est l'inverse en fonction de la fraction volumique.

### 2.2.3 La cinématique du modèle layerwise utilisé.

Le modèle utilisé dans ce travail est un modèle de type layerwise proposé récemment par les auteurs pour les plaques sandwich multicouches. Le présent modèle layerwise combine deux théories :

- ✓ La théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) est employée pour modéliser les deux peaux.
- ✓ La théorie du troisième ordre (TSDT) est utilisée pour modéliser le cœur.

Ces deux théories combinées, satisfont les exigences de continuités des déplacements inter laminaires ainsi que les conditions de compatibilité.

#### 2.2.3.1 Champ de déplacement de la couche centrale (cœur)

La théorie TSDT, utilisée pour modéliser le cœur, est capable de donner une distribution parabolique pour les contraintes de cisaillement transversales sans recours à des facteurs de corrections. Selon la théorie TSDT, le champ de déplacement ( $u, v, w$ ) est s'exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}
u_c &= u_0 + z\psi_x^c + z^2\eta_x^c + z^3\zeta_x^c \\
v_c &= v_0 + z\psi_y^c + z^2\eta_y^c + z^3\zeta_y^c \\
w_c &= w_0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont, respectivement, les déplacements dans les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  au plan moyen de la plaque sandwich.  $\psi_x^c$  et  $\psi_y^c$  sont, respectivement, les rotations du premier ordre de la section autour des axes  $y$  et  $x$ . Les rotations  $\eta_x^c$ ,  $\eta_y^c$ ,  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  sont des termes d'ordre supérieur, où  $\eta_x^c$  et  $\eta_y^c$  représentent les termes du second ordre (courbure) et  $\zeta_x^c$  et  $\zeta_y^c$  représentent les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

### 2.1.1.1.1 Relations cinématiques de la couche centrale

On peut exprimer les relations entre la déformation et le déplacement comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^c &= \varepsilon_x^{(0)} + z\chi_x^{(1)} + z^2\chi_x^{(2)} + z^3\chi_x^{(3)} \\
\varepsilon_{yy}^c &= \varepsilon_y^{(0)} + z\chi_y^{(1)} + z^2\chi_y^{(2)} + z^3\chi_y^{(3)} \\
\gamma_{xy}^c &= \gamma_{xy}^{(0)} + z\chi_{xy}^{(1)} + z^2\chi_{xy}^{(2)} + z^3\chi_{xy}^{(3)} \\
\gamma_{yz}^c &= \gamma_{yz}^{(0)} + z\chi_{yz}^{(1)} + z^2\chi_{yz}^{(2)} \\
\gamma_{xz}^c &= \gamma_{xz}^{(0)} + z\chi_{xz}^{(1)} + z^2\chi_{xz}^{(2)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(0)} &= (\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}) = \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\
\chi^{(1)} &= (\chi_x^{(1)}, \chi_y^{(1)}, \chi_{xy}^{(1)}) = \left( \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x} \right) \\
\chi^{(2)} &= (\chi_x^{(2)}, \chi_y^{(2)}, \chi_{xy}^{(2)}) = \left( \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x} \right) \\
\chi^{(3)} &= (\chi_x^{(3)}, \chi_y^{(3)}, \chi_{xy}^{(3)}) = \left( \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y}, \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x} \right) \\
\gamma_s^{(0)} &= (\gamma_{yz}^{(0)}, \gamma_{xz}^{(0)}) = \left( \psi_y^c + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \psi_x^c + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
\chi_s^{(1)} &= (\chi_{yz}^{(1)}, \chi_{xz}^{(1)}) = (2\eta_y^c, 2\eta_x^c) \\
\chi_s^{(2)} &= (\chi_{yz}^{(2)}, \chi_{xz}^{(2)}) = (3\zeta_y^c, 3\zeta_x^c)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Il est possible d'exprimer le champ de déformation du cœur comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx} \\ \mathcal{E}_{yy} \\ \mathcal{E}_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x^{(0)} \\ \mathcal{E}_y^{(0)} \\ \mathcal{E}_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_x^{(1)} \\ \mathcal{X}_y^{(1)} \\ \mathcal{X}_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_x^{(2)} \\ \mathcal{X}_y^{(2)} \\ \mathcal{X}_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_x^{(3)} \\ \mathcal{X}_y^{(3)} \\ \mathcal{X}_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \mathcal{Y}_{yz} \\ \mathcal{Y}_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathcal{Y}_{yz}^{(0)} \\ \mathcal{Y}_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_{yz}^{(1)} \\ \mathcal{X}_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \mathcal{X}_{yz}^{(2)} \\ \mathcal{X}_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.3.2 Champ de déplacement des deux peaux :

Les deux peaux sont modélisées en utilisant la théorie du premier ordre (FSDT, et les expressions ci-dessous indiquent les termes de déplacement ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ):

$$\begin{aligned} u^{(f)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x^f(x, y) \\ v^{(f)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y^f(x, y), \quad f = t, b \\ w^{(f)}(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

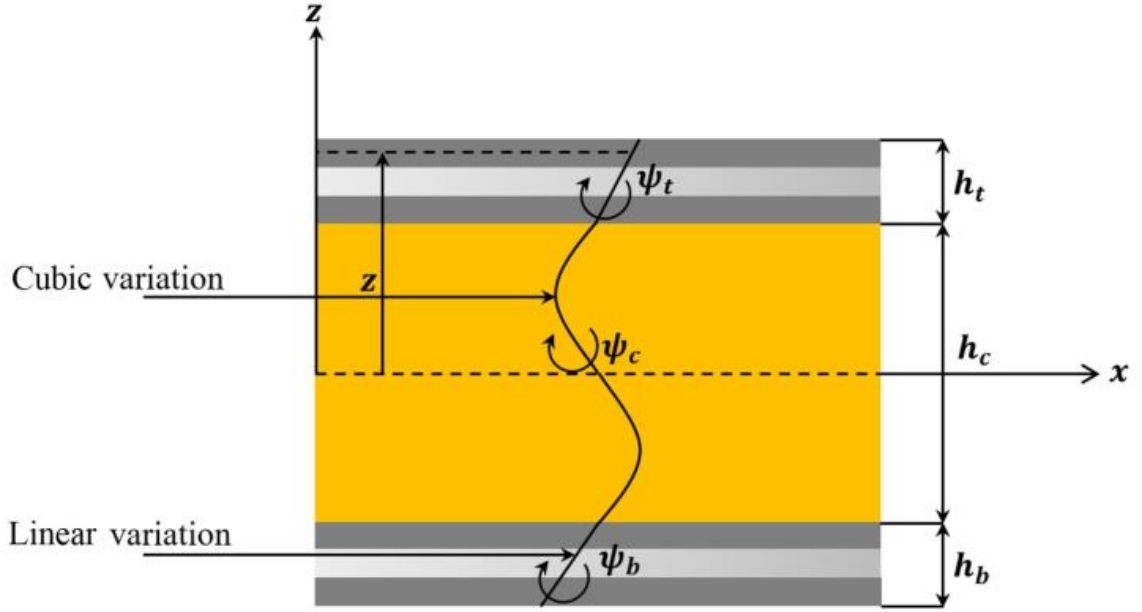
En maintenant la continuité de déplacement au niveau d'interface (Fig. 2.8), le champ de déplacement des deux peaux peut être écrit de la manière suivante :

#### a. Peau supérieure

$$\begin{aligned} u_t &= u_0 + u_c \left( \frac{h_c}{2} \right) + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^t \\ v_t &= v_0 + v_c \left( \frac{h_c}{2} \right) + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^t \\ w_t &= w_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec,

$$\begin{aligned} u_c \left( \frac{h_c}{2} \right) &= \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c \\ v_c \left( \frac{h_c}{2} \right) &= \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c \end{aligned} \quad (2.11)$$



**Fig.2.8** Cinématique du modèle layerwise utilisé.

En insérant l'expression (2.11) dans l'expression (2.10), on peut représenter l'expression de déplacement de la peau supérieure par le champ suivant:

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_x^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_x^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_x^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^t \\
 v_t &= v_0 + \left(\frac{h_c}{2}\right)\psi_y^c + \left(\frac{h_c^2}{4}\right)\eta_y^c + \left(\frac{h_c^3}{8}\right)\zeta_y^c + \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^t \\
 w_t &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

### b. Peau inférieure

D'après la Fig.2.8, on peut écrire le champ de déplacement de la peau inférieure comme suit:

$$\begin{aligned}
 u_b &= u_0 + u_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_x^b \\
 v_b &= v_0 + v_c \left(-\frac{h_c}{2}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\psi_y^b \\
 w_b &= w_0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec,



$$\begin{aligned}
u_c \left( -\frac{h_c}{2} \right) &= -\left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_x^c - \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c \\
v_c \left( -\frac{h_c}{2} \right) &= -\left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_y^c - \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c
\end{aligned} \tag{2.14}$$

En insérant l'expression (2.14) dans l'expression (2.13), on peut écrire l'expression de déplacement de la peau inférieure par :

$$\begin{aligned}
u_b &= u_0 - \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_x^c - \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_x^c + \left( z + \frac{h_c}{2} \right) \psi_x^b \\
v_b &= v_0 - \left( \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \eta_y^c - \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \zeta_y^c + \left( z + \frac{h_c}{2} \right) \psi_y^b \\
w_b &= w_0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

### 2.2.3.2.1 Relations cinématiques des peaux

On peut exprimer les relations entre la déformation et le déplacement comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy}^t &= \frac{\partial v_t}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\
\gamma_{xy}^t &= \frac{\partial u_t}{\partial y} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{h_c}{2} \left( \frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x} \right) + \frac{h_c^2}{4} \left( \frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{h_c^3}{8} \left( \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x} \right) + \left( z - \frac{h_c}{2} \right) \left( \frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x} \right) \\
\gamma_{yz}^t &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^t \\
\gamma_{xz}^t &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^t
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Il est possible de présenter l'expression (2.16) sous forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m^t \\ \varepsilon_{xx}^{t(m)} \\ \varepsilon_{yy}^{t(m)} \\ \gamma_{xy}^{t(m)} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} - \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} - \left( \frac{h_c}{2} \right) \frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{h_c}{2} \left( \frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x} \right) + \frac{h_c^2}{4} \left( \frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x} \right) + \frac{h_c^3}{8} \left( \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x} \right) - \frac{h_c}{2} \left( \frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x} \right) \end{array} \right] \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f^t = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{t(f)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^{t(f)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{t(f)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x^t}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y^t}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x^t}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^t}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_c^t = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^t \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^t \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^t \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

On utilise les symboles  $m$ ,  $f$  et  $c$  pour désigner, respectivement, les termes de membrane, de flexion et de cisaillement transversal.

La relation entre la déformation et le déplacement peut écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^b &= \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(-\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^b &= \frac{\partial v_b}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(-\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^b &= \frac{\partial u_b}{\partial y} + \frac{\partial v_b}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4} \left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) \\ &\quad - \frac{h_c^3}{8} \left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \left(z + \frac{h_c}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x}\right) \\ \boldsymbol{\gamma}_{yz}^b &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^b \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^b &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^b \end{aligned} \quad (2.19)$$

On peut également subdiviser l'équation (2.15) en trois termes; membranaire, flexionnelle et cisaillement transversal comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{b(m)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^{b(m)} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{b(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_x^c}{\partial x} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_x^c}{\partial x} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c^2}{4}\right) \frac{\partial \eta_y^c}{\partial y} - \left(\frac{h_c^3}{8}\right) \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial y} + \left(\frac{h_c}{2}\right) \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c^2}{4} \left(\frac{\partial \eta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y^c}{\partial x}\right) - \frac{h_c^3}{8} \left(\frac{\partial \zeta_x^c}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_y^c}{\partial x}\right) + \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_f^b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{b(f)} \\ \varepsilon_{yy}^{b(f)} \\ \gamma_{xy}^{b(f)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x^b}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y^b}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x^b}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y^b}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \gamma_c^b = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^b \\ \gamma_{yz}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x^b \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y^b \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

## 2.2.4 Les équations constitutives

On suppose dans la présente étude que le comportement est élastique linéaire. Par conséquent, les relations contraintes-déformation pour une plaque sandwich FGM sont données comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Où  $Q_{ij}$  est la matrice des coefficients de rigidité réduite, qui sont en fonctions de la coordonnée  $z$ , définie comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \nu(z)Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

### 2.2.4.1 Les efforts résultants dans le cœur

Les efforts résultants sont engendrés dans le cœur grâce à l'intégration de contraintes sur toute l'épaisseur.

#### 2.2.4.1.1 Résultantes en membrane

On peut décrire le vecteur des résultats en membrane  $N(x, y)$  comme suit:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.23)$$

### 2.2.4.1.2 Moments de flexion et de torsion

Les moments de fléchissement et de torsion sont déterminés par:

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.24)$$

### 2.2.4.1.3 Résultantes d'ordre supérieur (second ordre)

On peut décrire le vecteur des résultats de second ordre noté  $\bar{N}(x, y)$  comme:

$$\bar{N}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \quad (2.25)$$

### 2.2.4.1.4 Résultantes d'ordre supérieur (troisième ordre)

L'expression des résultantes du troisième ordre noté  $\bar{M}(x, y)$  est donnée comme suit:

$$\bar{M}(x, y) = \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z^3 dz \quad (2.26)$$

### 2.2.4.1.5 Résultantes de cisaillement

Les résultantes de cisaillement  $V(x, y)$  est écrit comme suit:

$$V(x, y) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (2.27)$$

### 2.2.4.1.6 Résultantes de cisaillement d'ordre supérieur

Les résultantes de cisaillement d'ordre supérieur sont données comme suit:

$$\begin{bmatrix} S_x & R_x \\ S_y & R_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} (z, z^2) dz \quad (2.28)$$

En insérant les expressions (2.8) et (2.22) dans les équations des efforts résultants (Eq.2.23-2.28), on aura:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.29)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^2 \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.31)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^3 \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + [Q]z^3 \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.32)$$

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.33)$$

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z^2 \left[ [Q] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + [Q]z \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + [Q]z^2 \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \right] dz \quad (2.35)$$

Les éléments qui constituent les matrices de rigidité réduites de le cœur sont définis par :

$$\left( A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij} \right) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Q_{ij} \left( 1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 \right) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.36)$$

$$\left( A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, E_{ij}^s, F_{ij}^s \right) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} Q_{ij} \left( 1, z, z^2, z^3, z^4 \right) dz \quad (i, j = 4, 5)$$

On écrit les expressions développées des résultantes de la manière suivante:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^2 \\ \chi_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^3 \\ \chi_{yy}^3 \\ \chi_{xy}^3 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Il convient de remarquer que les matrices  $(B, D, E, F, G, H)$  sont des matrices de couplage.

Si le cœur est symétrique, les termes de couplage de même ordre seront annulés.

Les équations élaborées pour les efforts résultants au cisaillement sont rédigées de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{44} & 0 \\ 0 & B_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{44} & 0 \\ 0 & B_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^2 \\ \chi_{xz}^2 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Les équations constitutives du cœur sont écrites sous la forme contractée suivante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ \bar{N} \\ \bar{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] & [E] \\ [B] & [D] & [E] & [F] \\ [D] & [E] & [F] & [G] \\ [E] & [F] & [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \chi^{(1)} \\ \chi^{(2)} \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{Bmatrix} V \\ S \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^s] [B^s] [D^s] \\ [B^s] [D^s] [E^s] \\ [D^s] [E^s] [F^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_s^{(0)} \\ \chi_s^{(1)} \\ \chi_s^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Les expressions des résultats de la peau supérieure sont établies conformément à la théorie (FSDT), et elles sont les suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N^t \\ M^t \\ T^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t & B^t & 0 \\ B^t & D^t & 0 \\ 0 & 0 & A_c^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^t \\ \varepsilon_f^t \\ \gamma_c^t \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Où les matrices de rigidité réduites ( $A^t, B^t, D^t$ ) de la peau supérieure sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} (A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_t}{2}} Q_{ij}(z) (1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ (A_{ij}^t) &= \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c+h_t}{2}} Q_{ij}(z) dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (2.47)$$

La même chose s'applique pour la peau inférieure.

$$\begin{Bmatrix} N^b \\ M^b \\ T^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b & B^b & 0 \\ B^b & D^b & 0 \\ 0 & 0 & A_c^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m^b \\ \varepsilon_f^b \\ \gamma_c^b \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} (A_{ij}^b, B_{ij}^b, D_{ij}^b) &= \int_{-\left(\frac{h_c+h_b}{2}\right)}^{-\frac{h_c}{2}} Q_{ij}(z) (1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ (A_{ij}^b) &= \int_{-\left(\frac{h_c+h_b}{2}\right)}^{-\frac{h_c}{2}} Q_{ij}(z) dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Avec,

### 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique du comportement mécanique des structures sandwich en FGM. Cette formulation est basée sur l'approche

layerwise où la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est utilisée pour modéliser les deux peaux, tandis que la théorie du troisième ordre (TSDT) est appliquée pour modéliser le cœur. Nous avons considéré trois types de plaques sandwichs fonctionnellement gradués: une plaque FGM isotrope, une plaque sandwich avec des peaux homogènes et un cœur FG, et une plaque sandwich avec des peaux FGM et un cœur homogène. Loi de puissance P-FGM est utilisé pour estimer les propriétés mécaniques de la plaque sandwich FGM.

Sur la base de ce modèle, nous allons aborder, dans le chapitre III, la formulation d'un nouvel élément fini de forme isoparamétrique quadrilatérale pour l'analyse statique et dynamique des plaques FGM isotrope et des plaque sandwichs FGM, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques.



## **CHAPITRE 3**

# **DÉVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ÉLÉMENT FINI ISOPARAMÉTRIQUE (FEM- Q8-LW) POUR L'ANALYSE DES PLAQUES SANDWICHES FGM.**

# Chapitre 3

## Développement d'un nouvel élément fini isoparamétrique (FEM-Q8-LW) pour l'analyse des plaques sandwichs FGM

### 3.1 Introduction

La littérature bibliographique précédente montre que la majorité des chercheurs ont utilisé et proposé des modèles analytiques pour étudier le comportement des plaques/coques sandwichs FGM. Cependant, les approches analytiques étaient limitées à des géométries simples, à certains types de gradation des propriétés des matériaux (par exemple, distribution exponentielle ou loi de puissance), à des cas de chargement particuliers et à des types spécifiques de conditions aux limites. Par conséquent, les méthodes numériques ont été choisies pour analyser le comportement complexe des structures FGM. Parmi elles, la méthode des éléments finis (MEF) est la plus populaire. La MEF présente plusieurs avantages en termes de facilité de mise en œuvre de chargements complexes, de propriétés de gradation arbitraires, de conditions limites variables et de facilité de résolution.

Dans ce présent chapitre, nous allons procéder au développement d'un nouvel élément fini, bi-dimensionnelle (2D), formulé sur la base du modèle layerwise, présenté dans le chapitre précédent. L'élément développé, nommé FEM-Q8-LW, est un élément de type  $C^0$

quadrilatère isoparamétrique définit par huit nœuds et treize degré de liberté (DDL) pour chacun. Chaque nœud contient : deux DDL de rotation pour chaque peau, six DDL de rotation aussi pour le cœur, alors que les trois DDL de type translation sont communs aux trois couches. Cet élément est destiné à l'analyse statique et dynamique des plaques FGM isotrope ainsi que des plaques sandwichs FGM, qu'elles soient symétriques ou non-symétriques. Le principe du Hamilton est utilisé pour établir les équations du mouvement et de formuler la matrice de rigidité et la matrice masse de l'élément FEM-Q8-LW.

### 3.2 Formulation de l'élément FEM-Q8-LW

#### 3.2.1 Description de l'élément FEM-Q8-LW

L'élément sandwich développé dans ce chapitre est nommé FEM-Q8-LW (Finite Element Method Quadrilateral with 8-nodes Layerwise). La géométrie de l'élément FEM-Q8-LW ainsi que les variables cinématiques correspondantes sont représentées sur la figure.3.1. L'élément est défini par huit nœuds et treize DDL pour chacun. Chaque nœud possède: deux DDL de rotation pour chaque peau, six DDL de rotation aussi pour le cœur, alors que les trois DDL de type translation sont communs aux trois couches.

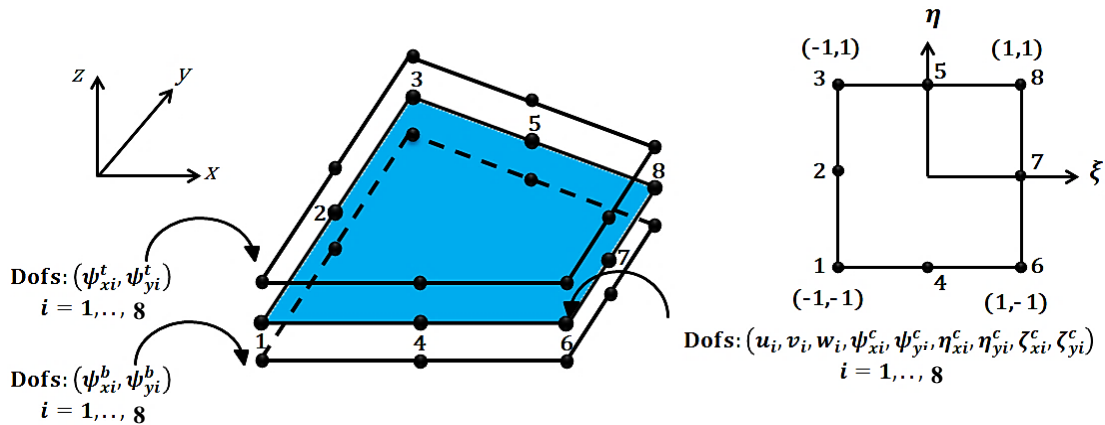


Fig.3.1 Géométrie de l'élément FEM-Q8-LW avec ses variables cinématiques nodales correspondantes

#### 3.2.2 Approximation nodale de l'élément FEM-Q8-LW

Le vecteur de déplacement nodale pour chaque nœud est exprimé par:

$$\delta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_i, \eta_i) \delta_i \quad (3.1)$$

$\delta_i = \{u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}^c, \psi_{yi}^c, \eta_{xi}^c, \eta_{yi}^c, \zeta_{xi}^c, \zeta_{yi}^c, \psi_{xi}^t, \psi_{yi}^t, \psi_{xi}^b, \psi_{yi}^b\}^T$  représente le vecteur de déplacement nodal de l'élément, où  $i$  est le numéro du nœud considéré. ( $i=1,2,3,\dots,8$ ).

Les fonctions d'interpolation classique  $N_i$  de type Lagrange sont donnés par les formules ci-dessous:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(\eta-1)(\xi+\eta+1), & N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\eta-1)(-\xi+\eta+1) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\eta+1)(\xi+\eta-1), & N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(-1+\xi)(\eta+1)(\xi-\eta+1) \\ N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2), & N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2), & N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

On peut exprimer l'approximation des variables cinématiques des trois couches comme suit :

a. Au niveau de plan médian de la plaque sandwich :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_{0i} \quad ; \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_{0i} \quad ; \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) w_{0i} \quad (3.3)$$

b. Le cœur:

$$\begin{aligned} \psi_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^c, & \psi_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^c \\ \eta_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \eta_{xi}^c, & \eta_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \eta_{yi}^c \\ \zeta_x^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \zeta_{xi}^c, & \zeta_y^c(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \zeta_{yi}^c \end{aligned} \quad (3.4)$$

c. Peau supérieure:

$$\psi_x^t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^t, \quad \psi_y^t(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^t \quad (3.5)$$

d. Peau inférieure:

$$\psi_x^b(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{xi}^b, \quad \psi_y^b(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \psi_{yi}^b \quad (3.6)$$

En n'importe quel point de coordonnées  $(x, y)$ , les dérivées des déplacements nodaux permettront d'exprimer l'approximation nodale du vecteur de déformation de le cœur (Eq.2.6-2.8) comme suit:

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\}^e &= [\mathbf{B}_\varepsilon^{(0)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \quad ; & \{\boldsymbol{\chi}^{(1)}\}^e &= [\mathbf{B}_\chi^{(1)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \\
\{\boldsymbol{\chi}^{(2)}\}^e &= [\mathbf{B}_\chi^{(2)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \quad ; & \{\boldsymbol{\chi}^{(3)}\}^e &= [\mathbf{B}_\chi^{(3)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \\
\{\boldsymbol{\gamma}_s^{(0)}\}^e &= [\mathbf{B}_{\gamma_s}^{(0)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \quad ; & \{\boldsymbol{\chi}_s^{(1)}\}^e &= [\mathbf{B}_{\chi_s}^{(1)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)} \\
& & \{\boldsymbol{\chi}_s^{(2)}\}^e &= [\mathbf{B}_{\chi_s}^{(2)}]^{(e)} \{\boldsymbol{\delta}_i\}_{(e)}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Il est facile d'obtenir les matrices  $[\mathbf{B}_\varepsilon^{(0)}]$ ,  $[\mathbf{B}_\chi^{(1)}]$ ,  $[\mathbf{B}_\chi^{(2)}]$ ,  $[\mathbf{B}_\chi^{(3)}]$ ,  $[\mathbf{B}_{\gamma_s}^{(0)}]$ ,  $[\mathbf{B}_{\chi_s}^{(1)}]$  et  $[\mathbf{B}_{\chi_s}^{(2)}]$  en dérivant les fonctions de forme, comme présenté ci-dessous :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B}_\chi^{(1)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{B}_\chi^{(2)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{B}_\chi^{(3)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{B}_{\gamma_s}^{(0)}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$[B_{z_s}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_{z_s}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour la peau supérieure, les relations entre la déformation et le déplacement nodal peuvent être décrites comme :

$$\{\varepsilon_m^t\}^e = [B_m^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\varepsilon_f^t\}^e = [B_f^t]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\gamma_c^t\}^e = [B_c^t]^e \{\delta_i\}_e \quad (3.9)$$

où

$$[B_m^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & e \frac{\partial N_i}{\partial y} & e \frac{\partial N_i}{\partial x} & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$c = \frac{h_c}{2} \quad , \quad d = \frac{h_c^2}{4} \quad , \quad e = \frac{h_c^3}{8} \quad , \quad f = -\frac{h_c}{2}$$

$$[B_f^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$[B_c^t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De façon similaire, pour la peau inférieure, les relations entre la déformation et le déplacement nodal généralisé sont donnés comme suite :

$$\{\varepsilon_m^b\}^e = [B_m^b]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\varepsilon_f^b\}^e = [B_f^b]^e \{\delta_i\}_e \quad ; \quad \{\gamma_c^b\}^e = [B_c^b]^e \{\delta_i\}_e \quad (3.11)$$

où,

$$[B_m^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & f \frac{\partial N_i}{\partial y} & f \frac{\partial N_i}{\partial x} & d \frac{\partial N_i}{\partial y} & d \frac{\partial N_i}{\partial x} & h \frac{\partial N_i}{\partial y} & h \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial y} & c \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

avec :

$$f = -\frac{h_c}{2} \quad , \quad d = \frac{h_c^2}{4} \quad , \quad h = -\frac{h_c^3}{8} \quad , \quad c = \frac{h_c}{2}$$

$$[B_f^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$[B_c^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Équation du mouvement

Dans ce travail, le principe de Hamilton est appliqué pour établir les relations de la flexion et de la vibration libre des plaques sandwich FGM. Il est donné comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - W - T) dt = 0 \quad (3.13)$$

Où  $U$  est l'énergie potentielle de déformation,  $W$  représente le travail exercé par les forces extérieures et  $T$  est l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation interne ( $\delta U$ ) de la plaque sandwich FGM est la somme de la contribution des deux faces et de le cœur comme suit :

$$\delta U = \delta U_c + \delta U_t + \delta U_b \quad (3.14)$$

Où

$$\delta U = \int_{V_c} (\sigma^{(c)})^T \delta \varepsilon^{(c)} dv_c + \int_{V_t} (\sigma^{(t)})^T \delta \varepsilon^{(t)} dv_t + \int_{V_b} (\sigma^{(b)})^T \delta \varepsilon^{(b)} dv_b \quad (3.15)$$

On peut écrire l'Eq. 3.15 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{A_c} \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \left( \sigma_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx}^c + \sigma_{yy}^c \delta \varepsilon_{yy}^c + \sigma_{xy}^c \delta \varepsilon_{xy}^c + \sigma_{xz}^c \delta \varepsilon_{xz}^c + \sigma_{yz}^c \delta \varepsilon_{yz}^c \right) dz dA_c \\ & + \int_{A_t} \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2} + h_t} \left( \sigma_{xx}^t \delta \varepsilon_{xx}^t + \sigma_{yy}^t \delta \varepsilon_{yy}^t + \sigma_{xy}^t \delta \varepsilon_{xy}^t + \sigma_{xz}^t \delta \varepsilon_{xz}^t + \sigma_{yz}^t \delta \varepsilon_{yz}^t \right) dz dA_t \\ & + \int_{A_b} \int_{-\left(\frac{h_c}{2} + h_b\right)}^{-\frac{h_c}{2}} \left( \sigma_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b + \sigma_{yy}^b \delta \varepsilon_{yy}^b + \sigma_{xy}^b \delta \varepsilon_{xy}^b + \sigma_{xz}^b \delta \varepsilon_{xz}^b + \sigma_{yz}^b \delta \varepsilon_{yz}^b \right) dz dA_b \end{aligned} \quad (3.16)$$

Le travail effectué par la charge statique transversale externe d'intensité  $f(x, y)$  sur le  $j^{\text{ème}}$  élément est donné comme suit :

$$\delta W = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \delta w \det(J) d\xi d\eta \quad (3.17)$$

Pour l'analyse du comportement dynamique de la plaque sandwich FGM, la variation de l'énergie cinétique peut être exprimée comme suit :

$$\delta T = \delta T_t + \delta T_c + \delta T_b \quad (3.18)$$

On peut écrire l'Eq. (3.18) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{V_t} \rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t) dV_t + \int_{V_c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{v}_c \delta v_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dV_c \\ & + \int_{V_b} \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \ddot{v}_b \delta v_b + \ddot{w}_b \delta w_b) dV_b \end{aligned} \quad (3.19)$$

Où

$u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$  représentent les composantes du vecteur de déplacement pour les trois couches du sandwich ( $i=t, c, b$ ).  $\rho_i$  et  $V_i$  représentent, respectivement, la densité du matériau et le volume de chaque couche du sandwich ( $i=t, c, b$ ); et ( $\ddot{\cdot}$ ) est une dérivée seconde par rapport au temps.



Selon le champ de déplacement de le cœur qui est défini par l'équation (2.5), l'énergie cinétique de le cœur peut exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\delta T_c = \int_{\Omega_0} & \left[ I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) + I_1 (\ddot{u}_0 \delta \psi_x^c + \dot{\psi}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \psi_y^c + \dot{\psi}_y^c \delta v_0) \right. \\
& + I_2 (\ddot{u}_0 \delta \eta_x^c + \dot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \eta_y^c + \dot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta v_0) \\
& + I_3 (\ddot{u}_0 \delta \zeta_x^c + \dot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta \zeta_y^c + \dot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta v_0) \\
& + I_4 (\dot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^c + \dot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^c) \\
& \left. + I_5 (\ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\zeta}_x^c \delta \eta_x^c + \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \eta_y^c) + I_6 (\ddot{\zeta}_x^c \delta \zeta_x^c + \ddot{\zeta}_y^c \delta \zeta_y^c) \right] dx dy
\end{aligned} \quad (3.20)$$

Où les moments d'inerties  $I_i = (0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ et } 6)$  de le cœur sont donnés par:

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \rho_c (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (3.21)$$

Pour la peau supérieure, l'expression de l'énergie cinétique est donnée comme suit:

$$\begin{aligned}
\delta T_t = \int_{\Omega_0} & \left[ I_{0t} \left( \ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_x^c + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^t \right. \right. \\
& + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_y^c + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^t + \ddot{w}_0 \delta w_0 \left. \right) \\
& + I_{0t} \left( \left( \frac{h_c}{2} \right) \dot{\psi}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \dot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \dot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \dot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \dot{\psi}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& + \left( \frac{h_c}{2} \right) \dot{\psi}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \dot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \dot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \dot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \dot{\psi}_y^c \delta \psi_y^t \left. \right) \\
& + I_{0t} \left( \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& \left. + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^t \right)
\end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
& +I_{0t} \left( \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^t \right) \\
& +I_{0t} \left( \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right) \\
& +I_{1t} \left( \ddot{u}_0 \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^t + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^t + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \ddot{v}_0 \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^t + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^t + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right) \\
& +I_{1t} \left( \ddot{\psi}_x^t \delta u_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t \right. \\
& \quad \left. + \ddot{\psi}_y^t \delta v_0 + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right) \\
& +I_{2t} \left( \ddot{\psi}_x^t \delta \psi_x^t + \ddot{\psi}_y^t \delta \psi_y^t \right) \Big] dx dy
\end{aligned}$$

Où les moments d'inerties  $I_{it} = (0, 1 \text{ et } 2)$  de la peau supérieure, sont exprimés par:

$$(I_{0t}, I_{1t}, I_{2t}) = \int_{\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2} + h_t} \rho_t (1, z, z^2) dz \quad (3.23)$$

De la même façon pour la peau inférieure, en utilisant l'équation du champ de déplacement (2.15), on peut formuler l'énergie cinétique comme suite :

$$\begin{aligned}
\delta T_b = & \int_{\Omega_0} \left[ I_{0b} \left( \ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_x^c + \ddot{u}_0 \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_x^c + \ddot{u}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_x^b \right. \right. \\
& + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \delta \eta_y^c + \ddot{v}_0 \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \delta \zeta_y^c + \ddot{v}_0 \left( \frac{h_c}{2} \right) \delta \psi_y^b + \ddot{w}_0 \delta w_0 \left. \right) \\
& + I_{0b} \left( \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^b \right. \\
& + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& + I_{0b} \left( \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^b \right. \\
& + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& + I_{0b} \left( \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta u_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \eta_x^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \zeta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^b \right. \\
& + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta v_0 + \left( \frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^c + \left( -\frac{h_c^5}{32} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \eta_y^c + \left( \frac{h_c^6}{64} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \zeta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& + I_{0b} \left( \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta u_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
& + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta v_0 + \left( -\frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^4}{16} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& + I_{1b} \left( \ddot{u}_0 \delta \psi_x^b + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^c \delta \psi_x^b + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_x^c \delta \psi_x^b + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_x^c \delta \psi_x^b + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
& + \ddot{v}_0 \delta \psi_y^b + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^c \delta \psi_y^b + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\eta}_y^c \delta \psi_y^b + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\zeta}_y^c \delta \psi_y^b + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& + I_{1b} \left( \ddot{\psi}_x^b \delta u_0 + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \eta_x^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \zeta_x^c + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b \right. \\
& + \ddot{\psi}_y^b \delta v_0 + \left( -\frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^c + \left( \frac{h_c^2}{4} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \eta_y^c + \left( -\frac{h_c^3}{8} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \zeta_y^c + \left( \frac{h_c}{2} \right) \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \left. \right) \\
& \left. + I_{2b} \left( \ddot{\psi}_x^b \delta \psi_x^b + \ddot{\psi}_y^b \delta \psi_y^b \right) \right] dx dy \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Où les moments d'inerties  $I_{ib} = (0,1 \text{ et } 2)$  de la peau inférieure, sont exprimés par:

$$(I_{0b}, I_{1b}, I_{2b}) = \int_{-\left(\frac{h_c}{2} + h_b\right)}^{\frac{h_c}{2}} \rho_b (1, z, z^2) dz \quad (3.25)$$

Pour l'analyse statique linéaire, l'équation d'équilibre peut être exprimée comme suit :

$$[K_e] \{\delta_e\} = \{f_e\} \quad (3.26)$$

$\{f_e\}$  et  $[K_e^{(c)}]$  représentent, respectivement, le vecteur force et la matrice de rigidité élémentaire de la plaque sandwich FGM.

Pour le problème de la vibration libre, le travail effectué par des forces externes et l'amortissement sont négligés. Par conséquent, le principe de Hamilton (Eq. 3.13) conduit à l'équation d'équilibre dynamique du système comme suit :

$$[M_e] \{\ddot{\delta}\} + [K_e] \{\delta\} = 0 \quad (3.27)$$

Où  $[M_e]$  représente la matrice de masse élémentaire totale et  $[K_e]$  est la matrice de rigidité élémentaire totale de la plaque sandwich FGM. Ils sont calculés numériquement en utilisant l'intégration du Gauss (2×2).  $\{\delta\}$  et  $\{\ddot{\delta}\}$  représentent, respectivement, le vecteur des variables nodales et le vecteur d'accélération nodale du système défini au temps  $t$ .

La matrice de rigidité élémentaire totale  $[K_e]$  de l'élément FEM-Q8-LW est la somme des matrices de rigidités de chaque couche (top, cœur, bottom). Elle est exprimée comme suit :

$$[K_e^T] = [K_e^{(t)}] + [K_e^{(c)}] + [K_e^{(b)}] \quad (3.28)$$

La matrice de rigidité élémentaire des deux peaux est donnée comme suit :

#### a. Peau supérieure

$$[K_e^{(t)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \underbrace{[B_m^t]^T [A^{(t)}] [B_m^t]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m^t]^T [B^{(t)}] [B_f^t]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f^t]^T [B^{(t)}] [B_m^t]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\ \left. + \underbrace{[B_f^t]^T [D^{(t)}] [B_f^t]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c^t]^T [A_c^{(t)}] [B_c^t]}_{\text{cisaillement}} \right) \det(J) d\xi d\eta \quad (3.29)$$

### b. Peau inférieure

$$\begin{aligned}
 [K_e^{(b)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left( \underbrace{[B_m^b]^T [A^{(b)}] [B_m^b]}_{\text{membranaire}} + \underbrace{[B_m^b]^T [B^{(b)}] [B_f^b]}_{\text{couplage membrane-flexion}} + \underbrace{[B_f^b]^T [B^{(b)}] [B_m^b]}_{\text{couplage flexion-membrane}} \right. \\
 & \left. + \underbrace{[B_f^b]^T [D^{(b)}] [B_f^b]}_{\text{flexionnelle}} + \underbrace{[B_c^b]^T [A_c^{(b)}] [B_c^b]}_{\text{cisaillement}} \right) \det(J) d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pour le cœur, la matrice de rigidité élémentaire est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 [K_e^{(c)}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left( [B_\varepsilon^{(0)}]^T [A] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [B] [B_\chi^{(1)}] + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [D] [B_\chi^{(2)}] \right. \\
 & + [B_\varepsilon^{(0)}]^T [E] [B_\chi^{(3)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [B] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [D] [B_\chi^{(1)}] \\
 & + [B_\chi^{(1)}]^T [E] [B_\chi^{(2)}] + [B_\chi^{(1)}]^T [F] [B_\chi^{(3)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [D] [B_\varepsilon^{(0)}] \\
 & + [B_\chi^{(2)}]^T [E] [B_\chi^{(1)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [F] [B_\chi^{(2)}] + [B_\chi^{(2)}]^T [G] [B_\chi^{(3)}] \\
 & + [B_\chi^{(3)}]^T [E] [B_\varepsilon^{(0)}] + [B_\chi^{(3)}]^T [F] [B_\chi^{(1)}] + [B_\chi^{(3)}]^T [G] [B_\chi^{(2)}] \\
 & + [B_\chi^{(3)}]^T [H] [B_\chi^{(3)}] + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [A^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [B^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
 & + [B_{\gamma_s}^{(0)}]^T [D^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [B^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [D^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
 & + [B_{\chi_s}^{(1)}]^T [E^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [D^s] [B_{\gamma_s}^{(0)}] + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [E^s] [B_{\chi_s}^{(1)}] \\
 & \left. + [B_{\chi_s}^{(2)}]^T [F^s] [B_{\chi_s}^{(2)}] \right) \det(J) d\xi d\eta
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

La matrice de masse élémentaire totale  $[M_e]$  de la plaque sandwich FGM est la somme des matrices de masses de chaque couche (peau supérieure, cœur, peau inférieure). Elle est exprimée comme suit :

$$[M_e] = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [N]^T [m^{(t)}] [N] + [N]^T [m^{(c)}] [N] + [N]^T [m^{(b)}] [N] \right) \det(J) d\xi d\eta \quad (3.32)$$

$[m^{(t)}]$ ,  $[m^{(c)}]$  et  $[m^{(b)}]$  représentent, respectivement, les matrices de masse de la peau supérieure, du cœur et de la peau inférieure, qui comportent des termes d'inertie.  $[N]$  représente la matrice d'interpolation de l'élément qui est exprimée par:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & & & & & & & & \\ & N_i & & & & & & & \\ & & N_i & & & & & & \\ & & & N_i & & & & & \\ & & & & N_i & & & & \\ & & & & & N_i & & & \\ & & & & & & N_i & & \\ & & & & & & & N_i & \\ & & & & & & & & N_i \\ & & & & & & & & & N_i \end{bmatrix}, \quad i = 1 \text{ à } 8 \quad (3.33)$$

Maintenant, après avoir évalué les matrices de rigidité et de masse pour tous les éléments de la plaque sandwich, les équations de mouvement pour l'analyse des vibrations libres de la plaque sandwich FGM peuvent être établies sous la forme de problème aux valeurs propres généralisées comme suit :

$$[K_T]\{\chi\} - \omega^2 [M_T]\{\chi\} = 0 \quad (3.34)$$

Où  $\omega$  est la fréquence naturelle associée au mode  $i$  et  $\{\chi\}$  sont les modes de vibration de la plaque sandwich FGM.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation d'un nouvel élément fini 2D quadrilatère isoparamétrique  $C^0$  nommé FEM-Q8-LW (**F**inite **E**lement **M**ethod **Q**uadrilateral with **8**-nodes based on **L**ayerwise). L'élément développé est contient huit nœuds avec possédant treize degrés de liberté pour chacun. La formulation de cet élément est basée sur le modèle layerwise présenté dans le chapitre deux. L'élément fini proposé est conçu pour l'analyse statique et dynamique des plaques isotrope FGM et des plaques sandwichs FGM. La validation de l'élément FEM-Q8-LW en termes de précision et de rapidité de convergence sera testée dans le chapitre suivant pour différents exemples.

## CHAPITRE 4

### RÉSULTATS ET VALIDATION NUMÉRIQUE DE L'ÉLÉMENT FEM-Q8-LW

# Chapitre 4

## Résultats et validation numérique de l'élément FEM-Q8-LW

### 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer la performance et la robustesse de l'élément développé dans la prédiction des réponses statiques dynamiques des plaques sandwich en matériaux fonctionnellement gradués «FGM» avec diverse condition aux limites. Plusieurs configurations de plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont considérés. Les résultats obtenus sont discutés et comparés avec des modèles analytiques et numériques disponibles dans la littérature. Plusieurs exemples de comparaison et de convergence sont présentés avec des solutions d'élasticité 2D/3D et d'autres résultats numériques d'éléments finis trouvés dans la littérature. Ce chapitre porte également une étude paramétrique détaillée afin de montrer l'effet de différents paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique et dynamique des plaques sandwich FGM symétrique et non-symétrique. Les caractéristiques matérielles des plaques FGM considérées pour tous les exemples et les conditions aux limites appliquées sont illustrées, respectivement, dans les tableaux 4.1 et 4.2,

**Tableau 4. 1.** Caractéristiques des matériaux employés dans la plaque FG.

Propriétés	Métal		Céramique		
	Aluminium (Al*)	Aluminium (Al)	Alumine (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	Zircone (ZrO <sub>2</sub> -1)	Zircone (ZrO <sub>2</sub> -2)
$E$ (GPa)	70	70	380	200	151
$\nu$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
$\rho$ (Km/m <sup>3</sup> )	2702	2707	3800	5700	3000



**Tableau 4.2.** Détails de Conditions aux limites utilisées dans la présente étude.

Conditions aux limites	Abréviations	Bords retenus
Simplement appuyé	SSSS	$w_0 = \psi_x^c = \eta_x^c = \zeta_x^c = \psi_x^t = \psi_x^b = 0$ at $x = \pm \frac{a}{2}$ $w_0 = \psi_y^c = \eta_y^c = \zeta_y^c = \psi_y^t = \psi_y^b = 0$ at $y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré	EEEE	$u_0 = v_0 = w_0 = \psi_x^c = \psi_y^c = \eta_x^c = \eta_y^c = \zeta_x^c = \zeta_y^c = \psi_x^t = \psi_y^t = \psi_x^b = \psi_y^b = 0$
Simplement appuyé - Encastré	SESE	Simplement appuyé à $x = \pm a/2$ Encastré à $y = \pm b/2$
Simplement appuyé - Libre	SLSL	Simplement appuyé à $x = \pm a/2$ Libre à $y = \pm b/2$
Simplement appuyé - Encastré - Libre	SESL	Simplement appuyé à $x = \pm a/2$ Encastré à $y = -b/2$ , Libre à $y = b/2$
Simplement appuyé - Libre	SSSL	Simplement appuyé à $x = \pm a/2$ et $y = -b/2$ Libre à $y = b/2$
Simplement appuyé - Encastré	SSSE	Simplement appuyé à $x = \pm a/2$ et $y = -b/2$ Encastré à $y = b/2$

Plusieurs types de plaques sandwich FGM sont considérées pour présenter les résultats numériques.

- **Plaque sandwich en FGM (1-0-1):**

Ce genre de sandwich présente une plaque symétrique qui se compose uniquement de deux couches en FGM d'épaisseur identique. Autrement dit, Il n'y a pas de couche isotrope centrale en céramique: ( $h_1=0, h_2=0$ ), (Fig.4.1.a).

- **Plaque sandwich en FGM (1-1-1) :**

Ce genre de sandwich présente une plaque symétrique constituée de trois couches d'épaisseur identique. En cette occurrence, nous possédons: ( $h_1=-h/6, h_2=h/6$ ), (Fig.4.1.b).

- **Plaque sandwich en FGM (1-2-1) :**

Ce type de sandwich présente une plaque symétrique composée de trois couches. On peut constater que dans ce type, l'épaisseur de la couche intermédiaire est égale au double de l'épaisseur des deux couches adjacentes. Alors, ( $h_1=-h/4, h_2=h/4$ ), (Fig.4.1.c).

- **Plaque sandwich en FGM (2-1-2) :**

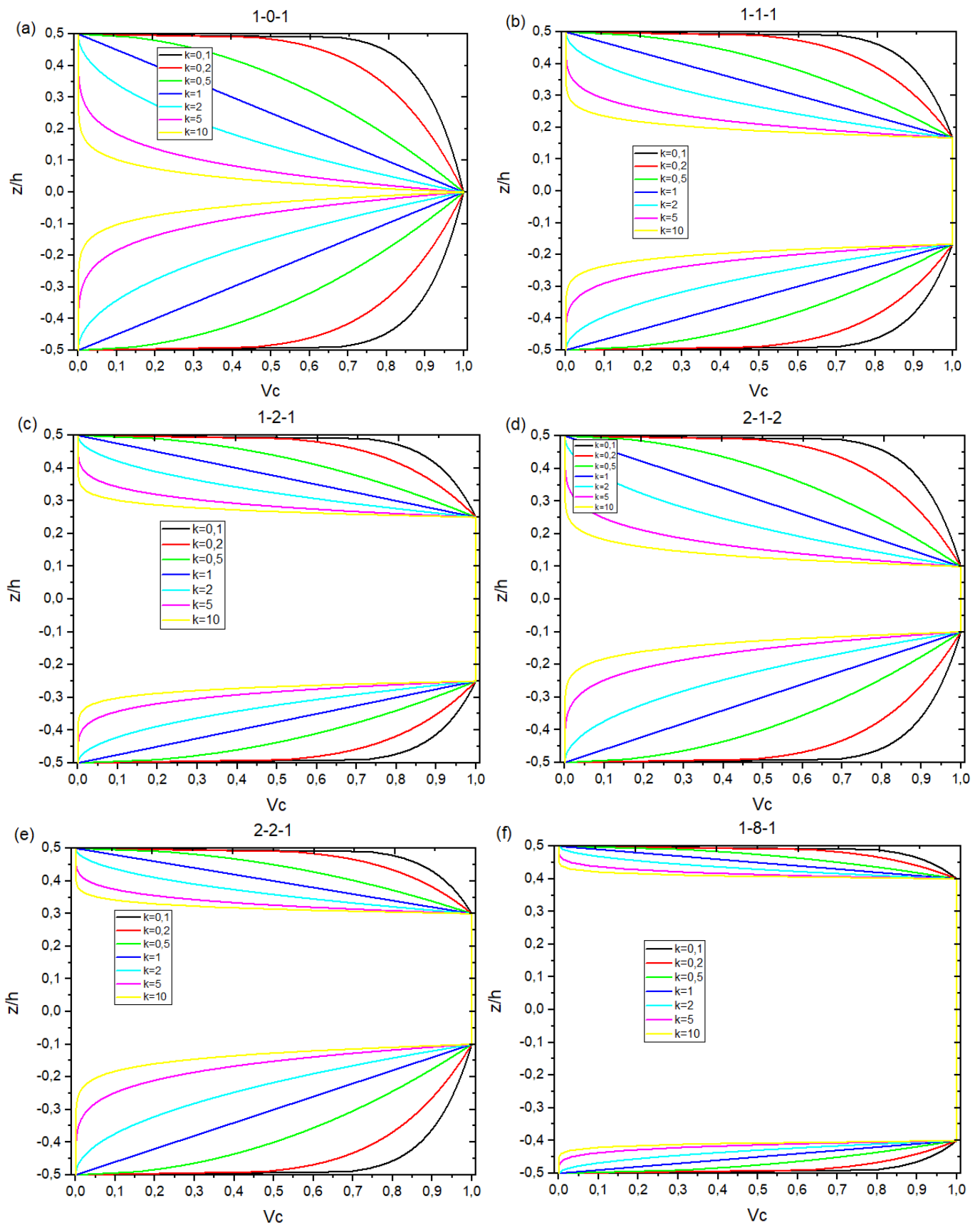
Ce type de sandwich présente une plaque symétrique composée de trois couches. On peut constater que dans ce type, l'épaisseur de la couche intermédiaire est égale à la moitié de l'épaisseur des deux couches adjacentes. Alors, ( $h_1 = -h/10$ ,  $h_2 = h/10$ ), (Fig.4.1.d).

- **Plaque sandwich en FGM (2-2-1) :**

Ce type de sandwich présente une plaque asymétrique composée de trois couches. On peut constater que dans ce type de structure, l'épaisseur de la couche de la peau supérieure est égale à la moitié de l'épaisseur des deux autres couches. Alors, ( $h_1 = -h/10$ ,  $h_2 = 3h/10$ ), (Fig.4.1.e).

- **Plaque sandwich en FGM (1-8-1) :**

Ce type de sandwich est constitué d'une plaque symétrique composée de trois couches. On peut constater que dans ce type de structure, l'épaisseur de la couche intermédiaire est égale à huit fois celle des deux couches adjacentes. Alors, ( $h_1 = -2h/5$ ,  $h_2 = 4h/5$ ), (Fig.4.1.f).



**Fig.4.1** La fraction volumique varie selon l'axe de l'épaisseur de la plaque en FGM pour divers valeurs de configurations des plaques sandwiches P-FGM.

## 4.2 Validation de l'élément dans l'analyse statique :

### Exemple 1: Test de convergence

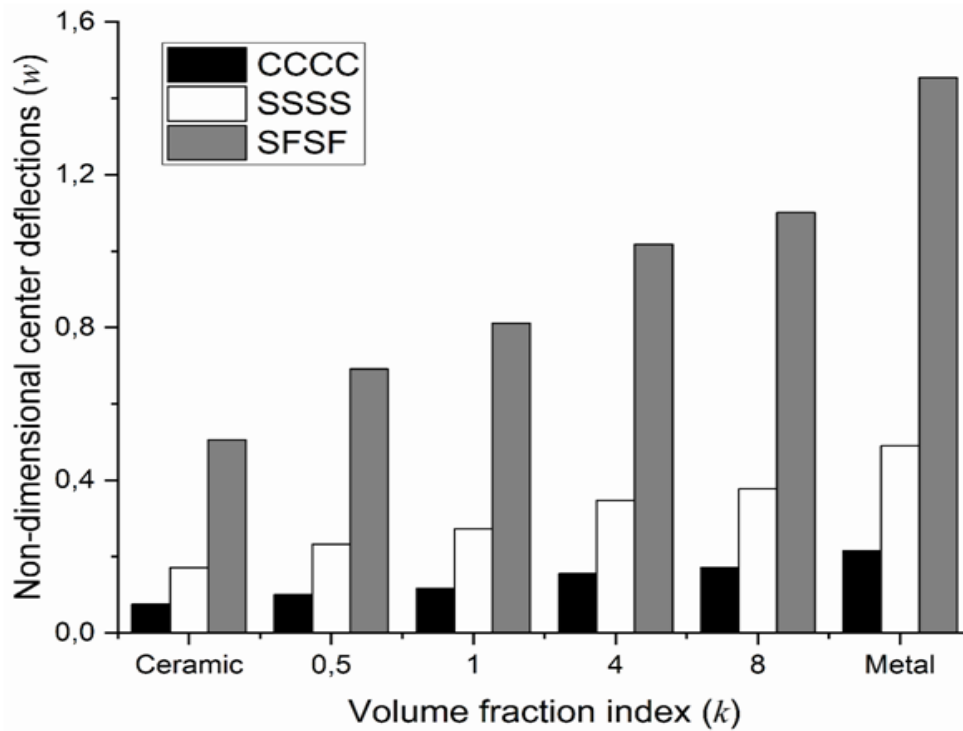
Dans le premier exemple, le test de convergence de l'élément fini développé (FEM-Q8-LW) est vérifié pour une plaque FGM carrée isotrope soumise à une charge uniformément répartie. La plaque FGM est constituée d'un mélange d'aluminium et de zircone (Al/ZrO<sub>2</sub>-1) dont leurs propriétés matérielles correspondantes sont présentées dans le tableau 4.1. La surface supérieure de la plaque FGM est riche en céramique et la surface inférieure est riche en métal. L'étude est réalisée pour différents indice de fraction volumique ( $k$ ) et de conditions aux limites avec un rapport d'épaisseur  $a/h = 5$ . La convergence de la flèche centrale adimensionnelle est rapportée dans le tableau 4.3 pour différentes tailles de maillage (4×4, 6×6 et 8×8). Les résultats obtenus sont comparés avec des modèles disponibles dans la littérature comme la méthode sans maillage de krigeage mobile (MK)[100], basée sur les théories d'ordre supérieures, telles que la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième degré (TSDT), la théorie des plaques de déformation par cisaillement exponentiel (ESDT) et la théorie des plaques de déformation par cisaillement trigonométrique inverse (ITSDT). Une autre comparaison a été faite avec des modèles EF basés sur la théorie HSDT [101]. Il est clair, pour toutes les conditions aux limites et l'indice de fraction volumique ( $k$ ), que les présents résultats sont en bon accord avec les solutions existantes, comme le montre le tableau 4.3. Ainsi, la performance de la formulation de l'élément fini développé est confirmée en termes de stabilité, de précision et de rapidité de convergence.

Par ailleurs, d'après la Fig. 4.2, on peut constater, pour toutes les conditions aux limites appliquées (SLSL, SSSS et EEEE), que l'augmentation de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) entraîne une augmentation de la flèche centrale. Ce comportement est attendu car l'indice de fraction volumique plus élevé signifie que la plaque a un composant céramique plus petit dont le module de Young est supérieur à celui du métal et par conséquent, la rigidité est réduite. De plus, il est évident que la flèche centrale diminue à mesure que la rigidité de la retenue aux limites augmente.

**Tableau 4.3.** Flèche centrale adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque carrée FGM (Al/ZrO<sub>2</sub>-1) soumise à une charge uniformément répartie avec différentes conditions aux limites ( $k$ ).

Référence	Modèles	$k$						
		Céramique	0.5	1	2	4	8	Métal
<b>conditions aux limites: SLSL</b>								
Présent Élément (4×4)	FEM-Q8-LW	0.5059*	0.6921	0.8110	0.9299	1.0186	1.1017	1.4533
Présent élément(6×6)	FEM-Q8-LW	0.5057	0.6919	0.8108	0.9296	1.0182	1.1014	1.4538
Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	0.5057	0.6919	0.8108	0.9295	1.0182	1.1013	1.4537
Gilhooley et al. [101]	HOSNDPT	0.5019	0.7543	0.8708	0.9744	-	-	1.4345
Nguyen et al. [100]	MK-TSDT	0.5098	0.7621	0.8793	0.9846	1.0717	1.1602	1.4563
	MK-ESDT	0.5089	0.7613	0.8791	0.9845	1.0714	1.1587	1.4553
	MK-ITSdT	0.5088	0.7609	0.8781	0.9840	1.0703	1.1576	1.4544
<b>conditions aux limites: SSSS</b>								
Présent élément(4×4)	FEM-Q8-LW	0.1705	0.2318	0.2716	0.3133	0.3467	0.3768	0.4899
Présent élément(6×6)	FEM-Q8-LW	0.1705	0.2322	0.2718	0.3134	0.3468	0.3770	0.4901
Présent élément(8×8)	FEM-Q8-LW	0.1706	0.2319	0.2718	0.3135	0.3468	0.3770	0.4901
Gilhooley et al. [101]	HOSNDPT	0.1671	0.2505	0.2905	0.3280	-	-	0.4775
Nguyen et al. [100]	MK-TSDT	0.1712	0.2549	0.2949	0.3326	0.3647	0.3949	0.4892
	MK-ESDT	0.1710	0.2546	0.2946	0.3325	0.3646	0.3944	0.4886
	MK-ITSdT	0.1707	0.2542	0.2942	0.3321	0.3641	0.3937	0.4878
<b>conditions aux limites: EEEE</b>								
Présent élément(4×4)	FEM-Q8-LW	0.0751	0.1000	0.1169	0.1368	0.1557	0.1724	0.2158
Présent élément(6×6)	FEM-Q8-LW	0.0750	0.0999	0.1168	0.1366	0.1554	0.1720	0.2153
Présent élément(8×8)	FEM-Q8-LW	0.0750	0.0999	0.1167	0.1366	0.1554	0.1720	0.2153
Gilhooley et al. [101]	HOSNDPT	0.0731	0.1073	0.1253	0.1444	-	-	0.2088
Nguyen et al. [100]	MK-TSDT	0.0713	0.1045	0.1219	0.1404	0.1571	0.1705	0.2036
	MK-ESDT	0.0708	0.1038	0.1212	0.1397	0.1562	0.1692	0.2022
	MK-ITSdT	0.0703	0.1032	0.1205	0.1389	0.1553	0.1680	0.2010

\* Les flèches centrales adimensionnelles sont exprimées comme:  $\bar{w} = \frac{100wE_m h^3}{12(1-\nu^2)q_0 a^4}$

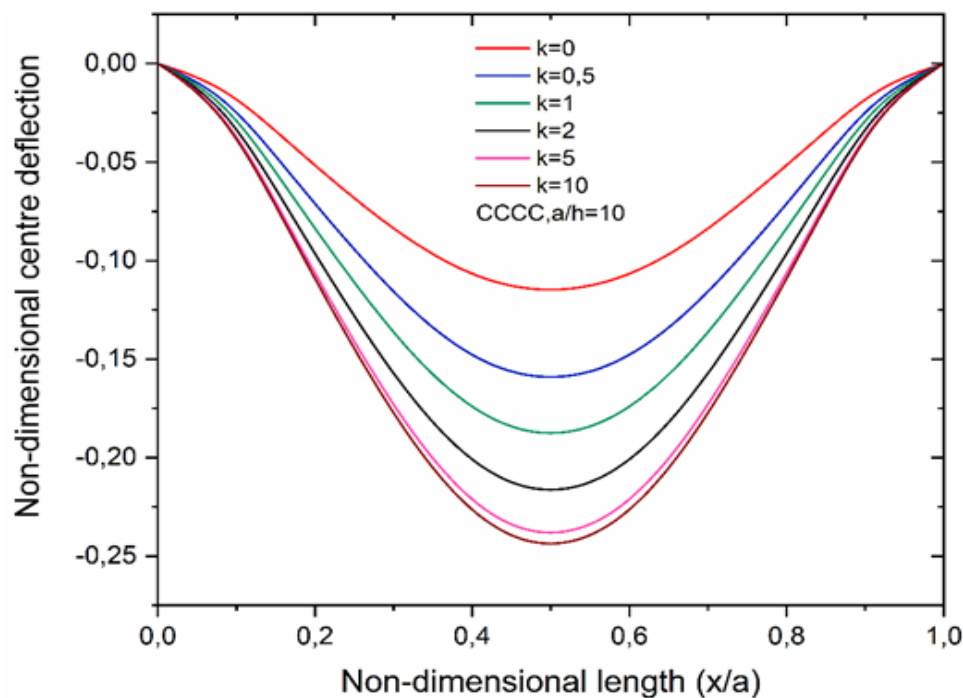


**Fig.4.2** Effets de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différentes conditions aux limites sur la flèche centrale adimensionnelle d'une plaque carrée FGM (Al/ZrO<sub>2</sub>-1) soumise à une charge uniformément répartie ( $a/h = 5$ ).

### Exemple 2 :

Cet exemple est réalisé pour une plaque sandwich FGM carrée symétrique et non-symétrique de type C. Les deux peaux sont considérées comme un matériau FGM. La peau inférieure est graduée du métal à la céramique (Al/ZrO<sub>2</sub>-2) et le cœur est en céramique pure (ZrO<sub>2</sub>-2). La plaque est encadrée dans les quatre côtés (EEEE) et soumise à une charge sinusoïdale,  $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ . Dans la présente analyse, cinq configurations symétriques et non-symétriques des plaques sandwichs ( $h_b-h_c-h_t$ : 1-0-1, 2-1-2, 1-1-1, 2-2-1), trois rapports d'épaisseur  $a/h = 5, 10$  et  $100$ ), et quatre indices de fraction volumique  $k$  (0, 1, 5, 10), sont considérés. Selon l'exemple précédent, il est évident qu'un maillage (6×6) est largement suffisant de donner une bonne convergence pour ce type de plaques. Par conséquent, cette taille de maille est utilisée dans le présent exemple. La flèche centrale adimensionnelle est présentée dans le tableau 4.4. Les présents résultats sont comparés au modèle d'élément triangulaire (MITC3) de Nguyen et al.[102] en utilisant HSDT et ceux obtenus par Pluciński et Jaśkowiec [103] en utilisant des modèles d'éléments finis 3D

(FEM23-1, ABAQUS). Un très bon accord entre les résultats est obtenu pour tous les schémas de configuration (symétrique et non-symétrique), l'indice de fraction volumique et les plaques sandwich FGM minces et épaisses. En outre, il convient de noter que l'élément développé est capable de surmonter le phénomène de verrouillage par cisaillement où il est capable de fournir d'excellents résultats pour les plaques sandwich FGM minces ( $a/h = 100$ ). La Fig.4.3 montre la variation de la flèche centrale adimensionnelle avec un indice de fraction volumique variable ( $k$ ). De plus, l'effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) sur la flèche centrale adimensionnelle pour différentes configurations des plaques sandwichs est illustré à la Fig.4.4. On peut voir que les valeurs de la flèche centrale adimensionnelle les plus faibles et les plus élevées correspondent, respectivement, à la plaque sandwich FGM (1-0-1) et (1-2-1). Pour le cas de la plaque (1-2-1), on observe que lorsque l'épaisseur du noyau augmente, la valeur de la flèche centrale adimensionnelle diminue. Cela est dû à la forte proportion de céramique qui rend la plaque plus rigide.



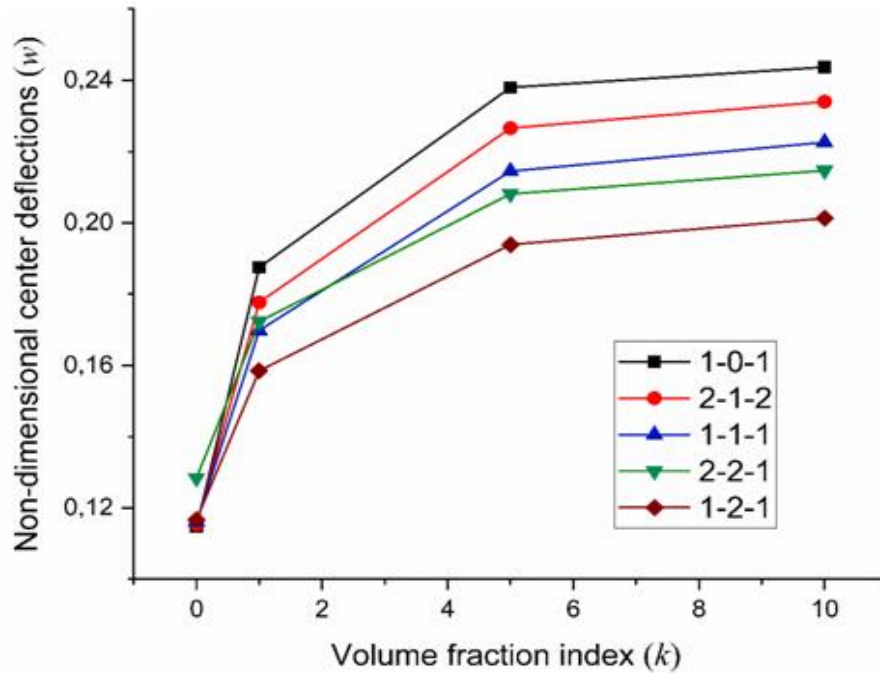
**Fig.4.3** Variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque sandwich carrée (1-0-1) FGM de type C encadrée et soumise à une charge sinusoïdale pour différents indices de fraction volumique ( $k$ ).

**Tableau 4.4.** Flèche centrales adimensionnelles ( $\bar{w}$ ) des plaques sandwichs carrées FGM (Al/ZrO<sub>2</sub>-2) encastées (type C) soumises à une charge répartie sinusoïdalement.

$a/h$	$k$	Référence	Modèles	Configuration de la plaque				
				1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
100	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0944*	0.0944	0.0944	0.0945	0.0944
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.0992	0.0992	0.0992	0.0992	0.0992
			ABAQUS	0.0994	0.0995	0.0995	0.0995	0.0995
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1561	0.1477	0.1408	0.1355	0.1306
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.1601	0.1516	0.1445	0.1389	0.1339
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.1658	0.1571	0.1497	0.1438	0.1386
			ABAQUS	0.1662	0.1576	0.1501	0.1442	0.1390
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1978	0.1891	0.1791	0.1686	0.1612
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.2025	0.1945	0.1844	0.1734	0.1661
	10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2018	0.1952	0.1859	0.1746	0.1677
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.2061	0.2005	0.1915	0.1797	0.1728
Pluciński and Jaśkowiec [103]		FEM23-1	0.2130	0.2080	0.1988	0.1864	0.1795	
		ABAQUS	0.2135	0.2083	0.1993	0.1869	0.1800	
10	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1147	0.1155	0.1161	0.1284	0.1167
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.1156	0.1156	0.1156	0.1156	0.1156
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.1159	0.1159	0.1159	0.1159	0.1159
			ABAQUS	0.1159	0.1159	0.1159	0.1159	0.1158
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1875	0.1777	0.1698	0.1723	0.1585
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.1862	0.1760	0.1679	0.1619	0.1563
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.1868	0.1766	0.1684	0.1625	0.1567
			ABAQUS	0.1868	0.1765	0.1684	0.1625	0.1567
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2380	0.2266	0.2145	0.2081	0.1939
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.2363	0.2238	0.2116	0.1996	0.1909
	10	Présent élément	Q8LW	0.2437	0.2340	0.2226	0.2147	0.2013
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.2429	0.2312	0.2196	0.2067	0.1983
Pluciński and Jaśkowiec [103]		FEM23-1	0.2446	0.2337	0.2213	0.2088	0.1993	
		ABAQUS	0.2446	0.2334	0.2212	0.2087	0.1992	
5	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1568	0.1596	0.1616	0.1919	0.1638
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.1652	0.1652	0.1652	0.1652	0.1652
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.1622	0.1622	0.1622	0.1622	0.1622
			ABAQUS	0.1622	0.1622	0.1622	0.1622	0.1622
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2455	0.2328	0.2238	0.2407	0.2116
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.2496	0.2351	0.2248	0.2182	0.2111
		Pluciński and Jaśkowiec [103]	FEM23-1	0.2451	0.2307	0.2205	0.2145	0.2070
			ABAQUS	0.2451	0.2306	0.2204	0.2144	0.2069
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.3147	0.2929	0.2758	0.2792	0.2512
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.3195	0.2935	0.2754	0.2619	0.2497
	10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.3262	0.3040	0.2860	0.2868	0.2596
		Nguyen et al. [102]	MITC3-HSDT	0.3346	0.3046	0.2856	0.2709	0.2581
Pluciński and Jaśkowiec [103]		FEM23-1	0.3326	0.3054	0.2841	0.2708	0.2546	
		ABAQUS	0.3326	0.3053	0.2839	0.2707	0.2543	

\* Les flèches centrales adimensionnelles sont exprimées comme:  $\bar{w} = 10wh^3 E_c / a^4 q_0$





**Fig.4.4** Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents configurations sur la flèche centrale adimensionnelle des plaques sandwich carrées encadrées FGM de type C ( $a/h = 10$ ).

### Exemple 3 :

Cet exemple est pour but de calculer les contraintes de cisaillement transversal adimensionnel pour une plaque sandwich FGM carrée symétrique et non-symétrique de type C. Les deux peaux sont considérées comme un matériau FGM. La peau inférieure est graduée du métal à la céramique ( $Al/ZrO_2-2$ ) et le cœur est en céramique pure ( $ZrO_2-2$ ). La plaque est simplement supportée dans les quatre côtés (SSSS) et soumise à une charge sinusoïdale,  $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ . Dans la présente analyse, cinq différents configuration symétrique et non-symétrique des plaques sandwichs ( $h_b-h_c-h_t$ : 1-0-1, 2-1-2, 1-1-1, 2-2-1, 1-2-1), cinq indices de fraction volumique  $k$  (0, 1, 2, 5, 10), et un rapport d'épaisseur  $a/h = 5$ , sont considérés. Un maillage de  $8 \times 8$  est adopté pour l'analyse. La contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle est présentée dans le tableau 4.5. Les résultats obtenus sont comparés avec des modèles disponibles dans la littérature, basée sur les théories de premier ordre et d'ordre supérieures. Les résultats de contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle sont un bon accord avec les solutions de références pour tous les schémas de configuration (symétrique et non-symétrique).

**Tableau 4.5.** Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle ( $\sigma_{xz}$ ) des plaques sandwich FGM (Type C, Al/ ZrO<sub>2</sub>-2), simplement appuyées  $a/h=10$ .

k	Référence	Modèles	$\sigma_{xz}$				
			1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0,2386	0,2387	0,2386	0,2439	0,2387
	Zenkour. [115]	SSDPT	0,2462	0,2462	0,2462	0,2462	0,2462
		TSDPT	0,2386	0,2386	0,2386	0,2386	0,2386
		FSDPT	0,1910	0,1910	0,1910	0,1910	0,1910
1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0,2549	0,2576	0,2585	0,2442	0,2578
	Zenkour. [115]	SSDPT	0,2991	0,2777	0,2681	0,2668	0,2600
		TSDPT	0,2920	0,2710	0,2612	0,2595	0,2526
		FSDPT	0,2610	0,2432	0,2326	0,2276	0,2206
2	Présent élément	FEM-Q8-LW	0,2535	0,2596	0,2627	0,2436	0,2635
	Zenkour. [115]	SSDPT	0,3329	0,2942	0,2781	0,2763	0,2654
		TSDPT	0,3262	0,2884	0,2719	0,2694	0,2583
		FSDPT	0,2973	0,2675	0,2508	0,2432	0,2326
5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0,2455	0,2554	0,2624	0,2417	0,2669
	Zenkour. [115]	SSDPT	0,3937	0,3193	0,2915	0,2890	0,2715
		TSDPT	0,3863	0,3145	0,2864	0,2827	0,2651
		FSDPT	0,3454	0,2973	0,2721	0,2610	0,2460
10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0,2411	0,2514	0,2602	0,2407	0,2672
	Zenkour. [115]	SSDPT	0,4415	0,3364	0,2953	0,2967	0,2768
		TSDPT	0,4321	0,3324	0,2957	0,2908	0,2690
		FSDPT	0,3728	0,3132	0,2830	0,2700	0,2526

### 4.3 Validation de l'élément dans l'analyse de la vibration libre :

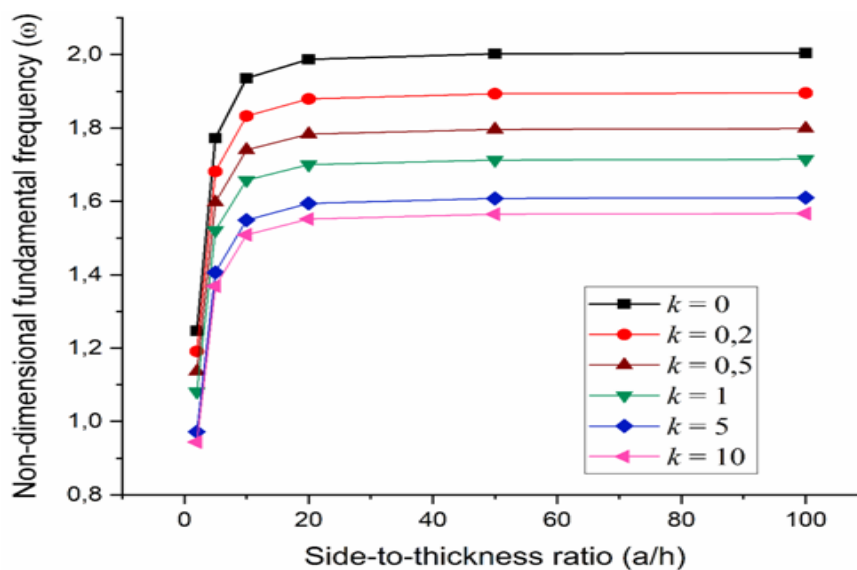
Après avoir confirmé la robustesse et la performance de l'élément fini développé (FEM-Q8-LW) dans l'analyse statique des plaques FGM isotrope et des sandwichs FGM, l'exemple suivant va porter sur la validation de l'élément proposé dans l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs fonctionnellement gradués.

#### Exemple 4 :

Dans cet exemple, la convergence du modèle d'éléments finis développé est examinée pour une plaque FGM (Al\*/ZrO<sub>2</sub>-2) carrée mince et épaisse. La plaque est simplement appuyée sur les quatre côtés. Dans la présente analyse, différents rapports d'épaisseur ( $a/h$ ) et indice de fraction volumique ( $k$ ) sont pris en compte. Les fréquences naturelles adimensionnelles sont rapportées dans le tableau 4.5 en utilisant différentes tailles de maille (4×4, 6×6 et 8×8). Les résultats obtenus sont comparés aux solutions d'élasticité 3D [104], aux résultats analytiques basés sur HSDT [105] ainsi qu'aux solutions d'éléments finis [102].

La comparaison montre que les performances de la présente formulation d'éléments finis, pour les plaques FGM minces et épaisses, sont très bonnes en termes de précision et de rapidité de convergence avec le raffinement du maillage. En effet, pour une plaque modérément épaisse ( $a/h = 10$ ), le pourcentage d'erreur maximal prédit par le présent élément par rapport à la solution d'élasticité 3D-Exact d'Uymaz et Aydogdu [104], est de 0,0287 %, 0,0181 %, 0,0939 %, 0,0000 % par rapport à l'indice de fraction volumique ( $k$ ) de 0.5, 1, 2 et 5, respectivement. Pour les plaques minces ( $a/h = 100$ ) avec  $k = 0.1$ , le pourcentage d'erreur maximal est d'environ 0,0773 % pour le présent modèle et de 0,7417 % pour le modèle de Nguyen [102] par rapport à la solution adimensionnelle 3D-exacte [104].

En outre, l'effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) et de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) sur la fréquence naturelle fondamentale est illustré à la Fig.4.5. On peut remarquer que la fréquence naturelle fondamentale augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) jusqu'à  $a/h = 20$  et varie ensuite constamment dans tous les cas. Ceci s'explique probablement par l'effet de déformation par cisaillement qui est moins important lorsque l'épaisseur diminue ( $a/h > 20$ ). Pour conclure, la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques sandwich FGM épaisses est plus sensible au rapport d'épaisseur que celui des plaques minces. De plus, en augmentant l'indice de fraction volumique ( $k$ ), la fréquence propre fondamentale diminue. Cela est dû à la réduction de la rigidité de la plaque en raison de la forte proportion du métal. Cette dernière ayant un module d'Young inférieur à celui de la céramique.



**Fig.4.5** Effet du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) avec l'indice de fraction volumique ( $k$ ) sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich carrées encastées FGM de type C.

Tableau 4.6. Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques carrées FGM (Al\*/ZrO<sub>2</sub>-2) simplement appuyées.

a/h	Référence	Modèles	k							
			0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.2476*	1.2160	1.1915	1.1366	1.0816	1.0285	0.9724	0.9449
	Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.2470	1.2148	1.1909	1.1360	1.0810	1.0279	0.9718	0.9443
	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.2470	1.2148	1.1909	1.1360	1.0810	1.0279	0.9718	0.9437
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D- Elasticité	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
	Erreur* (%)		0,9452	1,2036	1,1619	1,0798	0,9438	0,6284	0,6035	0,7363
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.2538	1.2239	1.1983	1.1412	1.0856	1.0322	0.9748	0.9468
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	1.2502	1.2210	1.1960	1.1390	1.0821	1.0268	0.9717	0.9466
5	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.7737	1.7211	1.6830	1.5991	1.5229	1.4618	1.4077	1.3703
	Présentélément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.7725	1.7199	1.6815	1.5979	1.5218	1.4606	1.4065	1.3692
	Présentélément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.7722	1.7196	1.6815	1.5976	1.5214	1.4606	1.4065	1.3692
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D- Elasticité	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
	Erreur* (%)		0,1465	0,3823	0,3910	0,3431	3,0480	0,1504	0,2907	0,1386
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.7687	1.7220	1.6827	1.5979	1.5217	1.4605	1.4059	1.3690
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	1.7782	1.7270	1.6893	1.6057	1.5293	1.4677	1.4132	1.3764
10	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.9386	1.8774	1.8341	1.7416	1.6595	1.5998	1.5505	1.5103
	Présentélément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.9371	1.8759	1.8326	1.7401	1.6580	1.5983	1.5491	1.5088
	Présentélément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.9356	1.8759	1.8326	1.7401	1.6580	1.5983	1.5491	1.5088
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D- Elasticité	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
	Erreur* (%)		0,0879	0,1544	0,1689	0,0287	0,0181	0,0939	0,0000	0,1460
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.9318	1.8785	1.8341	1.7398	1.6583	1.5986	1.5492	1.5083
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	1.9426	1.8863	1.8426	1.7488	1.6674	1.6074	1.5578	1.5168
20	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.9896	1.9263	1.8816	1.7855	1.7025	1.6434	1.5962	1.5544
	Présentélément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.9872	1.9245	1.8798	1.7837	1.7007	1.6416	1.5944	1.5526
	Présentélément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.9872	1.9239	1.8792	1.7831	1.7001	1.6416	1.5944	1.5520
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D- Elasticité	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
	Erreur* (%)		1,5432	0,1142	0,0213	0,0056	0,0118	0,0915	0,0439	0,1872
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.9821	1.9267	1.8806	1.7833	1.7004	1.6415	1.5943	1.5521
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	1.9932	1.9286	1.8822	1.7908	1.7098	1.6507	1.6032	1.5608

Tableau 4.6. Continue.

a/h	Référence	Modèles	k							
			0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
50	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	2.0080	1.9442	1.8990	1.8016	1.7181	1.6595	1.6125	1.5699
	Présentélément (6×6)	FEM-Q8-LW	2.0027	1.9389	1.8934	1.7964	1.7132	1.6546	1.6084	1.5655
	Présentélément (8×8)	FEM-Q8-LW	2.0020	1.9386	1.8931	1.7960	1.7128	1.6543	1.6080	1.5651
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D-Elasticité	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
	Erreur* (%)		0,2303	0,0206	0.0581	0,0892	0,0643	0.1271	0,1121	0,1985
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.9971	1.9410	1.8944	1.7962	1.7129	1.6543	1.6078	1.5652
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	2.0028	1.9274	1.8888	1.8001	1.7188	1.6598	1.6129	1.5700
100	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	2.0221	1.9580	1.9236	1.8147	1.7311	1.6714	1.6237	1.5804
	Présentélément (6×6)	FEM-Q8-LW	2.0057	1.9416	1.8953	1.7983	1.7162	1.6565	1.6102	1.5685
	Présentélément (8×8)	FEM-Q8-LW	2.0042	1.9401	1.8953	1.7983	1.7147	1.6565	1.6102	1.5670
	Uymaz and Aydogdu [104]	3D-Elasticité	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652
	Erreur* (%)		0,3404	0,0773	0.1744	0,0612	0,1753	0.0785	0,2490	0,1150
	Belkhodja et al. [105]	HSDT	1.9993	1.9431	1.8964	1.7981	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	Nguyen et al. [106]	MITC3-HSDT	2.0050	1.9272	1.8885	1.7999	1.7188	1.6599	1.6132	1.5704

\*Erreur = [(Présent résultat - Exacte-3D [104]) / Exacte-3D [104]] × 100

\*Les fréquences naturelles sont exprimées en:  $\bar{\omega} = \frac{\omega ab}{\pi^2 h} \sqrt{12(1-\nu^2) \frac{\rho_c}{E_c}}$

### Exemple 5 :

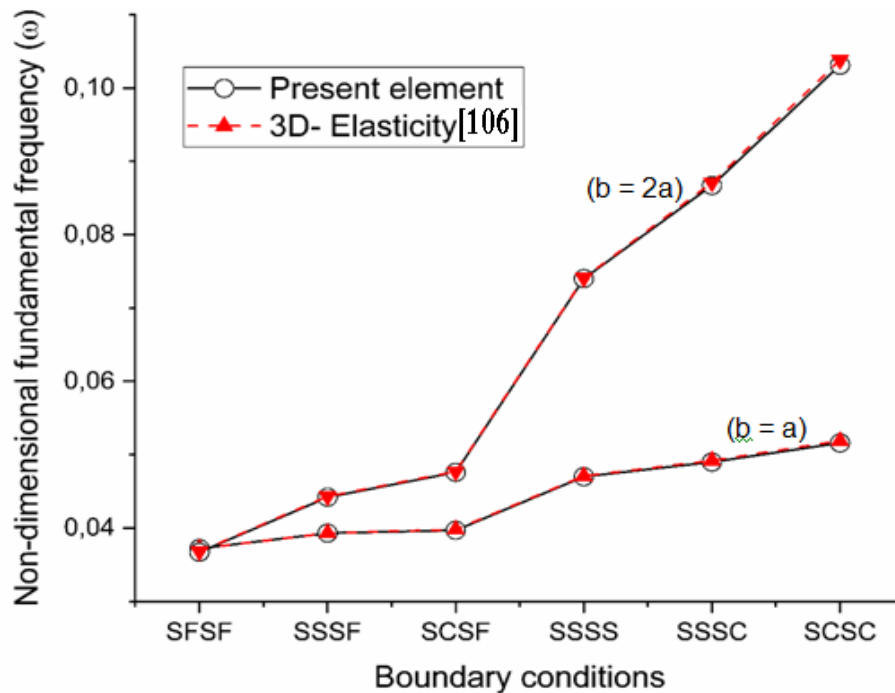
Dans le quatrième exemple, une plaque FGM rectangulaire en aluminium (Al) et en alumine ( $Al_2O_3$ ) est étudiée pour différents indices de fraction volumique et rapport d'épaisseur. Deux type de plaques carrées ( $b = a$ ) et rectangulaires ( $b = 2a$ ) sont considérées. Les résultats numériques ont été obtenus pour six combinaisons différentes de conditions aux limites symétriques (SSSS, SESE, SLSL) et asymétriques (SESL, SSSE, SSSL). Sur la base de l'étude de convergence, une taille de maillage avec  $(6 \times 6)$  éléments est suffisante pour obtenir des résultats précises. Les résultats de comparaison, présentés dans les tableaux 4.6 et la Fig.4.6, montrent la précision de l'élément développé où on peut voir clairement, pour tous les types de conditions aux limites, que les résultats obtenus par le présent modèle sont en excellent accord avec les solutions d'élasticité 3D-Exact de Jin et al. [106]. En effet, pour  $b/a = 2$ ,  $a/h = 10$  et  $k = 5$ , l'erreur maximale en pourcentage de la fréquence fondamentale dans les conditions aux limites SSSS, SESE, SFSL, SESL, SSSE et SSSL par rapport à la solution d'élasticité 3D-Exact [106] est, respectivement, de 0,2335, 0,5395, 0,0538, 0,1759, 0,3862 et 0,0000. On peut conclure que l'excellente précision de notre modèle élément fini est insensible aux conditions aux limites.

D'après la Fig.4.6, on peut observer, pour les deux type de plaques FGM carrées et rectangulaires, que les valeurs de la fréquence naturelle fondamentale les plus basses sont observées pour les conditions aux limites SSSL, SLSL et SESL, tandis que les valeurs de la fréquence naturelle fondamentale les plus élevées sont trouvées pour les conditions aux limites SESE et SSSE. En général, les valeurs de la fréquence naturelle augmentent que la rigidité de la retenue aux limites augmente.

**Tableau 4.7.** Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques rectangulaires FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) avec différentes conditions aux limites.

b/a	a/h	k	Référence	Modèles	Conditions aux limites					
					SSSS	SCSC	SFSF	SCSF	SSSC	SSSF
1	10	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1137*	0.1592	0.0563	0.0731	0.1336	0.0678
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.1135	0.1604	0.0562	0.0731	0.1339	0.0677
		1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0868	0.1225	0.0429	0.0557	0.1023	0.0517
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0870	0.1236	0.0430	0.0559	0.1029	0.0518
		2	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0787	0.1109	0.0389	0.0506	0.0927	0.0469
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0789	0.1118	0.0390	0.0507	0.0932	0.0470
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0740	0.1031	0.0367	0.0476	0.0867	0.0442	
		Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0741	0.1038	0.0368	0.0477	0.0871	0.0443	
	5	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.4163	0.5351	0.2144	0.2712	0.4707	0.2553
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.4169	0.5402	0.2141	0.2713	0.4731	0.2550
		1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.3207	0.4204	0.1642	0.2085	0.3658	0.1957
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.3222	0.4236	0.1645	0.2092	0.3681	0.1962
2		Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2895	0.3793	0.1486	0.1884	0.3300	0.1770	
		Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.2905	0.3799	0.1488	0.1889	0.3310	0.1773	
5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2673	0.3445	0.1386	0.1748	0.3023	0.1647		
	Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.2676	0.3412	0.1388	0.1749	0.3014	0.1649		
2	10	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0707	0.0792	0.0584	0.0608	0.0751	0.0601
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0719	0.0793	0.0568	0.0607	0.0751	0.0600
		1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0548	0.0604	0.0434	0.0463	0.0573	0.0458
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0550	0.0608	0.0435	0.0465	0.0575	0.0459
		2	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0498	0.0548	0.0394	0.0421	0.0520	0.0416
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0499	0.0552	0.0395	0.0422	0.0522	0.0417
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.0469	0.0516	0.0372	0.0397	0.0490	0.0393	
		Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.0471	0.0519	0.0372	0.0398	0.0492	0.0393	
	5	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2713	0.2931	0.2169	0.2304	0.2810	0.2284
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.2713	0.2941	0.2166	0.1914	0.2814	0.1914
		1	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.2081	0.2257	0.1661	0.1767	0.2159	0.1750
			Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.2088	0.2271	0.1665	0.1592	0.2169	0.1592
2		Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1883	0.20396	0.1504	0.1599	0.1952	0.1584	
		Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.1888	0.2050	0.1507	0.1438	0.1960	0.1438	
5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.1753	0.1888	0.1405	0.1492	0.1814	0.1479		
	Jin et al. [106]	3D-Élasticité	0.1754	0.1895	0.1405	0.1243	0.1817	0.1243		

\* Les fréquences naturelles sont exprimées en:  $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$



**Fig.4.6** Effet du rapport d'aspect ( $b/a$ ) avec différentes conditions aux limites sur la fréquence naturelle adimensionnelle de la plaque FGM ( $Al/Al_2O_3$ ) ( $a/h = 10$ ,  $k = 5$ ).

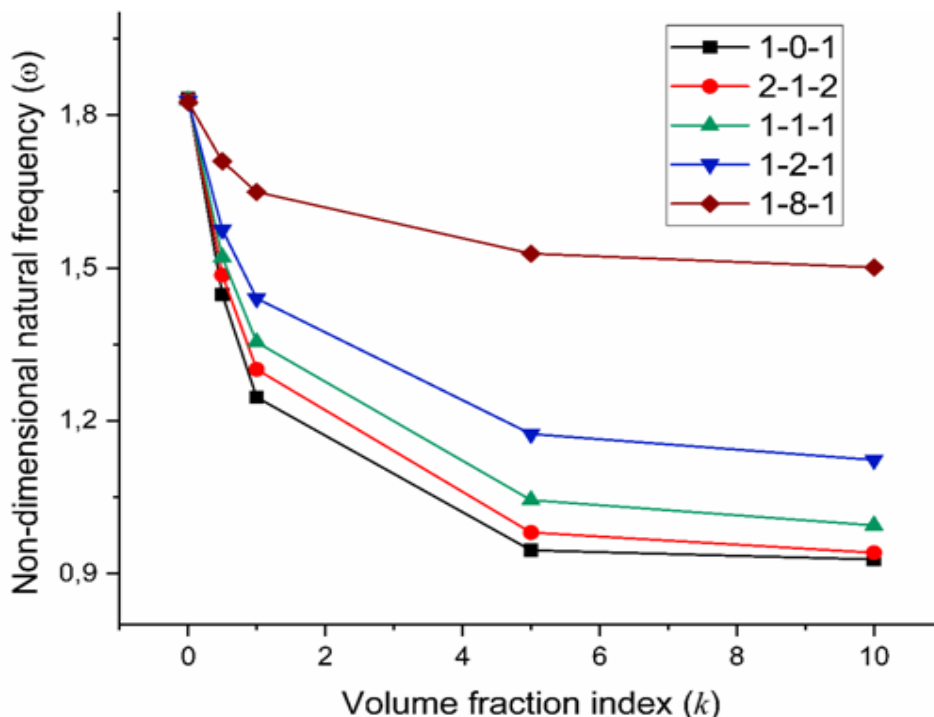
#### Exemple 6 :

Après avoir établi la performance du modèle développé pour les plaques isotrope FGM, l'analyse de la vibration libre des plaques sandwich carrées avec des peaux en FGM et un cœur homogène (Type C) est examinée dans cet exemple. La plaque est simplement appuyée sur les quatre côtés. L'analyse est réalisée pour deux cas de plaques sandwich FGM, à savoir, hardcore et softcore. Dans le cas du hardcore, la peau inférieure est graduée du métal au céramique ( $Al / Al_2O_3$ ) et le cœur est en céramique pur ( $Al_2O_3$ ). Pour le cas du softcore, la plaque est constituée du cœur en métal pure ( $Al$ ) et les surfaces supérieure et inférieure de la peau inférieure sont riches en métal et en céramique ( $Al_2O_3/Al$ ), respectivement. Les résultats calculés sont obtenus pour cinq différents configuration des plaques sandwich ( $h_b-h_c-h_f$ : 1-0-1, 2-1-2, 1-1-1, 1-2-1, 1-8- 1), trois rapports d'épaisseur  $a/h$  (5, 10, 100) et cinq indices de fraction volumique  $k$  (0, 0.5, 1, 5, 10). Un maillage de  $6 \times 6$  est adopté pour l'analyse. L'efficacité et la précision de l'élément fini développé, pour le hardcore et le softcore, sont montrées dans les tableaux 4.7 et 4.8, respectivement. D'après ces tableaux, on peut voir

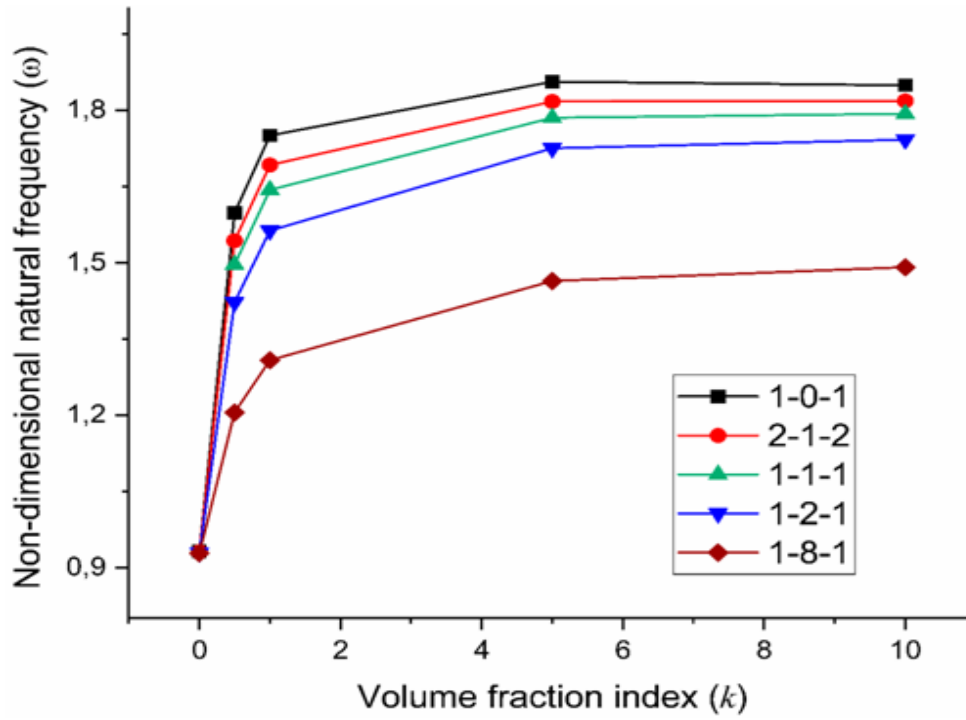


clairement que les résultats obtenus via notre modèle (FEM-Q8-LW) sont en excellent accord avec les solutions d'élasticité 3D de Li et al. [107], ainsi avec ceux trouvés via des modèles numérique comme le modèle élément fini de Pandey et Pradyumna [108], basé sur l'approche LW, et la solution sans maillage basée sur la fonction de base radiale spline de Xiang et al. [109].

On peut remarquer, à partir de ces résultats, que les fréquences fondamentales adimensionnelles, pour les plaques sandwich FGM hardcore, ont diminué avec une augmentation de l'indice de fraction volumique (voir Fig.4.7), alors que la nature opposée de la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles est observé pour les plaques sandwich FGM softcore (voir Fig.4.8). Cela est dû à la différence des paramètres de rigidité due au changement des propriétés du matériau. Il est également noté que, pour les plaques sandwich FGM hardcore, les fréquences fondamentales adimensionnelles sont maximales pour la plaque (1-8-1) et minimale pour la plaque (1-0-1), alors que pour les plaques sandwich FGM softcore, les fréquences fondamentales adimensionnelles atteignent leur maximum pour la plaque (1-0-1) et leur minimum pour la plaque (1-8-1).



**Fig.4.7** Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents configuration d'épaisseur sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich FGM hardcore ( $a/h = 10$ ).



**Fig.4.8** Effet de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) avec différents rapports d'épaisseur cœur - peau sur la fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich FGM softcore ( $a/h=10$ ).

**Tableau.4.8.** Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich carrées FGM simplement appuyées (type C), cas du hardcore.

$a/h$	$k$	Référence	Modèles	Plate configuration				
				1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
100	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.8890*	1.8890	1.8890	1.8890	1.8890
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.8882	1.8882	1.8882	1.8882	1.8882
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.4840	1.5240	1.5610	1.6200	1.7640
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.4824	1.5235	1.5604	1.6191	1.7635
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.2740	1.3310	1.3860	1.4760	1.7000
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.2715	1.3297	1.3851	1.4755	1.6990
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9650	0.9998	1.0640	1.1980	1.5710
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9656	0.9990	1.0630	1.1969	1.5698
	10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9503	0.9601	1.0130	1.1450	1.5430
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9504	0.9593	1.0123	1.1440	1.5416
10	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.8330	1.8300	1.8290	1.8270	1.8250
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268	1.8268
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.4480	1.4860	1.5210	1.5750	1.7090
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.4461	1.4860	1.5213	1.5766	1.7113
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.2460	1.3010	1.3540	1.4400	1.6490
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.2447	1.3018	1.3552	1.4413	1.6511
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9458	0.9808	1.0440	1.1740	1.5280
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9447	0.9810	1.0453	1.1756	1.5299
	10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9276	0.9410	0.9945	1.1230	1.5010
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9272	0.9407	0.9952	1.1246	1.5033
5	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.6937	1.6872	1.6822	1.6760	1.6710
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771	1.6771
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.3565	1.3900	1.4195	1.4650	1.5750
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.3535	1.3905	1.4217	1.4694	1.5810
	1	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.1747	1.2260	1.2735	1.3480	1.5245
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.1748	1.2291	1.2777	1.3534	1.5314
	5	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.8930	0.9320	0.9935	1.1125	1.4212
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.8908	0.9336	0.9979	1.1190	1.4284
	10	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.8707	0.8925	0.9465	1.0662	1.3985
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.8683	0.8922	0.9498	1.0729	1.4056

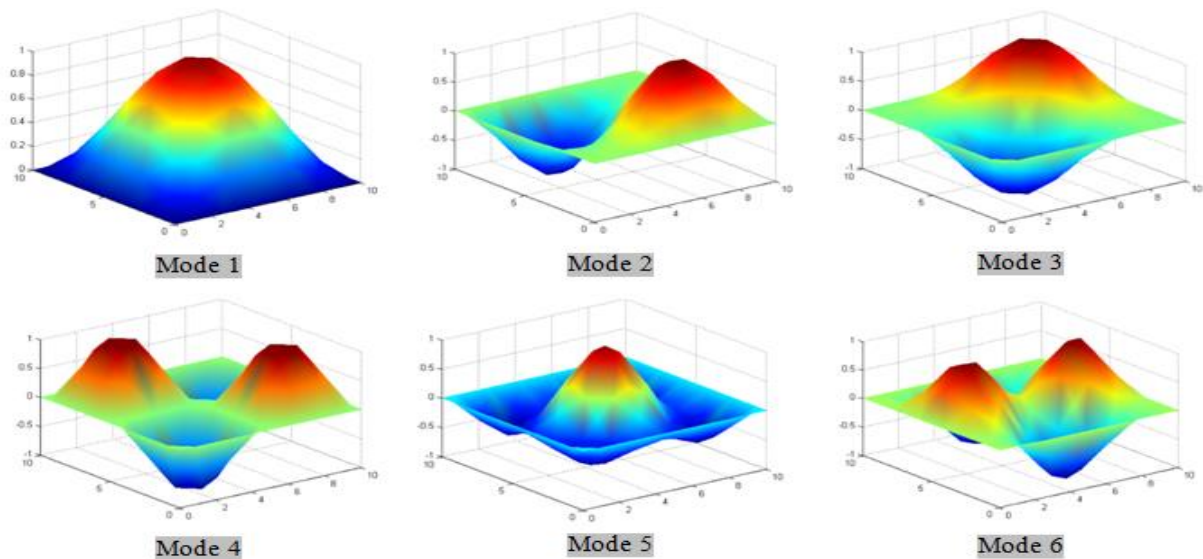
\* Les fréquences naturelles sont exprimées en:  $\bar{\omega} = \omega b^2 / h \sqrt{\rho_0 / E_0}$

**Tableau 4.9.** Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich carrées FGM simplement appuyées (type C), cas du softcore.

$a/h$	$k$	Référence	Modèles	Plate configuration				
				1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
100	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9607	0.9607	0.9607	0.9607	0.9607
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9602	0.9602	0.9602	0.9602	0.9602
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.6630	1.6240	1.5830	1.5070	1.2660
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.6628	1.6229	1.5817	1.5065	1.2655
		Pandey and Pradyumna [108]	Q8-LW	-	1.6317	1.5826	1.5073	1.2661
1	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.8210	1.7930	1.7550	1.6760	1.3840
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.8203	1.7916	1.7537	1.6749	1.3833
				Q8-LW	-	1.7926	1.7547	1.6756
5	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.9240	1.9440	1.9370	1.8860	1.5710
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.9209	1.9431	1.9362	1.8853	1.5703
				Q8-LW	-	1.9439	1.9370	1.8860
10	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.9140	1.9470	1.9510	1.9120	1.6050
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.9106	1.9468	1.9504	1.9116	1.6045
				Q8-LW	-	1.9475	1.9511	1.9123
10	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.9319	0.9308	0.9300	0.9290	0.9280
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.9289	0.9289	0.9289	0.9289	0.9289
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.5980	1.5430	1.4960	1.4220	1.2050
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.5735	1.5258	1.4845	1.4166	1.2055
		Pandey and Pradyumna [108]	Q8-LW	-	1.5430	1.4960	1.4217	1.2060
1	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.7500	1.6920	1.6430	1.5630	1.3080
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.7222	1.6743	1.6305	1.5578	1.3082
				Q8-LW	-	1.6927	1.6435	1.5636
		Xiang et al. [109]		-	1.7060	1.6647	-	1.3115
5	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.8560	1.8170	1.7850	1.7250	1.4640
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.8419	1.8261	1.7895	1.7267	1.4664
				Q8-LW	-	1.8178	1.7853	1.7250
		Xiang et al. [109]		-	1.8617	1.8469	-	1.4771
10	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.8490	1.8180	1.7930	1.7420	1.4910
		Pandey and Pradyumna [108]	3D-Élasticité	1.8402	1.8398	1.8081	1.7481	1.4948
				Q8-LW	-	1.8284	1.7928	1.7418
5	0	Présent élément	FEM-Q8-LW	0.8612	0.8580	0.8555	0.8525	0.8497
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	0.8528	0.8528	0.8528	0.8528	0.8528
	0.5	Présent élément	FEM-Q8-LW	1.4465	1.3637	1.3092	1.2387	1.0690
		Li et al. [107]	3D-Élasticité	1.3789	1.3206	1.2805	1.2258	1.0701
1	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.5850	1.4772	1.4127	1.3345	1.1430
					3D-Élasticité	1.5089	1.4332	1.3824
5	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.6952	1.5592	1.4927	1.4225	1.2450
					3D-Élasticité	1.6586	1.5801	1.5028
10	Présent élément	Li et al. [107]	FEM-Q8-LW	1.6940	1.5565	1.4922	1.4270	1.2607
					3D-Élasticité	1.6727	1.6090	1.5267

**Exemple 7 :**

Afin de déterminer les modes de vibration, une plaque sandwich FGM carrée de type C est examinée avec  $h_b-h_c-h_t = 2-1-2$ . La peau inférieure est graduée du métal au céramique ( $Al / Al_2O_3$ ) et le cœur est un matériau céramique pure ( $Al_2O_3$ ). Deux types de conditions aux limites (SSSS et EEEE), deux rapports d'épaisseur ( $a/h = 10$  et  $100$ ) et deux valeurs d'indice de fraction volumique ( $k = 1$  et  $10$ ) sont considérés dans la présente étude. Les fréquences naturelles adimensionnelles des cinq premières formes de mode sont présentées dans le Tableau 4.9. D'après l'étude de convergence, une taille de maillage avec  $8 \times 8$  éléments est suffisante pour obtenir de bons résultats. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions d'élasticité 3D [107] et ainsi ceux trouvés via des modèles numériques, tels que le modèle d'éléments finis quadrilatères à huit nœuds basé sur HSDT [110], la solution sans maillage basée sur TSDT [100] et le modèle isogéométriques (IGA) basé sur la théorie quasi-3D d'ordre supérieure (SNDT) [111]. On peut remarquer que les résultats de la comparaison concordent très bien avec les solutions d'élasticité 3D [112] et les modèles numériques disponibles dans les littératures [22-50-70]. De plus, l'élément développé est capable de surmonter le problème de verrouillage par cisaillement transversal et son excellente précision est insensible aux plaques sandwich FGM minces. Les six premières formes de mode de flexion d'une plaque sandwich FGM simplement supportée de type C sont tracées sur la Fig.4.9 pour  $a/h = 10$  et  $k = 1$ .



**Fig.4.9** Six premières formes de mode de flexion d'une plaque sandwich FGM simplement appuyée de type C. ( $a/h = 10$  et  $k = 1$ ).

**Tableau 4.10.** Cinq premières fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwichs 2-1-2.carrées FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) de type C avec deux conditions aux limites différentes.

a/h	k	Référence	Modèles	Modes					
				1	2	3	4	5	
<b>Conditions aux limites: SSSS</b>									
10	1	Présent élément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.3020	3.1930	3.1930	5.0320	6.3830	
		Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.3010	3.1610	3.1610	4.9190	6.0950	
		Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.3010	3.1550	3.1550	4.9080	6.0450	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.3018	3.1587	3.1587	4.9165	6.0404	
		Thai et al. [111]	IGA-SNDT	1.3128	3.1992	3.1992	4.9874	6.1306	
		Natarajan and Manickam [110]	FEM-Q8-HSDT	1.3019	3.1606	3.1606	4.9188	6.0586	
		Nguyen et al. [100]	MK-TSDT	1.3016	3.1484	3.1484	4.9141	5.3609	
10	10	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	0.9409	2.2900	2.2900	3.5720	4.4080	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	0.9404	2.2861	2.2861	3.5646	4.3844	
		Thai et al. [111]	IGA-SNDT	0.9625	2.3695	2.3695	3.7192	4.3937	
		Natarajan and Manickam [110]	FEM-Q8-HSDT	0.9418	2.2948	2.2948	3.5832	4.4225	
		Nguyen et al. [100]	MK-TSDT	0.9441	2.2997	2.2997	3.6119	4.3984	
100	1	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.3300	3.3270	3.3270	5.3370	6.6770	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.3297	3.3232	3.3232	5.3154	6.6428	
	10	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	0.9595	2.4010	2.4010	3.8550	4.8190	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	0.9593	2.3976	2.3976	3.8350	4.7928	
<b>Conditions aux limites: EEEE</b>									
10	1	Présent élément (4×4)	FEM-Q8-LW	2.2980	4.5830	4.5830	6.6550	8.2170	
		Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	2.2810	4.4680	4.4680	6.3600	7.6650	
		Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	2.2790	4.4510	4.4510	6.3270	7.5640	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	2.2904	4.4672	4.4672	6.3505	7.5600	
		10	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.6590	3.2570	3.2570	4.6480	5.5710
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.6607	3.2493	3.2493	4.6307	5.5217	
100	1	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	2.4430	5.0230	5.0230	7.6410	9.0630	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	2.4334	4.9581	4.9581	7.3059	8.8860	
	10	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.7670	3.6390	3.6390	5.5790	6.5680	
		Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.7557	3.5774	3.5774	5.2717	6.4120	

### Exemple 8

Après avoir étudié la vibration libre d'une plaque sandwich avec des peaux FGM, une plaque sandwich carrée simplement supportée avec un cœur FGM et des peaux homogènes (Type B) est analysée avec  $h_t-h_c-h_b = 1-8-1$  ( $h_2 = 0.8h$  et  $h_1 = h_3 = 0,1h$ ). Les peaux supérieure et inférieure sont en métal pur (Al) et en céramique (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), respectivement, tandis que la couche centrale FGM est graduée de la céramique au métal (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Al). Trois valeurs de rapport d'épaisseur ( $a/h = 5, 10, 100$ ) avec cinq indices de fraction volumique différents ( $k = 0.5, 1, 2, 5, 10$ ) sont considérées pour l'étude. Les fréquences fondamentales adimensionnelles prédites par le présent modèle par couches sont répertoriées dans le tableau 9 avec différentes tailles de maille ( $4 \times 4, 6 \times 6$  et  $8 \times 8$ ). À des fins de comparaison, les solutions d'élasticité 3D dérivées de Li et al. [107], théorie de la déformation par cisaillement

hyperbolique d'ordre supérieur (HHSDT) calculée par Bennoun, Houari et al. [113], des solutions semi-analytiques basées sur la méthode de quadrature différentielle (DQM) donnée par Alibeigloo et Alizadeh [114] ainsi que celles obtenues par Pandey et Pradyumna [108] en utilisant des solutions d'éléments finis par couche, sont réalisées. D'après le tableau 10, on peut observer que les résultats obtenus, pour tous les cas présentés, sont en excellent accord avec les valeurs rapportées dans la littérature et même plus précis que ceux prédits par les solutions analytiques de Bennoun, Houari et al. [113] en utilisant HHSDT. Par exemple, avec  $a/h = 100$ , l'erreur maximale prédite par le modèle actuel, par rapport aux solutions d'élasticité 3D exactes [107], n'est que de 0.0223 %, 0.0288 %, 0.0069 %, 0.0391 %, 0.0000 %, par rapport à l'indice de fraction volumique ( $k$ ) de 0.5, 1, 2, 5,10, alors que l'erreur maximale du modèle HHSDT [113] est de 2.3146 %, 2.1779 %, 1.6956 %, 0.9599 %, 0.5971 %. Comme prévu, la comparaison confirme la grande précision du modèle développé par couches. On peut conclure que la formulation d'éléments finis proposée est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les fréquences propres des plaques sandwich FGM. De plus, il ressort clairement du tableau 10 que la fréquence naturelle fondamentale de la plaque sandwich FGM de type B augmente lorsque les valeurs de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) passe de 0.5 à 10.

**Tableau 4.11.** Fréquence naturelle adimensionnelle ( $\bar{\omega}$ ) des plaques sandwich FGM (Type B, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Al), simplement appuyées 1-8-1.

a/h	Référence	Modèles	k				
			0.5	1	2	5	10
100	Présentélément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.3540	1.4030	1.4620	1.5490	1.6090
	Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.3400	1.3870	1.4460	1.5320	1.5920
	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.3390	1.3870	1.4450	1.5320	1.5910
	Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.3393	1.3866	1.4449	1.5314	1.5910
	Pandey and Pradyumna [108]	Q8-LW	1.3400	1.3874	-	1.5318	1.5914
	Bennoun et al. [113]	HHSDT	1.3703	1.4168	1.4694	1.5461	1.6005
	Alibeigloo and Alizadeh [114]	DQM	1.3392	1.3876	1.4465	1.5341	1.5949
10	Présent élément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.2900	1.3430	1.4040	1.4900	1.5470
	Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.2890	1.3410	1.4020	1.4890	1.5460
	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.2890	1.3410	1.4020	1.4880	1.5460
	Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.2975	1.3484	1.4082	1.4930	1.5498
	Pandey and Pradyumna [108]	Q8-LW	1.2981	1.3482	-	1.4922	1.5497
	Bennoun et al. [113]	HHSDT	1.3263	1.3765	1.4312	1.5070	1.5591
	Alibeigloo and Alizadeh [114]	DQM	1.2976	1.3494	1.4097	1.4956	1.5949
5	Présent élément (4×4)	FEM-Q8-LW	1.1717	1.2322	1.2972	1.3817	1.4340
	Présent élément (6×6)	FEM-Q8-LW	1.1710	1.2312	1.2962	1.3805	1.4330
	Présent élément (8×8)	FEM-Q8-LW	1.1707	1.2312	1.2960	1.3805	1.4327
	Li et al. [107]	3D-Elasticité	1.1958	1.2533	1.3156	1.3956	1.4454
	Alibeigloo and Alizadeh [114]	DQM	1.1963	1.2547	1.3173	1.3980	1.4492

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la validation, la performance et la fiabilité de l'élément isoparamétrique développé (FEM-Q8-LW) à travers une série d'exemples en flexion et en vibration libre de plaques FGM isotropes et des plaques sandwichs FGM symétriques et non symétriques, avec différents cas de chargement, de géométrie et de conditions aux limites. Les résultats numériques obtenus via le présent modèle ont été comparés avec des modèles analytiques (3D, quasi-3D et 2D) ainsi avec ceux obtenus via des modèles numériques en utilisant la MEF. Les exemples numériques ont montré la bonne performance du modèle EF développé en terme de précision, de stabilité numérique et de rapidité de convergence.

Par ailleurs, on a aussi montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres, tels que les propriétés matérielles et géométriques, sur le comportement statique et dynamique des plaques sandwichs FGM.



# Conclusion générale

Dans ce travail de recherche, un nouveau modèle élément fini a été développé pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre de plaques sandwich fonctionnellement graduées (FGM). L'élément fini proposé est un élément de type  $C^0$  quadrilatère isoparamétrique défini par huit nœuds et treize degrés de liberté pour chacun. La formulation de cet élément a été basée sur le modèle original de type layerwise proposé récemment par Belarbi and Tati (2015) pour les plaques sandwich multicouches. Le présent modèle layerwise adopte la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) pour modéliser les deux peaux et la théorie d'ordre supérieure (HSDT) pour modéliser le cœur, en maintenant une continuité de déplacement au niveau d'interface. L'avantage de ce présent modèle repose sur son nombre de variables est fixe, n'augmente pas lorsque le nombre de couches augmente. Dans la présente analyse, trois types courants de plaques FGM ont été pris en considération : (i) plaques FGM isotropes ; (ii) une plaque sandwich avec des peaux homogènes et un cœur FGM et (iii) une plaque sandwich avec des peaux FG et un cœur homogène. La loi de puissance P-FGM a été utilisée pour estimer les propriétés mécaniques et dynamiques de la plaque sandwich FGM. Le principe classique de Hamilton a été adopté pour exprimer les équations de mouvement de la plaque sandwich FG. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions analytiques 3D, quasi-3D et 2D et à celles prédites par des modèles d'éléments finis avancés disponibles dans la littérature. La comparaison a montré que la précision des résultats, la rapidité de convergence et la large gamme d'applicabilité du modèle d'éléments finis proposé, pour les plaques FGM minces et épaisses FGM, sont excellents.

Par ailleurs, une étude paramétrique détaillée a été présentée afin de montrer l'effet de certains paramètres comme le rapport d'épaisseur, le rapport d'aspect, la distribution des matériaux, la configuration des plaques sandwich (rapport d'épaisseur cœur-peaux), les modes de vibration, les conditions aux limites, l'indice de fraction volumique ; sur le comportement mécanique et dynamiques des plaques sandwich FG symétriques et non symétriques.

Les points les plus importants découverts dans cette étude sont présentés ci-dessous :

- ✓ La combinaison entre l'approche monocouche équivalente et l'approche layerwise est très avantageuse, car les résultats du présent modèle combinent les caractéristiques des deux approches, qui sont la simplicité et la précision.
- ✓ Du point de vue du coût de calcul, il est important de mentionner ici que la formulation d'éléments finis proposée ne nécessite que des fonctions de forme  $C^0$  qui contribuent à une diminution notable des efforts de calcul.
- ✓ L'élément fini développé (FEM-Q8-LW) se comporte bien, que ce soit en plaques FGM minces ou épaisses (aucun phénomène de verrouillage en CT).
- ✓ La flèche adimensionnelle augmente avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique ( $k$ ).
- ✓ La fréquence naturelle adimensionnelle augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) jusqu'à  $a/h \leq 20$ , tandis que l'augmentation supplémentaire de ce rapport ( $a/h > 20$ ) n'a pas d'effet notable sur la fréquence propre.
- ✓ La fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwich FGM épaisses est plus sensible au rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) que celle des plaques minces.
- ✓ Pour tous les types de conditions aux limites, la fréquence naturelle adimensionnelle diminue en augmentant l'indice de fraction volumique ( $k$ ) et le rapport d'aspect de la plaque ( $b/a$ ).
- ✓ La fréquence naturelle adimensionnelle la plus basse est observée pour les conditions aux limites SSSF, SFSF et SCSF, tandis que la fréquence naturelle fondamentale la plus élevée est observée pour les conditions aux limites SCSC et SSSC. Par conséquent, la fréquence naturelle adimensionnelle augmente que la rigidité de la retenue aux limites augmente.
- ✓ La fréquence naturelle adimensionnelle des plaques sandwiches FGM hardcore a diminué avec une augmentation de l'indice de fraction volumique ( $k$ ), alors que la nature opposée de la variation de la fréquence naturelle est observée pour les plaques sandwiches FGM softcore.

- ✓ Pour les plaques sandwich FGM hardcore, la fréquence naturelle adimensionnelle est maximale pour la plaque (1-8-1) et minimale pour la plaque (1-0-1), tandis que pour les plaques sandwich FGM softcore, la fréquence propre atteint son maximum pour (1-0-1) plaque et minimum pour (1-8-1) plaque.
- ✓ Dans le cas d'une plaque sandwich à cœur FGM, la fréquence naturelle adimensionnelle augmente lorsque les valeurs de l'indice de fraction volumique ( $k$ ) varient de 0,5 à 10.

Il est conclu que le présent modèle d'éléments finis par couches est non seulement précis mais également simple pour résoudre les problèmes de flexion et de vibration libre pour tous les types de plaques sandwich FGM.

# Références bibliographiques

- [1] Saeedi, N. (2012). Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues (Doctoral dissertation, Paris Est).
- [2] Baron, C., & Naili, S. (2008). Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(9), 722-730.
- [3] Keskes, B. (2007). Comportement en fatigue des composites type sandwich en nids d'abeilles (Thèse de doctorat, Université Setif )
- [4] Garg, A., Belarbi, M. O., Chalak, H. D., & Chakrabarti, A. (2021). A review of the analysis of sandwich FGM structures. *Composite Structures*, 258, 113427.
- [5] Mortensen, A., & Suresh, S. (1998). *Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-ceramic Composites* (Book. Maney Publishing).
- [6] Birman, V., & Byrd, L. W. (2007). Modeling and analysis of functionally graded materials and structures.
- [7] Elishakoff, I. E., Pentaras, D., & Gentilini, C. (2015). *Mechanics of functionally graded material structures*. World Scientific.
- [8] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite structures*, 96, 833-849.
- [9] Koizumi, M. F. G. M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4.
- [10] Neubrand, A., & Rödel, J. (2021). Gradient materials: An overview of a novel concept. *International Journal of Materials Research*, 88(5), 358-371.
- [11] Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., ... & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209.
- [12] Shen, H. S. (2016). *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press.
- [13] Udupa, G., Rao, S. S., & Gangadharan, K. V. (2014). Functionally graded composite materials: an overview. *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299.
- [14] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (Eds.). (2013). *Functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

- [15] El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1, 1-23.
- [16] Lee, P.H. (2013). *Characterization and Modeling of Functionally Graded Materials* (Thèse de Doctorat, Université de Columbia).
- [17] Mahmoud, D., & Elbestawi, M. A. (2017). Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13.
- [18] Popoola, P., Farotade, G., Fatoba, O., & Popoola, O. (2016). Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications-a review. *Fiber Laser*, 2, 64.
- [19] Popovich, V. A., Borisov, E. V., Popovich, A. A., Sufiiarov, V. S., Masaylo, D. V., & Alzina, L. (2017). Functionally graded Inconel 718 processed by additive manufacturing: Crystallographic texture, anisotropy of microstructure and mechanical properties. *Materials & Design*, 114, 441-449.
- [20] Mota, A. F., & Loja, M. A. R. (2019). Mechanical behavior of porous functionally graded nanocomposite materials. *C*, 5(2), 34.
- [21] Gabrielli, R., Turner, I. G., & Bowen, C. R. (2008). Development of modelling methods for materials to be used as bone substitutes. In *Key Engineering Materials* (Vol. 361, pp. 903-906). Trans Tech Publications Ltd.
- [22] Craveiro, F., Bártolo, H., & Bártolo, P. J. (2013). Functionally graded structures through building manufacturing. In *Advanced materials research* (Vol. 683, pp. 775-778). Trans Tech Publications Ltd.
- [23] Loh, G. H., Pei, E., Harrison, D., & Monzón, M. D. (2018). An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23, 34-44.
- [24] Muller, P., Mognol, P., & Hascoet, J. Y. (2012, July). Functionally graded material (FGM) parts: from design to the manufacturing simulation. In *Engineering Systems Design and Analysis* (Vol. 44878, pp. 123-131). American Society of Mechanical Engineers.
- [25] Bansal, N. P., Singh, J. P., Lamon, J., Choi, S. R., & Mahmoud, M. M. (Eds.). (2010). *Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites II*. John Wiley & Sons.
- [26] Fekrar, A., Atmane, H., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2010). Conception des plaques fgm ayant un comportement similaire aux plaques homogènes sous charge thermique. "SICZS\_2010" Symposium International sur la Construction en Zone Sismique Université Chlef.

- [27] Jin, Z. H., & Batra, R. C. (1996). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of thermal stresses*, 19(4), 317-339.
- [28] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243.
- [29] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane.
- [30] Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of composite materials*, 4(1), 20-34.
- [31] Noor, A. K., Peters, J. M., & Burton, W. S. (1994). Three-dimensional solutions for initially stressed structural sandwiches. *Journal of engineering mechanics*, 120(2), 284-303.
- [32] Reddy, J. N. (1993). An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates. *Composite structures*, 25(1-4), 21-35.
- [33] Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells* (Vol. 2, pp. 240-246). New York: McGraw-hill.
- [34] Ashton, J. E., & Whitney, J. M. (1970). *Theory of Laminated Plates*, Technomic Pub. Co.,(1971), 8.
- [35] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [36] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates.
- [37] Phan, N. D., & Reddy, J. N. (1985). Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory. *International journal for numerical methods in engineering*, 21(12), 2201-2219.
- [38] Iyengar, K. S. R., Chandrashekhara, K., & Sebastian, V. K. (1974). On the analysis of thick rectangular plates. *Ingenieur-Archiv*, 43, 317-330.
- [39] Murty, A. K. (1987). Flexure of composite plates. *Composite Structures*, 7(3), 161-177.
- [40] Ambarsumyan, S. (1958). K teorii izgiba anisotropnykh plasinok. *Izv. Akad Nauk SSR*, 5, 69-77.
- [41] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.
- [42] Murthy, M. V. V. (1981). An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates (No. L-14533).
- [43] Duong, V. A. (2008). Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites (Doctoral dissertation, Paris Est).

- [44] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916.
- [45] Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6), 1525-1546.
- [46] Soldatos, K. P., & Timarci, T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171.
- [47] Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Soares, C. G. (2012). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites Part B: Engineering*, 43(3), 1489-1499.
- [48] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., & Adda Bedia, E. A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 113-121.
- [49] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., & Mechab, I. (2011). A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237-247.
- [50] Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite structures*, 89(1), 94-101.
- [51] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), 567-575.
- [52] Chabot, A. (1997). Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4) (Doctoral dissertation, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées).
- [53] Carrera, E. (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, 50(2), 183-198.
- [54] Nguyen, V. T. (2004). Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque (Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech).
- [55] Cho, M., Kim, K. O., & Kim, M. H. (1996). Efficient higher-order shell theory for laminated composites. *Composite Structures*, 34(2), 197-212.
- [56] Cho, M., & Kim, J. S. (2000). A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Composites Part B: Engineering*, 31(1), 65-74.
- [57] Murakami, H. (1986). Laminated composite plate theory with improved in-plane responses.

- [58] Carrera, E. (2004). On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82(7-8), 541-554.
- [59] Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International journal of solids and structures*, 35(33), 4457-4476.
- [60] Lanhe, W. (2004). Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Composite Structures*, 64(2), 211-218.
- [61] Batra, R. C., & Jin, J. (2005). Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1-2), 509-516.
- [62] Yaghoobi, H., & Yaghoobi, P. (2013). Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*, 48, 2019-2035.
- [63] Mantari, J. L., & Granados, E. V. (2015). Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT. *Composites Part B: Engineering*, 75, 148-155.
- [64] Draoui, A., Zidour, M., Tounsi, A., & Adim, B. (2019). Static and dynamic behavior of nanotubes-reinforced sandwich plates using (FSDT). In *Journal of Nano Research* (Vol. 57, pp. 117-135). Trans Tech Publications Ltd.
- [65] Lidiya, K., Tetyana, S., & Awrejcewicz, J. (2020). Parametric Vibrations of Functionally Graded Sandwich Plates with Complex Forms. In *New Trends in Nonlinear Dynamics: Proceedings of the First International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2019), Volume III* (pp. 69-77). Springer International Publishing.
- [66] Hashemi, S., et A. A. Jafari, (2021), An analytical solution for nonlinear vibration analysis of functionally graded rectangular plate in contact with fluid. *Adv Appl Math Mech*, 13(4), 914-941.
- [67] Kumar, V., Singh, S. J., Saran, V. H., & Harsha, S. P. (2021). Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 85, 104124
- [68] Kurpa, L. V., & Shmatko, T. V. (2021). Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates and shallow shells by the Ritz method and the R-functions theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 235(20), 4582-4593.
- [69] Karakoti, A., Pandey, S., & Kar, V. R. (2022). Nonlinear transient analysis of porous P-FGM and S-FGM sandwich plates and shell panels under blast loading and thermal environment. *Thin-Walled Structures*, 173, 108985.
- [70] Quoc, T. H., Huan, D. T., & Hien, H. T. (2022). Large Amplitude Free Vibration Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates with Porosity. In *Modern*



- Mechanics and Applications: Select Proceedings of ICOMMA 2020 (pp. 287-300). Springer Singapore.
- [71] Reddy, J. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, 47(1-3), 663-684.
- [72] Huang, X. L., & Shen, H. S. (2004). Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures*, 41(9-10), 2403-2427.
- [73] Das, M., Barut, A., Madenci, E., & Ambur, D. R. (2006). A triangular plate element for thermo-elastic analysis of sandwich panels with a functionally graded core. *International journal for numerical methods in engineering*, 68(9), 940-966.
- [74] Shen, H. S. (2007). Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(4), 466-478.
- [75] Matsunaga, H. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite structures*, 82(4), 499-512.
- [76] Bodaghi, M., & Saidi, A. R. (2010). Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(11), 3659-3673.
- [77] Talha, M., & Singh, B. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 3991-4011.
- [78] Natarajan, S., & Manickam, G. (2012). Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57, 32-42.
- [79] Neves, A. M. A., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C. M. C., Jorge, R. M. N., & Soares, C. M. M. (2012). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(5), 1814-1825.
- [80] Shen, H. S., & Wang, Z. X. (2012). Assessment of Voigt and Mori–Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 94(7), 2197-2208.
- [81] Khalili, S. M. R., & Mohammadi, Y. (2012). Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 35, 61-74.
- [82] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). Free vibration of functionally graded plates with a higher-order shear and normal deformation theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13(01), 1350004.

- [83] Thai, H. T., Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Lee, J. (2014). Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 45, 211-225.
- [84] Alijani, F., & Amabili, M. (2014). Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 113, 89-107.
- [85] Nguyen, T. K. (2015). A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11, 203-219.
- [86] Liu, M., Cheng, Y., & Liu, J. (2015). High-order free vibration analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded flexible core. *Composites Part B: Engineering*, 72, 97-107.
- [87] Nguyen, T. K., Nguyen, V. H., Chau-Dinh, T., Vo, T. P., & Nguyen-Xuan, H. (2016). Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 107, 162-173.
- [88] Gupta, A., et al, (2016), Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*. 94: p. 64-74.
- [89] Benbakhti, A., Bouiadjra, M. B., Retiel, N., & Tounsi, A. (2016). A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates. *Steel Compos. Struct*, 22(5), 975-999.
- [90] Pandey, S., & Pradyumna, S. (2017). A finite element formulation for thermally induced vibrations of functionally graded material sandwich plates and shell panels. *Composite Structures*, 160, 877-886.
- [91] Kulikov, G. M., Plotnikova, S. V., & Carrera, E. (2018). A robust, four-node, quadrilateral element for stress analysis of functionally graded plates through higher-order theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 25(15-16), 1383-1402.
- [92] Pandey, S., & Pradyumna, S. (2018). Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. *Composites part B: engineering*, 153, 325-336.
- [93] Cong, P. H., Chien, T. M., Khoa, N. D., & Duc, N. D. (2018). Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT. *Aerospace Science and Technology*, 77, 419-428.
- [94] Daikh, A. A., & Zenkour, A. M. (2019). Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory. *Materials Research Express*, 6(11), 115707.

- [95] Van Do, V. N., & Lee, C. H. (2019). Free vibration analysis of FGM plates with complex cutouts by using quasi-3D isogeometric approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 159, 213-233.
- [96] Li, M., Soares, C. G., & Yan, R. (2021). Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT. *Composite Structures*, 264, 113643.
- [97] Belkhodja, Y., Ouinas, D., Fekirini, H., Olay, J. A., Achour, B., Touahmia, M., & Boukendakdji, M. (2022). A new hybrid HSDT for bending, free vibration, and buckling analysis of FGM plates (2D & quasi-3D). *Smart Structures and Systems*, 29(3), 395-420.
- [98] Frahlia, H., Bennai, R., Nebab, M., Ait Atmane, H., & Tounsi, A. (2022). Assessing effects of parameters of viscoelastic foundation on the dynamic response of functionally graded plates using a novel HSDT theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1-15.
- [99] Belarbi, M. O., & Tati, A. (2015). A new C0 finite element model for the analysis of sandwich plates using combined theories. *International Journal of Structural Engineering*, 6(3), 212-239.
- [100] Nguyen, T. N., Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H. (2016). A novel computational approach for functionally graded isotropic and sandwich plate structures based on a rotation-free meshfree method. *Thin-Walled Structures*, 107, 473-488.
- [101] Gilhooley, D. F., Batra, R. C., Xiao, J. R., McCarthy, M. A., & Gillespie Jr, J. W. (2007). Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Composite Structures*, 80(4), 539-552.
- [102] Nguyen, T. K., Nguyen, V. H., Chau-Dinh, T., Vo, T. P., & Nguyen-Xuan, H. (2016). Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 107, 162-173.
- [103] Pluciński, P., & Jaśkowiec, J. (2020). Three-dimensional analysis of laminated plates with functionally graded layers by two-dimensional numerical model. *Engineering Transactions*, 68(1), 21-45.
- [104] Uymaz, B., & Aydogdu, M. (2007). Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26(18), 1847-1863.
- [105] Belkhodja, Y., Ouinas, D., Zaoui, F. Z., & Fekirini, H. (2020). An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory (HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates. *Advanced Composites Letters*, 29, 0963693519875739.

- [106] Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T., & Gao, S. (2014). Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions. *Composite Structures*, 108, 565-577.
- [107] Li, Q., Iu, V. P., & Kou, K. P. (2008). Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1-2), 498-515.
- [108] Pandey, S., & Pradyumna, S. (2018). Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. *Composites part B: engineering*, 153, 325-336.
- [109] Xiang, S., Kang, G. W., Yang, M. S., & Zhao, Y. (2013). Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Composite Structures*, 96, 226-231.
- [110] Natarajan, S., & Manickam, G. (2012). Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57, 32-42.
- [111] Thai, C. H., Zenkour, A. M., Wahab, M. A., & Nguyen-Xuan, H. (2016). A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis. *Composite Structures*, 139, 77-95.
- [112] Gupta, A., Talha, M., & Singh, B. N. (2016). Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 94, 64-74.
- [113] Bennoun, M., Houari, M. S. A., & Tounsi, A. (2016). A novel five-variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423-431.
- [114] Alibeigloo, A., & Alizadeh, M. (2015). Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 54, 252-266.
- [115] Zenkour, A. M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses. *International journal of solids and structures*, 42(18-19), 5224-5242.