



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques  
Filière : Génie Mécanique  
Spécialité : Construction Mécanique

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :  
**GOUIDJIL Djaloul et BACHAR Zineddine**

Le : Mardi 04 juin 2024

## **ANALYSE ET CONCEPTION DES RÉSERVOIRS EN MATÉRIAUX COMPOSITES DESTINÉS AU STOCKAGE D'HYDROGÈNE SOUS PRESSION**

---

### Jury :

Dr	DJOUDI Tarek	MCA	Université de Biskra	Président
Pr	HECINI Mabrouk	Pr	Université de Biskra	Rapporteur
Dr	HADEF Hefaidh	MCA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2023 - 2024

## Remerciements

---

### Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu tout puissant qui m'a donné de la force et Du courage pour terminer mes études dans de bonnes conditions.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon encadreur de ce Mémoire Pr. HECINI Mabrouk, Pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses Judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie vivement le Dr. DJOUDI Tarek pour l'honneur qu'il m'a fait En acceptant la présidence de ce jury.

J'exprime mes remerciements au Dr. HADEF Hefaidh qui a bien voulu accepter D'être à partir les examinateurs de ce travail.

Je désire aussi remercier tous les enseignants du département de génie Mécanique, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études Universitaires.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi. Je remercie Mes sœurs, et mon frère, pour leurs encouragements.

Je voudrais exprimer ma gratitude à tous mes amis, qui ne peuvent pas être Nommés, qui ont pris le temps de discuter de mon sujet. Chacun de ces échanges m'a Aidé à faire avancer mon analyse.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma Gratitude.

## ***Dédicace***

*A mes très chers parents*

*A mes chers frères*

*A mes à tout ma famille*

*A mes chers amies*

.

## ***Dédicace spéciale***

*A mon père **ABDELHAMID BACHAR** ( رحمه الله و اسكنه فسيح جناته ), que je souhaite s'il était là pour partager ma joie et être fier de moi, Sans lui, je ne serais pas arrivé là où je suis maintenant. Merci papa*

**BACHAR ZINEDDINE ET GUODJIL DJELLOUL**

---

## SOMMAIRE

---

---

## SOMMAIRE

---

Liste des Figures.....	I
Liste des Tableaux.....	II
Nomenclatures.....	III
Introduction générale.....	1

---

## CHAPITRE I GENERALITE SUR L'HYDROGENE

---

I.1- Introduction : .....	4
I.2- L'hydrogène comme vecteur d'énergie : .....	4
I.3- La production d'hydrogène : .....	4
I.3.1- Transformation d'énergie fossile : .....	5
I.3.2- Électrolyse de l'eau : .....	5
I.3.3- Biomasse : .....	6
I.4- Propriétés : .....	6
I.4.1- Propriétés physiques du dihydrogène (h <sub>2</sub> ) : .....	6
I.5- Les principales formes de stockage : .....	7
I.5.1- Stockage gazeux .....	7
I.5.2- Stockage liquide .....	8
I.5.3- Stockage solide.....	9
I.5.4- Stockage hybride.....	10
I.5.4.1- Projet solhy .....	10
I.5.4.2- Stockage hydrures sous haute pression gazeuse : .....	11

---

## CHAPITRE II

### GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

---

II.1-Introduction :	14
II.2- Définition :	14
II.3- Les constituants des matériaux composites:	15
II.3.1- Les Matrices :	15
II.3.1.1- Résines thermodurcissables :	15
II.3.1.2-Résines thermoplastiques :	16
II.3.1.3-Les matrices métalliques :	16
II.3.1.4- Les matrices céramiques :	16
II.3.2-Les renforts :	17
II.3.2.1-Fibre de verre :	18
II.3.2.2-Fibre de carbone :	18
II.3.2.3- Fibre d'aramide :	18
II.3.2.4-Fibre à base de bore :	19
II.3.2.5-Fibre à base de silice ou de quartz :	19
II.3.2.6-Fibres de polyéthylène de haut module :	19
II.4- les types de matériaux composites	19
II.4.1-Les composites à grande diffusion	19
II.4.2-Les composites hautes performances	20
II.5- Classification des matériaux composites	20
II.5.1- Composites renforcés par des particules	20
II.5.2- Composites renforcés par des fibres	21
II.5.3- Composites structuraux	21
II.5.3.1- Les stratifiés :	22
II.5.3.2-Les panneaux sandwich :	22
II.6- Techniques d'élaboration des matériaux composites :	22
II.6.1- Moulage sans pression :	23
II.6.1.1- Moulage par contact :	23
II.6.1.2- Moulage par projection simultanée:	23

II.6.2- Moulage par centrifugation :.....	23
II.6.3- Moulage par enroulement filamenteux :.....	24
II.6.3.1- Enroulement circonférentiel :.....	24
II.6.3.2- Enroulement polaire :.....	24
II.7- Les avantages et inconvénients des matériaux composites pour certains produits :.....	25
II.7.1-Produits aéronautique: .....	25
II.7.2-Produits militaires :.....	26
II.7.3-Produits spatiaux (satellites):.....	27

---

## CHAPITRE III

### COMPORTEMENT MECANIQUE DES TUBES SOUS PRESSION ET GRADIENT DE TEMPERATURE

---

III.1 Introduction :.....	29
III.2 Position du problème :.....	29
III.3 Analyse thermique .....	29
III.4 Analyse thermomécanique .....	31
III.4.1 Analyse des contraintes et des déformations:.....	31
III.4.2- Propriétés des plaques stratifiées tridimensionnelles .....	36
III.4.3- Conditions aux limites.....	38

---

## CHAPITRE IV

### PROGRAMMATION ET RESULTATS

---

IV.1- Introduction : .....	44
IV.2- Paramètres d'entrée : .....	44
IV.3- Paramètres de sortie :.....	44
IV.4- Organigramme de programmation :.....	44
IV.5- Les cas d'étude : .....	46
IV.5.1- Les données :.....	46

IV.5.2- Résultat de l'étude thermique :.....	46
IV.5.3- Résultat de l'étude thermomécanique :.....	47
a-Cas de la configuration : [+55/-55 /+55 /-55/+55/-55].....	47
b- Cas de la configuration : [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35] .....	49
IV.5.4- Résultat de l'étude thermomécanique comparative .....	51
a-Cas de la configuration : [+55/-55 /+55 /-55/+55/-55].....	51
b- Cas de la configuration : [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35] .....	55
<hr/>	
<hr/>	
Conclusion générale.....	62
Références Bibliographiques.....	64
Annexe.....	66
Résumé.....	73



---

## LISTE DES FIGURES

---

Figure I. 1 :Densité d'énergie massique pour différents vecteurs d'énergie.....	4
Figure I. 2: Les différents modes de production de l'hydrogène. ....	5
Figure I. 3: Schéma de principe d'une cellule d'électrolyse de l'eau .....	6
Figure I. 4: Station service cryogénique Linde .....	8
Figure I. 5: Ariane 5, étage cryogénique.....	8
Figure I. 6 :Réservoir cryogénique (ou cryostat) développé par Magna Steyr. ....	8
Figure I. 7: Développement du stockage solide depuis 50 ans . ....	9
Figure I. 8:Famille pour le stockage solide . MT= métaux de transition .....	10
Figure I. 9: Projet Solhy : schéma de principe .....	10
Figure I. 10 : Compétition entre absorption par le composé intermétallique et la diffusion ...	11
Figure I. 11: Solution hybride développée par Toyota.....	11-12
Figure II. 1: Schéma illustratif d'un matériau composite.....	14
Figure II. 2: Composition d'un matériau composite .....	15
Figure II. 3: Types de matrice. ....	15
Figure II. 4 : Différentes familles du renfort.....	18
Figure II. 5 : Fibre de carbone constituée de plusieurs centaines de filaments.....	18
Figure II. 6: Classification des matériaux composites (William & Callister, 2001). ....	20
Figure II. 7: Composite à matrice métallique renforcé par dispersion (Hairy, 2018). ....	21
Figure II. 8: Les différents types des composites renforcés par des fibres. ....	21
Figure II. 9: Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié.....	22
Figure II. 10: Représentation schématique d'un panneau sandwich1. ....	22
Figure II. 11: Moulage par contact.....	23
Figure II. 12: Moulage par projection simultanée.....	23
Figure II. 13: Moulage par centrifugation (Berthelot, 2010). ....	24
Figure II. 14: Moulage par enroulement circonférentiel (Berthelot, 2010).....	24
Figure II. 15: Moulage par enroulement polaire (Berthelot, 2010).....	25
Figure II. 16: Pièces composites sur des structures d'aéronefs (transport aérien civil). ....	26
Figure II. 17: Les pièces composites sur des structures d'aéronefs(transport aérien militaire). .....	26
Figure II. 18: Exemple des ailettes de guidage dans les missiles.....	26
Figure II. 19: Exemple des composites dans les satellites .....	27
Figure III. 1:Tube composite multicouche en coordonnées cylindriques. ....	29
Figure III. 2: État de contrainte dans un tuyau composite FW multicouche.....	31
Figure III. 3: Relation entre l'axe principal du matériau et les axes du cylindre.....	38

Figure IV. 1: Organigramme .....	45
Figure IV. 2: La distribution de la température dans l'épaisseur du tube. ....	46
Figure IV.3 : Variation des paramètres à travers l'épaisseur du tube [ $\Delta T$ variable, cas : a] ...	48
Figure IV.4 : Variation des paramètres à travers l'épaisseur du tube [ $\Delta T$ variable, cas : b] ..	50
Figure IV. 5: Variation du déplacement radial à travers l'épaisseur du tube .....	51
Figure IV. 6: Distribution de la contrainte radiale .....	52
Figure IV. 7: Distribution de la contrainte de cisaillement à travers le rayon .....	52
Figure IV. 8: Distribution de la contrainte axiale à travers l'épaisseur du tube.....	53
Figure IV. 9: Distribution de la contrainte circonférentielle sur la distance radiale dans .....	53
Figure IV. 10: Distribution de la déformation radial à travers l'épaisseur du tube.....	54
Figure IV. 11: Distribution de la déformation circonférentielle à travers l'épaisseur du tube..	54
Figure IV. 12: Variation of déplacement radial à travers l'épaisseur du tube .....	56
Figure IV. 13: Distribution de la contrainte radiale à travers l'épaisseur du tube .....	57
Figure IV. 14: Distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du tube.....	57
Figure IV. 15: Distribution de la contrainte axiale à travers l'épaisseur du tube.....	58
Figure IV. 16: Distribution de la contrainte circonférentielle sur la distance radiale .....	58
Figure IV. 17: Distribution de la déformation radial à travers l'épaisseur du tube.....	59
Figure IV. 18: Distribution de la déformation circonférentielle à travers l'épaisseur du tube.	59

---

## LISTE DES TABLEAUX

---

Tableau I. 1: Propriétés Physiques Du Dihydrogène .....	6
Tableau I. 2: Les différents types de réservoirs gazeux .....	7
Tableau I. 3: Les différents groupes de stockage solide.....	9
Tableau I. 4: Comparaisons entre stockage solide, stockage gazeux et stockage hybride.....	11
Tableau II. 1: Caractéristiques des résines thermodurcissables .....	16
Tableau II. 2: Caractéristiques des résines thermoplastiques.....	16
Tableau II. 3: Principales caractéristiques des céramiques utilisées comme matrice dans les matériaux composites (Dupeux, 2008).....	17
Tableau II. 4: Caractéristiques moyennes des renforts .....	19

---

## NOMENCLATURES

---

$q$ : est le taux de production d'énergie interne.
$k$ : Coefficient de conductivité thermique.
$\alpha$ : diffusivité thermique.
$A, B$ : sont des constantes d'intégration.
$T_{\infty}$ : la température ambiante .
$T_f$ : fluide chaud à la température de fluide .
$\Delta T$ : la différence de température .
$T_{ref}$ : la température de référence.
$T(r)$ : la distribution de température dans l'épaisseur.
$\alpha_i^{(k)}$ : les coefficients de dilatation thermique .
$A^{(k)}, B^{(k)}$ : sont des constantes d'intégration inconnues.
$D^{(k)}, E^{(k)}$ : sont des constantes d'intégration inconnues.
$S_{ij}$ : les éléments de la matrice de souplesse du matériau [S].
$C_{ij}$ : les éléments de la matrice de rigidité du matériau [C].
$T_{\sigma}, T_{\epsilon}$ : sont deux matrices de changement de base.
$E_x, E_y$ : les modules d'Young .
$\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$ : les coefficients de Poisson.
$h_0, h_a$ : les coefficients de transfert de chaleur par convection interne et externe.
$\alpha_x, \alpha_y$ : les coefficients de dilatation thermique .
$u_r$ : Le déplacement radial dans l'épaisseur du tube .
$\epsilon_r, \epsilon_{\theta}$ : La déformation dans l'épaisseur du tube .
$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\theta}, \sigma_{z\theta}$ : Les contraintes dans l'épaisseur du tube .
$G$ : les modules de cisaillement.
$r_0$ : rayon intérieur du tube.
$r_a$ : rayon extérieur du tube
$e$ : l'épaisseur du tube .
$n$ : le nombre de couches.
$\varphi$ : angle de l'orientation
$\alpha_x, \alpha_y$ : les coefficients de dilatation thermique .
$P_0$ : pression intérieure .

---

## INTRODUCTION GENERALE

---

---

# INTRODUCTION GENERALE

---

Actuellement, l'utilisation des combustibles fossiles (pétrole, gaz et charbon) représente une menace croissante pour notre environnement. Cette menace ne se limite pas seulement à l'épuisement des ressources naturelles, mais conduit également à une augmentation des émissions de gaz à effet de serre et des polluants. Il y a un besoin urgent de sources d'énergie propres, qui génèrent de faibles quantités de polluants, pour remplacer les systèmes énergétiques actuels. L'hydrogène est considéré comme l'une des options les plus prometteuses en tant que source d'énergie, car il est non polluant et peut être produit à partir de l'eau.

Pour que l'hydrogène devienne effectivement la source d'énergie du futur, il doit être disponible en tout temps. Par conséquent, le développement de moyens efficaces de transport, de stockage et de distribution de l'hydrogène est essentiel. À l'heure actuelle, le stockage de l'hydrogène est la solution la plus efficace.

Les réservoirs et les citernes sont parmi les principaux moyens de transport et de stockage des produits liquides et gazeux. Ces moyens sont utilisés efficacement dans de nombreux domaines, comme l'industrie (hydrogène, gaz naturel, produits chimiques...). La sécurité, la robustesse, la durabilité et le coût raisonnable sont les conditions essentielles pour l'adoption de ces solutions.

Les matériaux composites stratifiés sont actuellement proposés comme solution privilégiée pour la fabrication de réservoirs et de conduites répondant aux exigences environnementales et aux contraintes de poids. Ce type de réservoir est une structure composée de matériaux composites. Ces structures de renforcement sont constituées de fibres (verre, aramide, carbone) et de résine (thermodurcissable ou thermoplastique).

Les structures des réservoirs peuvent être partiellement ou totalement cylindriques. Ces réservoirs sont généralement fabriqués par un procédé de bobinage filamentaire. Il est nécessaire de mener des études précises pour optimiser la conception dimensionnelle afin de garantir la sécurité face à des exigences externes variées.

L'objectif de cette recherche est d'étudier le comportement mécaniques des réservoirs fabriqués en matériaux composites sous l'effet de la pression interne et du gradient thermique. Cela inclut l'expression des champs de contraintes, des déformations et des déplacements à travers l'épaisseur de la partie la plus sollicitée qui est la partie tubulaire en fonction de ces pressions, du gradient de température et de la composition du matériau. La forme tubulaire de la structure étudiée nécessite une analyse du comportement mécanique du composite dans un cadre de référence cylindrique. Les modèles analytiques développés dans le cadre de cette recherche seront programmés en utilisant l'environnement MATLAB.

Ce mémoire est présenté sous quatre chapitres :

Chapitre 1 : Ce chapitre traite de l'hydrogène et de son importance en tant que futur énergétique, des méthodes de sa production et de ses modes de stockage.

Chapitre 2 : Nous abordons les généralités sur les matériaux composites, en définissant leur concept, en comprenant leurs composants et leurs méthodes de fabrication.

Chapitre 3 : Des modèles analytiques sont présentés pour prédire les champs de contraintes, de déformations et de déplacements à travers l'épaisseur des tubes en matériaux composites soumis à une pression interne et à un gradient thermique.

Chapitre 4: Les détails du programme développé dans le cadre de l'étude sont présentés sous forme de diagramme organisationnel. Les résultats de la modélisation pour deux configurations sont ensuite exposés en comparant trois scénarios de gradient température, où le gradient de température est soit nul, soit constant, soit variable.

Ce mémoire est clôturé par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus et donnant quelques perspectives à ce travail.

---

CHAPITRE I  
GENERALITE SUR HYDROGENE

---



## I.1- Introduction :

L'hydrogène est l'élément chimique le plus abondant de l'univers. L'hydrogène dans la nature est associé à de nombreux autres éléments (carbone pour la formation de méthane ( $\text{CH}_4$ ), oxygène pour la formation d'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ )). Pour obtenir de l'hydrogène pur pour les besoins industriels, il faut donc le séparer des éléments chimiques qui lui sont associés.

L'hydrogène est largement utilisé dans l'industrie des engrais et des produits chimiques, dans la production d'ammoniac et de méthane et dans la fabrication de matériaux synthétiques et de plastiques. Il est également utilisé dans l'industrie pétrolière et gazière pour améliorer la qualité du carburant et augmenter la productivité. De plus, l'hydrogène est l'une des sources d'énergie renouvelable et propre les plus importantes. Utilisée dans les piles à combustible pour produire de l'électricité grâce à son interaction avec l'oxygène, cette technologie est prometteuse pour réduire les émissions de carbone et se diriger vers un avenir plus durable sur le plan environnemental.

## I.2- L'hydrogène comme vecteur d'énergie :

L'hydrogène est l'élément le plus petit et le plus abondant de l'univers, et son nom a été proposé en 1787 par Lavoisier et est dérivé de la signification grecque qui génère de l'eau.

L'hydrogène se caractérise par une plus grande quantité d'énergie générée par la combustion de l'hydrogène que tout autre combustible (figure 1.1). En comparant les valeurs thermiques (LHV), la valeur de l'hydrogène est respectivement 2,4 ; 2,8 et 4 fois supérieure aux valeurs du méthane, de l'essence et du charbon. La consommation d'hydrogène de cette façon a l'avantage de ne pas libérer de dioxyde de carbone.

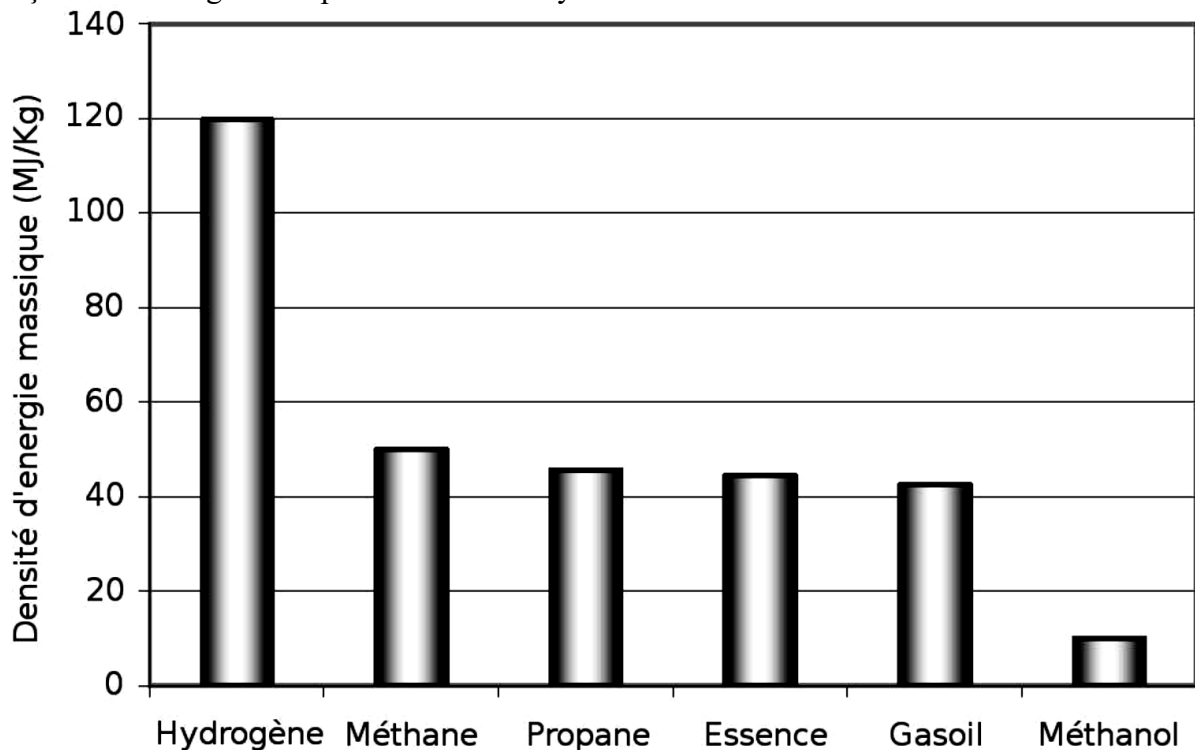
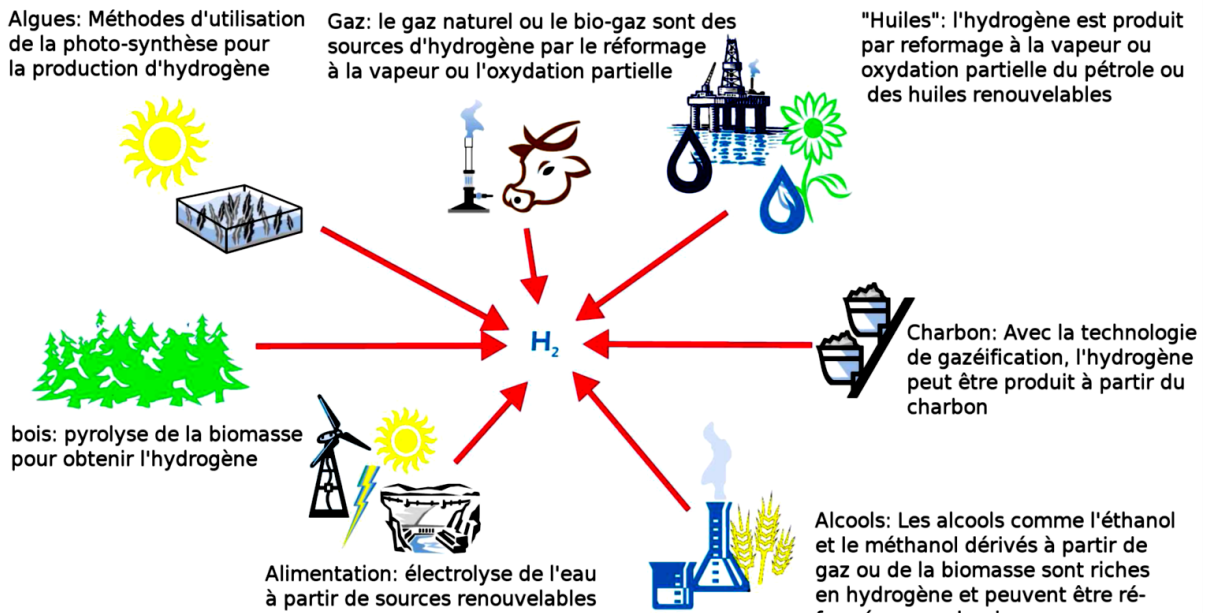


Figure I.1 : Densité d'énergie massique pour différents vecteurs d'énergie [1].

## I.3- La production d'hydrogène :

L'hydrogène est produit principalement jusqu'à présent par la réparation des combustibles fossiles, mais d'autres méthodes de production devraient être développées pour atteindre l'objectif de dépendance à l'hydrogène comme source d'énergie propre. La figure 2

montre différents modèles de production d'hydrogène, et ces méthodes peuvent être regroupées en plusieurs catégories.



Source: Hydro.

Figure I.2 : Les différents modes de production de l'hydrogène[1].

### I.3.1- Transformation d'énergie fossile :

De grandes quantités de dioxyde de carbone sont libérées lors de la production d'hydrogène à partir du pétrole et du charbon, et bien qu'il soit possible d'isoler le dioxyde de carbone dans les raffineries, cela ne résout pas le problème fondamental de la dépendance soutenue aux combustibles fossiles. Des solutions plus durables telles que l'utilisation de sources d'énergie propres telles que l'énergie solaire et éolienne doivent être développées pour produire de l'hydrogène[1].

### I.3.2- Électrolyse de l'eau :

L'eau ne se décompose pas spontanément en hydrogène et en oxygène; il faut lui fournir de l'énergie pour cela. Par conséquent, l'électrolyse de l'eau est une réaction chimique électrolytique forcée qui se produit dans un appareil spécial appelé électrolyseur. Dans cet appareil, un courant électrique (à l'aide d'un générateur électrique) est passé à travers l'eau liquide, ce qui entraîne la production de gaz hydrogène et oxygène[2].

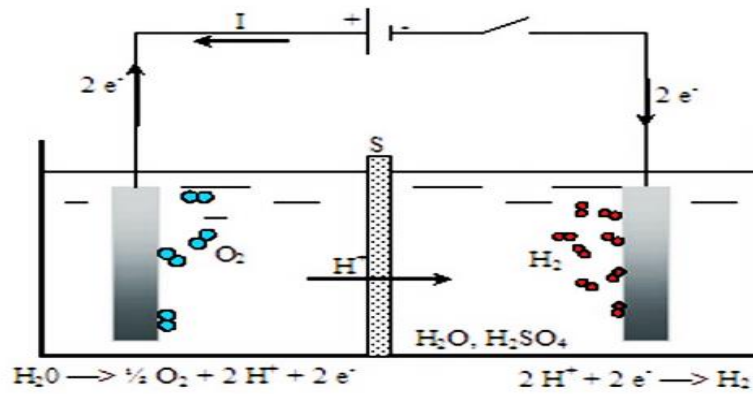


Figure I.3 : réaction chimique désintégration de la molécule H<sub>2</sub>O[2]

### I.3.3- Biomasse :

Le débat actuel sur les biocarburants porte sur l'utilisation concurrente des terres entre la production d'énergie et la production alimentaire. Cependant, des parties non comestibles des plantes peuvent être utilisées pour produire de l'énergie, améliorant ainsi la productivité pour réduire ce problème. En outre, les déchets ménagers peuvent être utilisés pour produire du méthane, capturer le dioxyde de carbone avec des processus de réparation pour produire de l'hydrogène propre. L'hydrogène peut également être produit à partir d'algues vertes et de grands consommateurs de dioxyde de carbone[1].

## I.4- Propriétés :

### I.4.1- Propriétés physiques du dihydrogène (h<sub>2</sub>) :

Tableau I.1 : Propriétés Physiques Du Dihydrogène[3]

<b>Point de fusion</b>	-259.1°C (14.01 K)
<b>Point d'ébullition</b>	-252.9°C (20.28 K)
<b>Masse volumique (20°C)</b>	0.09 g/cm <sup>3</sup>
<b>Densité relative (à l'air)</b>	0.07
<b>Rayon atomique</b>	25 pm
<b>Distance interatomique</b>	74 pm

L'hydrogène est une molécule de maïs double, un gaz incolore et inodore, non toxique et hautement inflammable. En raison de sa petite taille, il se propage facilement et est utilisé comme conducteur thermique et dans le refroidissement de grandes alternatives, ainsi que dans les composés métalliques tels que les hydrures métalliques[3].

## I.5- Les principales formes de stockage :



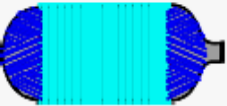
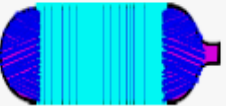




Le stockage de l'hydrogène se fait de trois façons principales : solide, liquide et gaz. Züttel fournit un tableau montrant les solutions technologiques par taille et capacité de mesure de gravité, où la couleur bleue est utilisée pour le stockage de gaz et de rouge pour le stockage de liquide. La couleur verte est utilisée pour l'hydrure traditionnelle et l'orange pour l'hydrure complexe. L'objectif est de fournir un stockage mobile ou fixe à court terme et à long terme de manière efficace. Les défis de stockage comprennent la capacité de mesure de la gravité, la capacité de volume, le coût, le cycle de vie, etc.

### I.5.1- Stockage gazeux :

Le stockage du gaz est plus facile et plus fréquent, car l'hydrogène est stocké dans des réservoirs comprimés, plus la capacité de stockage est élevée. Les réservoirs actuels fonctionnent à une pression de 300 à 350 bars, et les réservoirs sont développés à une pression allant jusqu'à 480 bars, et des efforts sont actuellement déployés pour créer des réservoirs fonctionnant à une pression allant jusqu'à 700 bars afin d'améliorer la capacité de volume. Pour leur conception, les réservoirs gazeux sont regroupés sous 4 types :

Tableau I.2 : Les différents types de réservoirs gazeux[1] .

Type I	réservoir cylindrique en métal
Type II	réservoir contenant une enveloppe de métal pour la tenue mécanique, frettée par des fibres continues imprégnées de résine.
Type III	réservoir constitué d'une enveloppe de métal pour contenir l'hydrogène et d'une enveloppe de fibres continues imprégnées de résine pour la tenue mécanique.
Type IV	réservoir constitué d'une enveloppe non métallique pour contenir l'hydrogène et d'une enveloppe de fibres continues imprégnées de résine pour la tenue mécanique.

Type	I	II	III	IV
Schéma				
Réalisation				

Le choix de l'enveloppe de contact hydrogène (doublure) est important pour chaque type de réservoir. Dans le premier type, le revêtement est directement responsable des contraintes mécaniques, il est donc préférable d'utiliser un matériau avec une limite d'élasticité élevée comme l'acier. Dans les troisième et quatrième types, le revêtement agit comme une barrière de pH, de préférence en utilisant une substance à faible perméabilité à l'hydrogène comme l'aluminium dans le troisième type.

Les normes d'amélioration de l'enroulement de fil comprennent plusieurs éléments tels que la largeur de la fibre, les motifs d'enroulement, les coins d'enroulement et le nombre de passages.

## I.5.2- Stockage liquide :

Le stockage d'hydrogène liquide nécessite un refroidissement à une température très basse d'environ  $-253\text{ °C}$ . Cette technologie est courante dans les applications spatiales et le stockage fixe, comme les stations-service et les hôpitaux. La capacité volumétrique est importante, mais les températures extrêmement basses restent le principal défi, ainsi qu'une énergie de liquéfaction élevée. Cette technique est mieux adaptée au stockage fixe, où de grandes méthodes d'isolation thermique peuvent être utilisées, tandis que dans les applications mobiles, le chauffage peut provoquer l'évaporation de l'hydrogène, nécessitant son rejet pour réduire la pression interne dans le réservoir. L'utilisation d'un véhicule hybride peut remplir l'hydrogène pour les longs trajets.



Figure I.4 Station service cryogénique Linde[1].



Figure I.5 : Ariane 5, étage cryogénique[1].

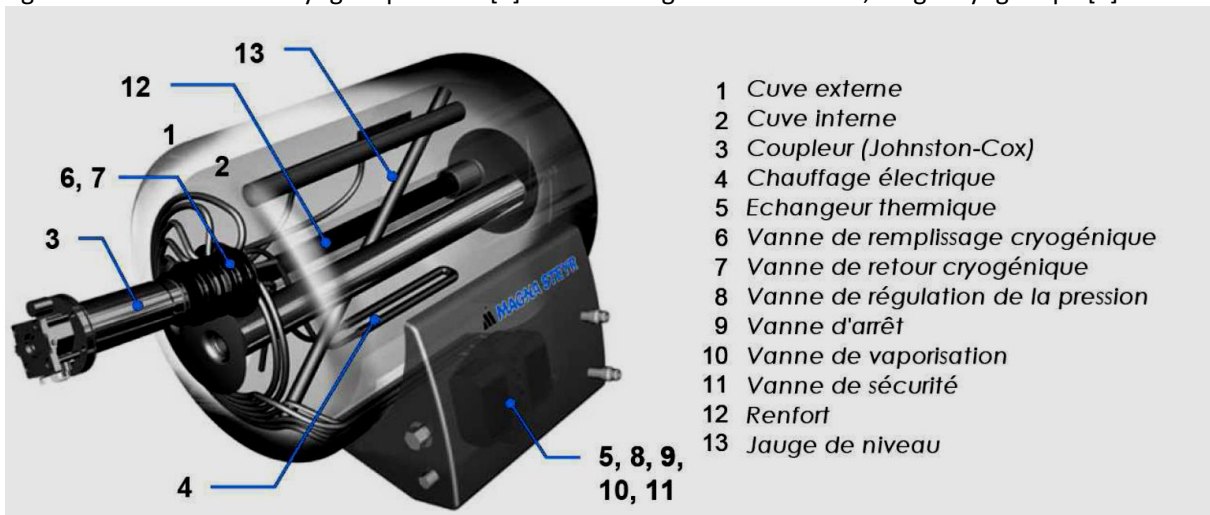


Figure I.6 : Réservoir cryogénique (ou cryostat) développé par Magna Steyr[1].

### I.5.3- Stockage solide:

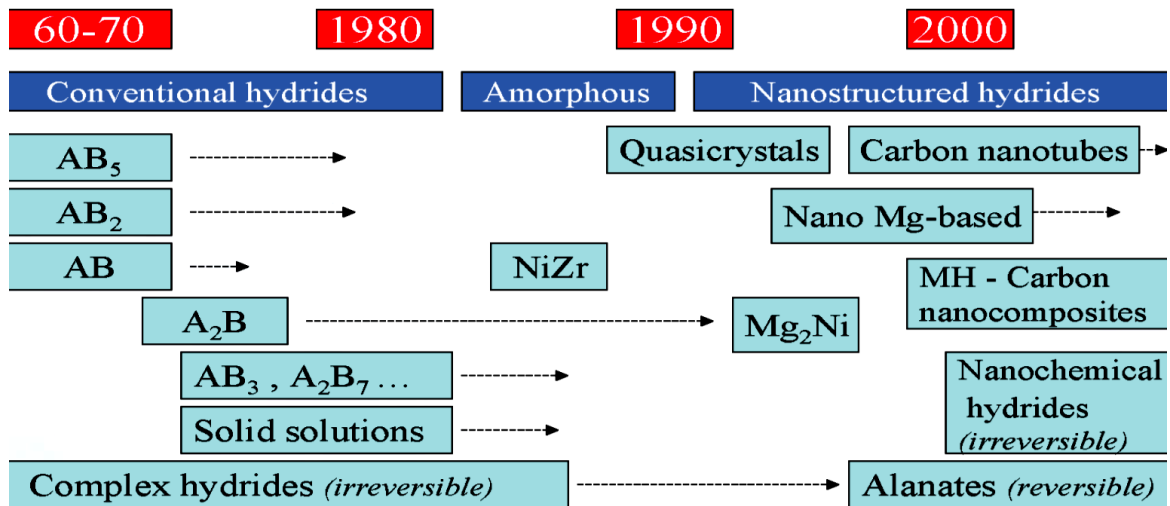


Figure I.7 : Développement du stockage solide depuis 50 ans[1] .

Il y a eu de nombreuses études sur le stockage de l'hydrogène dans le palladium et d'autres matériaux, ce qui indique l'intérêt des scientifiques pour trouver des moyens efficaces de stocker l'hydrogène Figure I.7.

Tableau I.3 : Les différents groupes de stockage solide .

Stockage par adsorption	Hydrures chimiques (réactif avec l'eau)	Hydrures réversibles	Hydrures chimiques (thermique)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- charbon actif</li> <li>- nanotubes</li> <li>- nanofibre de graphite</li> <li>- MOFs, Zéolites, . . .</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- NaH encapsulé</li> <li>- LiH et <math>MgH_2</math></li> <li>- <math>CaH_2</math>, <math>LiAlH_4</math>, . . .</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Alliages et composés intermétalliques</li> <li>- Nanocristaux</li> <li>- Hydrures complexes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Borozane d'ammoniac</li> <li>- Hydrure d'aluminium</li> </ul>

Le stockage solide semble être la voie la plus prometteuse, avec des capacités de volume en nette augmentation par rapport au stockage liquide. Certaines formes agissent comme des dispositifs de stockage solides dans des conditions de température et de pression standard, et le stockage solide varie dans différentes formes, telles que des organigrammes et des feuilles de calcul. Le tableau 3 présente quatre catégories principales, y compris les composés et objets inter-métaux, tandis que Sandrock fournit un diagramme (figure I.8 ) pour la représentation des familles d'eau.



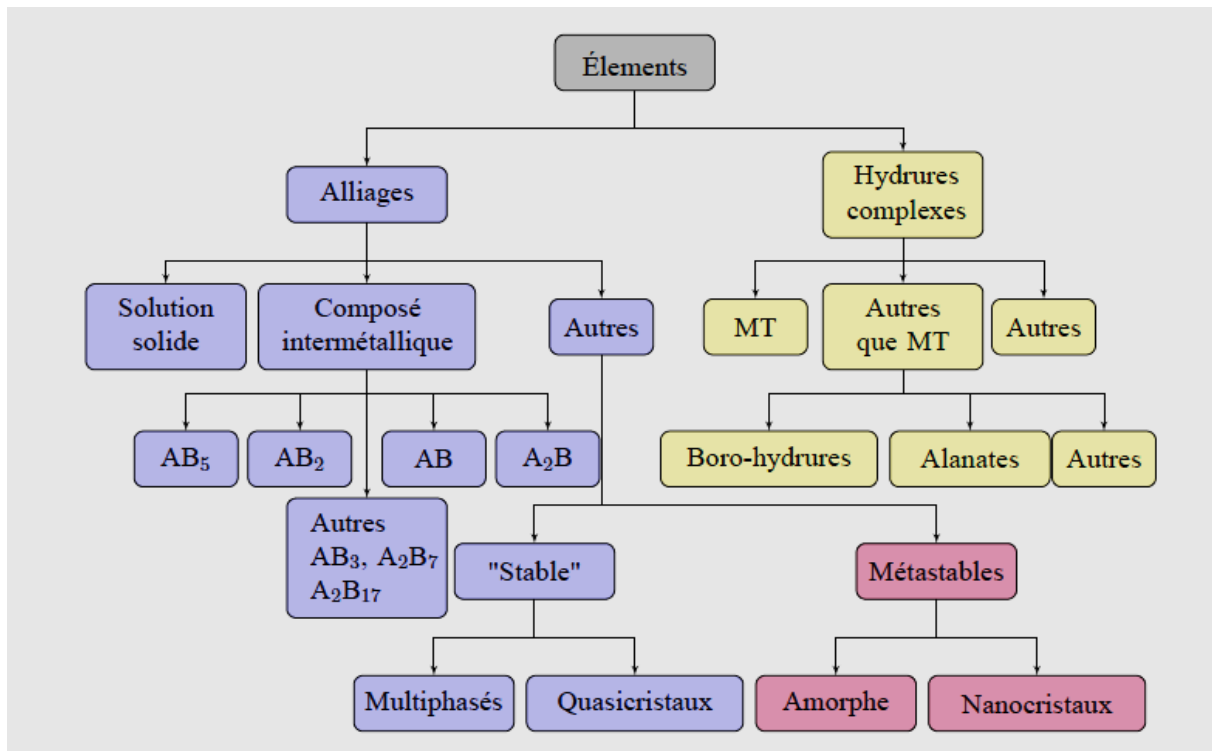


Figure I.8: Famille pour le stockage solide . MT= métaux de transition[1]

### I.5.4- Stockage hybride:

#### I.5.4.1- Projet solhy :

L'idée du projet Solhy combine une couche de composé entre les métaux et un réservoir de stockage de gaz de type III (Figure I.9), où le composé agit comme un capteur d'hydrogène pour détecter toute fuite ou fissure dans le revêtement métallique ou le polymère, et l'hydrogène libéré est stocké par le composé entre les métaux qui absorbe facilement l'hydrogène sans perturber.

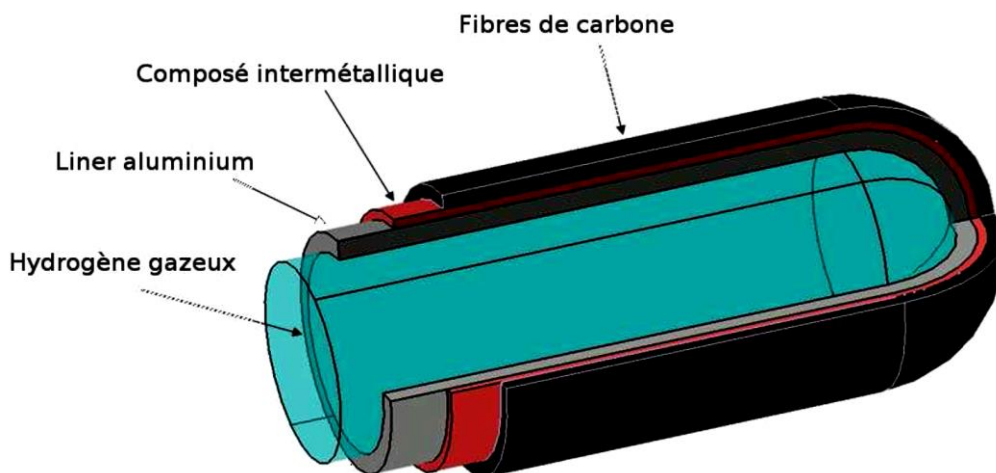


Figure I.9 : Projet Solhy : schéma de principe[1]

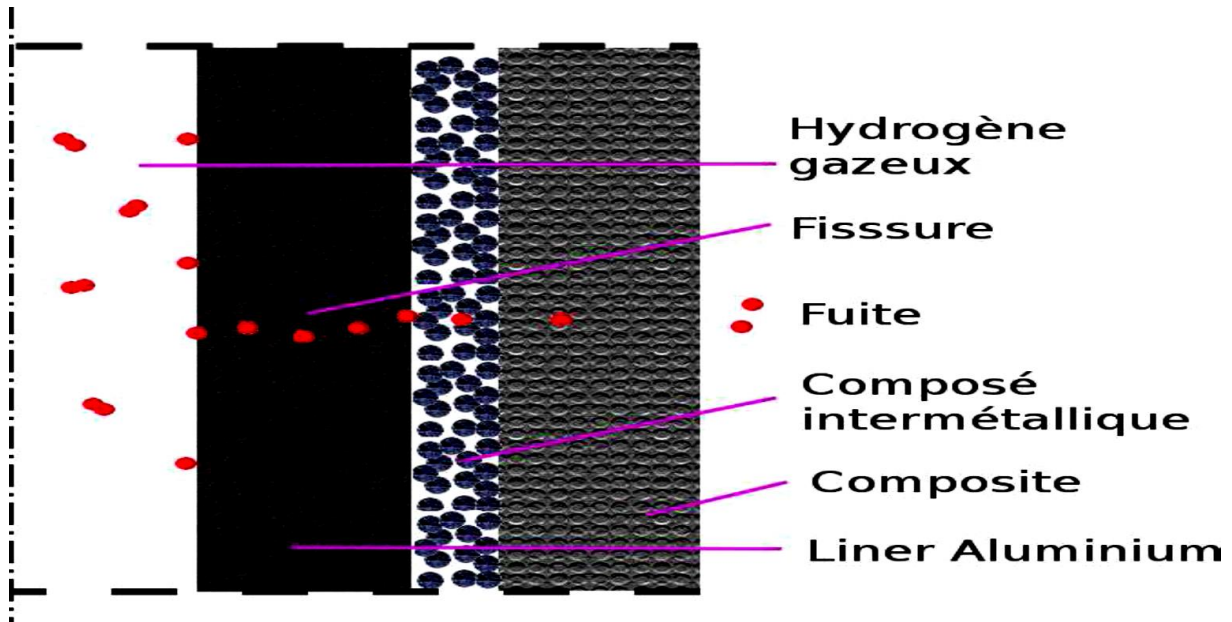


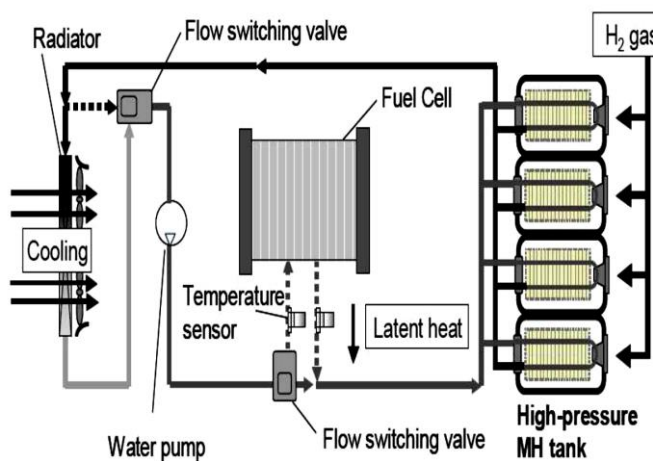
Figure I.10 : Compétition entre absorption par le composé intermétallique et la diffusion[1]

Étant donné que l'absorption est associée à la conversion de la phase hydrofuge, la chaleur augmentera en cas de fuite, et placer des capteurs de température sur la surface du réservoir aide à prévenir les dommages. De plus, l'expansion associée à la conversion de phase peut fermer l'incision. Cependant, les limites du système sont imposées par la capacité des minéraux à absorber l'hydrogène avant qu'il ne passe complètement par la prolifération.

#### I.5.4.2- Stockage hydrures sous haute pression gazeuse :

Toyota s'est orientée vers le développement d'une nouvelle technique qui combine le stockage de métal avec le stockage de gaz hydrogène (figure I.11 ), basée sur le succès de sa Prius.

Le tableau I.4 fait référence aux avantages des solutions hybrides par rapport aux techniques invasives et solides, soulignant qu'elles combinent leurs avantages et dépassent les défauts des deux technologies, tels que le problème de sécurité à haute pression et le poids racine.



(a)

Schéma d'implantation d'un réservoir d'hydrures



(b)

Réservoir d'hydrures métalliques



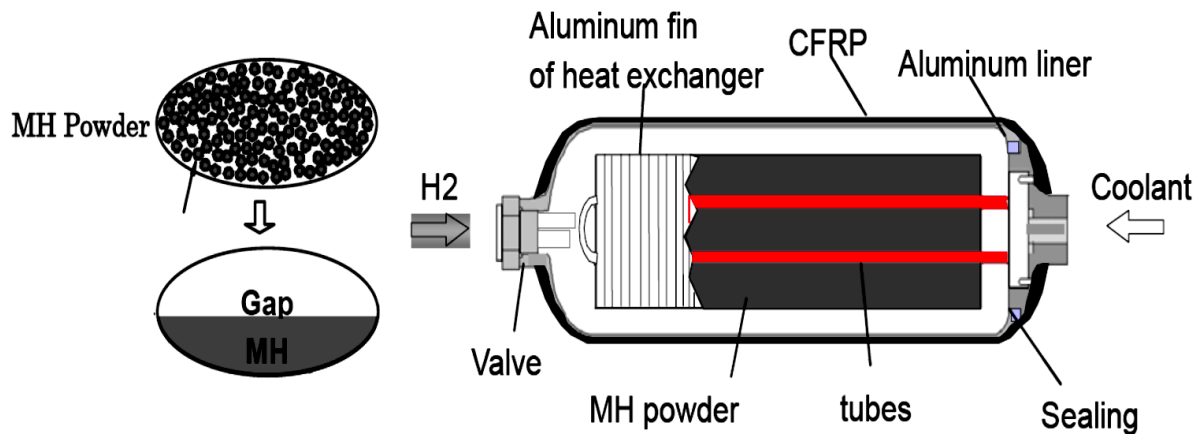


Figure I.11 : Solution hybride développée par Toyota[1].

Tableau. I.4 : Comparaisons entre stockage solide, stockage gazeux et stockage hybride solide/gazeux[1]

Réservoir	MH Basse Pression	Haute Pression	MH Haute Pression
Capacité de stockage d'hydrogène	3.5 Kg/120 L	3Kg/180 L	7.3 Kg/180 L
Poids du réservoir	300 Kg	<100 Kg	420 Kg
Rapport massique	1.16 %	<3 %	1.74 %
Temps de remplissage	30 min-1 h avec un système de refroidissement externe	5-10 min	5 min/ 80% Égale au réservoir haute pression sans système de refroidissement
Restitution de l'hydrogène à basse température	Impossible à basse température	Possible	Possible même à 243 K
Régulation	Difficulté en accélération	Bonne	Bonne Égale au réservoir haute pression
Sécurité	Basse pression (<10 bar)	Haute pression (350 bar)	Haute pression (350 bar)

---

**CHAPITRE II**  
**GENERALITE SUR LES MATERIAUX COMPOSITES**

---

## II.1-Introduction :

Les matériaux composites sont des matériaux fabriqués à partir de deux ou plusieurs composants distincts, chacun apportant des propriétés spécifiques. Ils sont largement utilisés dans divers domaines tels que l'aérospatiale, l'automobile, le génie civil et le sport en raison de leur légèreté, leur résistance et leur durabilité. Ces matériaux sont composés d'une matrice, qui agit comme une structure de support, et de renforts, qui renforcent les propriétés mécaniques du matériau final. Les composites offrent des possibilités de conception innovantes et sont souvent choisis pour leurs performances supérieures par rapport aux matériaux traditionnels.

## II.2- Définition :

Les matériaux composites consistent en l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de deux natures différentes, où leur assemblage conduit à l'acquisition d'un matériau avec de meilleures performances que les ingrédients individuels. Typiquement, le matériau composite se compose d'une phase continue avec des phases intermittentes, connues sous le nom de force excessive ou de matériau de renforcement, et a des caractéristiques mécaniques élevées par rapport à la phase continue, connue sous le nom de matrice.

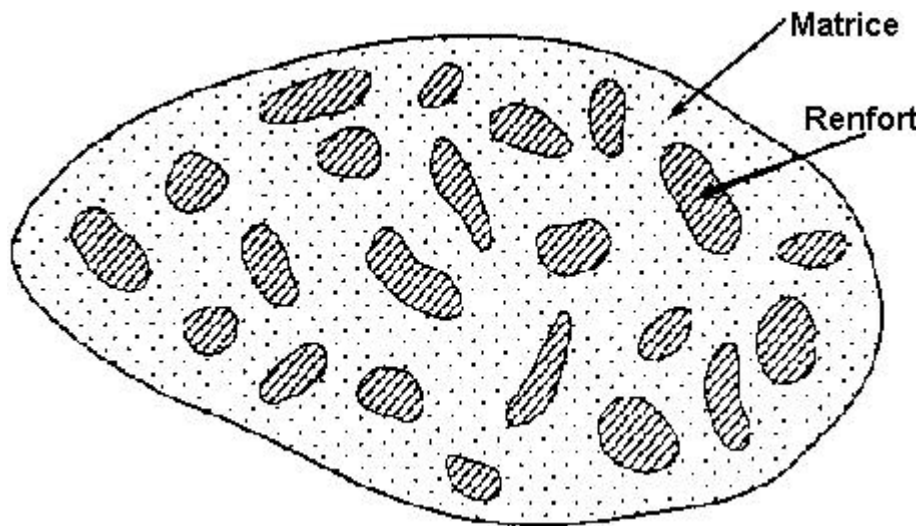


Figure II.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite[4].

Bien qu'il existe différentes sortes de matériaux composites (comme par exemple le Béton, le contreplaqué.....), ce terme s'adresse plus particulièrement aux pièces plastiques constituées d'une matrice polymère et d'un élément renforçant de type fibreux tel que défini dans la figure suivante:

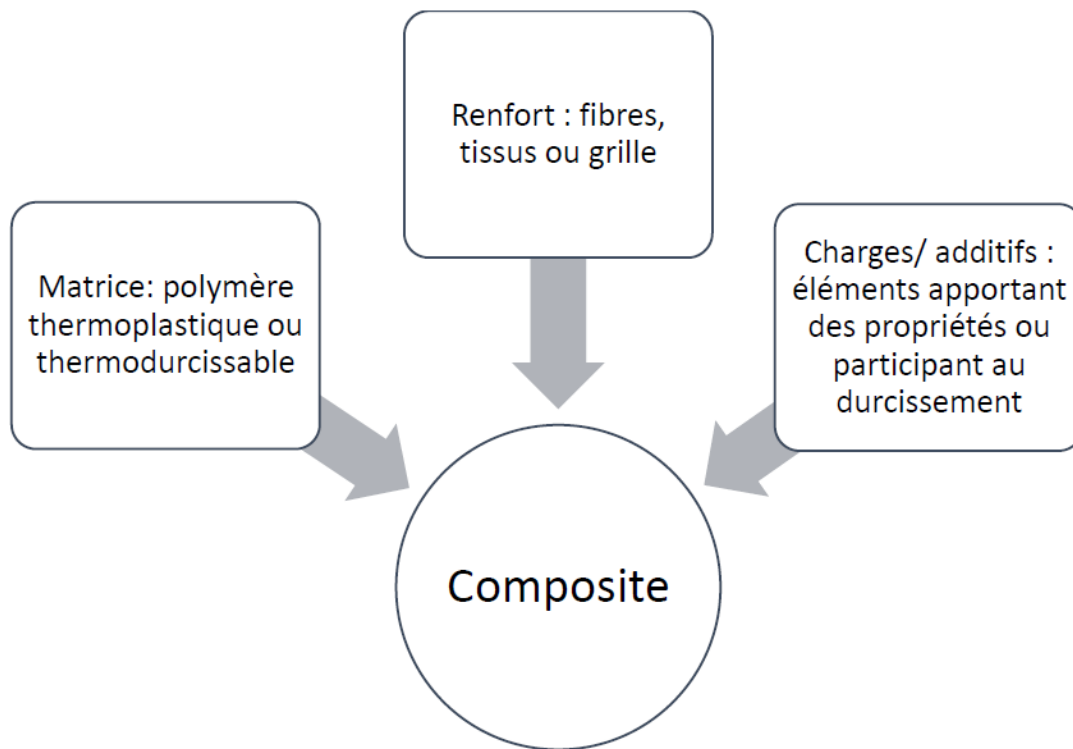


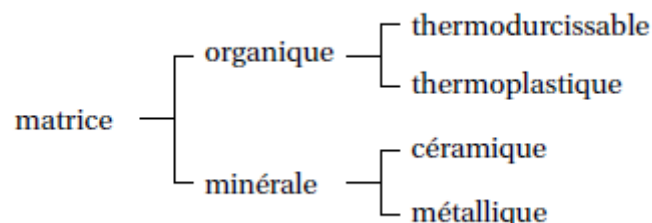
Figure II.2 : Composition d'un matériau composite[4].

## II.3- Les constituants des matériaux composites:

### II.3.1- Les Matrices :

Dans de nombreux cas, la résine polymère est utilisée comme matrice pour les matériaux composites, car ces résines sont disponibles dans différents types adaptés à des applications spécifiques. Dans les applications qui nécessitent une tolérance aux températures très élevées, des matériaux composites contenant une matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Les matériaux en carbone peuvent résister à des températures allant jusqu'à

des types de  
illustrée à la



2200 °C. La classification matrice est figure II. 3.

figure II. 3 : Types de matrice[5].

#### II.3.1.1- Résines thermodurcissables :

Les résines à codage thermique ont des propriétés mécaniques élevées et ne peuvent être repoussées qu'une seule fois. Ces résines sont similaires aux polymères non conducteurs en suspension dans les solvants, tels que le polystyrène insaturé et les résines de condensation telles que les phénols, les sprays et les furanes, ainsi que les résines époxy. Des exemples de

résines de codage thermique classiquement connues sont 914, 5208, 70, LY556. Les substances actives utilisant ces résines ont des propriétés mécaniques élevées et une faible densité, comme le montre le tableau II.1.

Tableau II.1 : Caractéristiques des résines thermodurcissables[5].

résines	T <sub>f</sub> (°C)	ρ(Kg/m <sup>3</sup> )	ε <sub>t</sub> <sup>R</sup> (%)	σ <sub>t</sub> <sup>R</sup> (MPa)	σ <sub>c</sub> <sup>R</sup> (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
époxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

### II.3.1.2-Résines thermoplastiques :

Les résines thermoplastiques ont de faibles propriétés mécaniques et doivent être traitées à des températures très élevées. Parmi ces résines thermoplastiques, citons les polychlorures de vinyle (PVC), le polyéthylène, le polypropylène, le polystyrène et le polyamide polycarbonate. Des exemples de résines thermoplastiques classiques sont PEEK et K3B.

Comme les résines à codage thermique, les substances actives qui utilisent ces résines ont des propriétés mécaniques élevées et une faible densité, comme le montre le tableau II.2[5].

Tableau II.2 : Caractéristiques des résines thermoplastiques[5]

résines	T <sub>f</sub> (°C)	ρ(Kg/m <sup>3</sup> )	ε <sub>t</sub> <sup>R</sup> (%)	σ <sub>t</sub> <sup>R</sup> (MPa)	σ <sub>c</sub> <sup>R</sup> (MPa)	E (GPa)
polyesters	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
phénoliques	120	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

### II.3.1.3-Les matrices métalliques :

Des composés de matrice métallique ont été développés pour améliorer les propriétés des métaux et surmonter les défauts des composés de matrice organique tels que les limites de température et le vieillissement. Le renforcement des métaux et de leurs alliages par la fibre permet d'améliorer la dureté, la résistance mécanique et la résistance à la fatigue à température ambiante et aussi à hautes températures. Des exemples de composés de matrice métallique sont l'aluminium, le magnésium et le titane soutenus par de longues fibres de carbone, du carbure de silicium, de l'alumine ou du bore, offrant des propriétés de commercialisation élevées et une stabilité à haute température. Ces matériaux ont une excellente résistance environnementale et ne sont pas affectés par la lumière ultraviolette, et maintiennent également une bonne stabilité de dimension et une bonne conductivité électrique et thermique[4].

### II.3.1.4- Les matrices céramiques :

Les matrices céramiques sont principalement composées de composés tels que des oxydes, des nitrures et des carbures tels que l'aluminium, le silicium, le chrome, le magnésium, le carbure de silicium et le nitrure de silicium, et présentent une bonne résistance à la pression et une faible densité par rapport aux matrices métalliques, mais ils ne sont pas antichoc et nécessitent des techniques de traitement coûteuses. Le tableau II.3 montre les caractéristiques de certains matériaux céramiques utilisés comme matrice dans les composés[6].

Tableau II.3 : Principales caractéristiques des céramiques utilisées comme matrice dans les matériaux composites (Dupeux, 2008)[6].

Type de céramique	Masse vol. (Mg/m <sup>3</sup> )	Temp. de fusion ou de ramoll.	Conduc. therm. (W/m-K)	Coeff. de dilatation linéaire (10 <sup>-6</sup> /K)	Module de Young (GPa)	Résist. compr. (MPa)
Carbone diamant	3,52	3720 à 3910	600 à 2200	0,8 à 1,2	990 à 1050	30000 à 65000
Alumine Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3,9	2050 à 2060	24 à 35	8 à 8,9	330 à 400	1750 à 3000
Zircone ZrO <sub>2</sub>	5,6	2680 à 2710	2 à 12	7 à 9	180 à 240	1650 à 3600
Carbure de silicium SiC	3,2	2700 à 2830	90 à 200	4,3 à 4,6	390 à 440	2000 à 3500
Nitride de silicium Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	3,2	1890 à 1900	15 à 43	2,6 à 3,3	280 à 310	11000 à 15000
Nitride de bore BN	2,1	2900 à 3100	20 à 52	1 à 10	20 à 100	225 à 540
Carbure de titane TiC	4,9	3170 à 3250	18 à 25	6,6 à 7,4	420 à 450	3570 à 5850
Carbure de tungstène WC	15,6	2820 à 2920	28 à 88	4,5 à 7,1	600 à 670	6600 à 10000
Carbure de bore B <sub>2</sub> C	2,5	2410 à 2450	27 à 36	3,5 à 5,6	440 à 472	1400 à 3400
Quartz SiO <sub>2</sub>	2,2	–	1,4 à 1,5	0,48 à 0,52	54	1200
Salions Si <sub>3</sub> ,Al <sub>3</sub> ,O <sub>3</sub> ,N <sub>5</sub>	3,25	2480 à 2540	18 à 23	3,3 à 3,7	265 à 300	3800 à 4500

### II.3.2-Les renforts :

Les renforts mécaniques des matériaux composites impliquent l'utilisation d'une variété de fibres disponibles sur le marché, dont les caractéristiques et le coût varient en fonction des besoins structurels. Ces fibres se caractérisent par leur diversité et leur disponibilité commerciale, permettant de choisir la bonne option pour l'application spécifique[4].

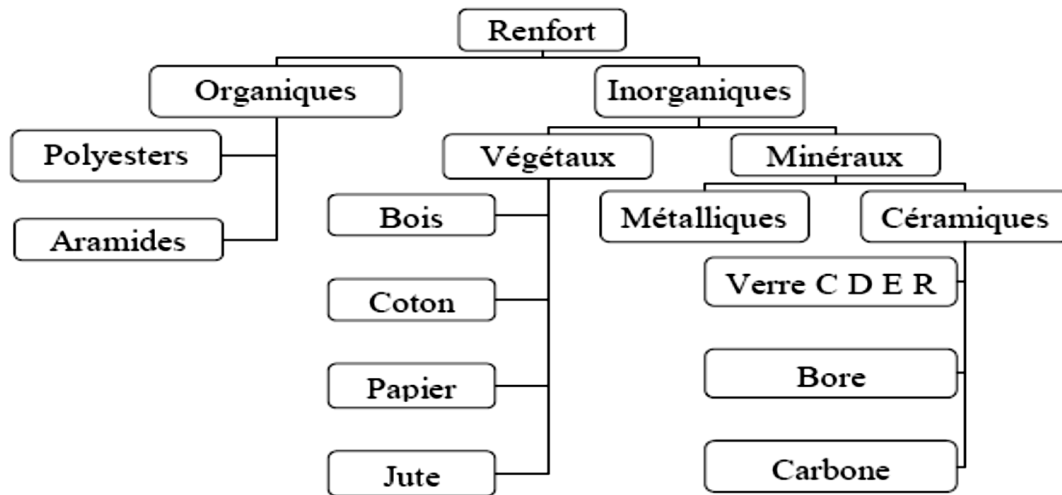


figure II.4 : Différentes familles du renfort[4].

### II.3.2.1-Fibre de verre :

Le renfort de base des composés (GD) est composé de silice (SiO<sub>2</sub>) et d'additifs tels que l'alumine, le carbonate de chaux, la magnésie et l'oxyde de bore. Il existe trois types de fibre de verre :

- Verre E : pour applications courantes et à grande diffusion.
- Verre R : pour véhicules haute performance.
- Verre D : pour la fabrication de circuits imprimés.

### II.3.2.2-Fibre de carbone :

Ces fibres sont le plus couramment utilisées dans les applications de haute performance, obtenues par le carbonate de fibres PAN (poly acrylonitrile), selon la température de combustion, il existe deux types de fibres de carbone :

- Fibre à haute résistance (FC) : brûle à une température comprise entre 1 000 et 1 500 °C.
- Fibre à coefficient élevé : brûle à une température comprise entre 1800 et 2000 °C.

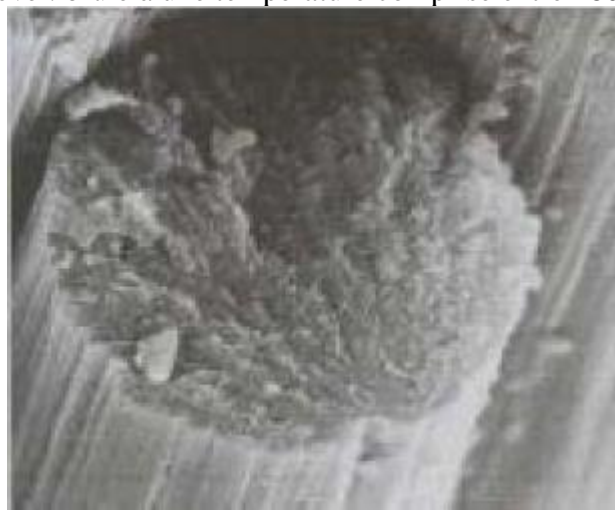


Figure II.5 : Fibre de carbone constituée de plusieurs centaines de filaments.

### II.3.2.3- Fibre d'aramide :

Les fibres d'aramide, souvent appelées CAVLAR, sont des fibres dérivées de la chimie des polyamide aromatiques liés à l'amide, et leurs propriétés diffèrent du polyamide aliphatique. Ces fibres sont disponibles en deux types différents en termes de dureté :

- Fibre optique basse (70 GPA) : utilisée pour les câbles et les boucliers du corps.
- Fibre haute (130 GPA) : utilisée dans les véhicules haute performance.

#### **II.3.2.4-Fibre à base de bore :**

Les fibres à haut coefficient qui ne sont pas sensibles à l'oxydation à des températures élevées sont obtenues par dépôt de gaz sur le substrat de tungstène.

#### **II.3.2.5-Fibre à base de silice ou de quartz :**

Les fibres sensibles à haut coefficient et non oxydantes telles que le verre sont produites par fusion, principalement utilisées dans les buses de moteurs de fusées en raison de leur résistance chimique et thermique élevée.

#### **II.3.2.6-Fibres de polyéthylène de haut module :**

Les fibres synthétiques de polyamide ou de polyester ont une très bonne résistance à la traction, mais leur mouillabilité est faible. Pour les structures à faible contrainte, elles peuvent toujours être utilisées. Les caractéristiques des améliorations sont indiquées dans le tableau (II.4) [7].

Tableau II.4 : Caractéristiques moyennes des renforts[7].

Caractéristiques	Matrices TP					
	PP	PPS	PA	PES	PEI	PEEK
<b>Masse volumique (Kg/m3)</b>	900	1300	1100	1350	<b>1150</b>	1300
<b>Module d'élasticité longitudinal (MPa)</b>	1200	4000	2000	3000	3300	4000
<b>Coefficient de poisson</b>	0.4	/	0.35	/	/	/
<b>Coefficient de dilatation thermique (C-1)*10<sup>5</sup></b>	9	5	8	6	6	5
<b>Contraintes de rupture Traction (MPa)</b>	30	65	70	85	105	90
<b>Allongement à rupture(%)</b>	20 à 400	100	200	60	60	50

### **II.4- les types de matériaux composites :**

Les composites basés sur leur taux d'utilisation sont classés en deux catégories principales : les composites à grande diffusion et les composites hautes performances .

#### **II.4.1-Les composites à grande diffusion :**

Les composés qui font partie de 95% des composés couramment utilisés forment du plastique renforcé ou du plastique renforcé, et le taux d'amélioration est généralement d'environ 30%. Dans 90% des cas, le contraste n'est pas déterminé car les renforts sont des fibres courtes. Les blocs de construction comprennent des résines de polyester avec de la fibre de verre, où le renforcement et la matrice sont à des coûts similaires dans ce cas.



## II.4.2-Les composites hautes performances :

Ces véhicules sont principalement utilisés dans l'industrie aéronautique et se caractérisent par un coût élevé. Les renforts sont des fibres assez longues, et le taux de renfort dépasse 50%, où les renforts sont le principal facteur affectant le coût. Ils ont des caractéristiques mécaniques telles que la résistance et la rigidité, où ils sont beaucoup plus élevés que ceux trouvés dans les minéraux, et cela contraste avec les véhicules à large diffusion[4].

## II.5- Classification des matériaux composites :

Les matériaux composites sont classés par type de renforcement utilisé en trois groupes principaux : les matériaux renforcés par des particules, les matériaux renforcés par des fibres et les matériaux structuraux. La figure II.6 montre les différents types de composés, et il convient de noter qu'il existe d'autres types de matériaux classés comme véhicule par certains scientifiques, tels que les matériaux FGM, le bois et certaines structures tissées.

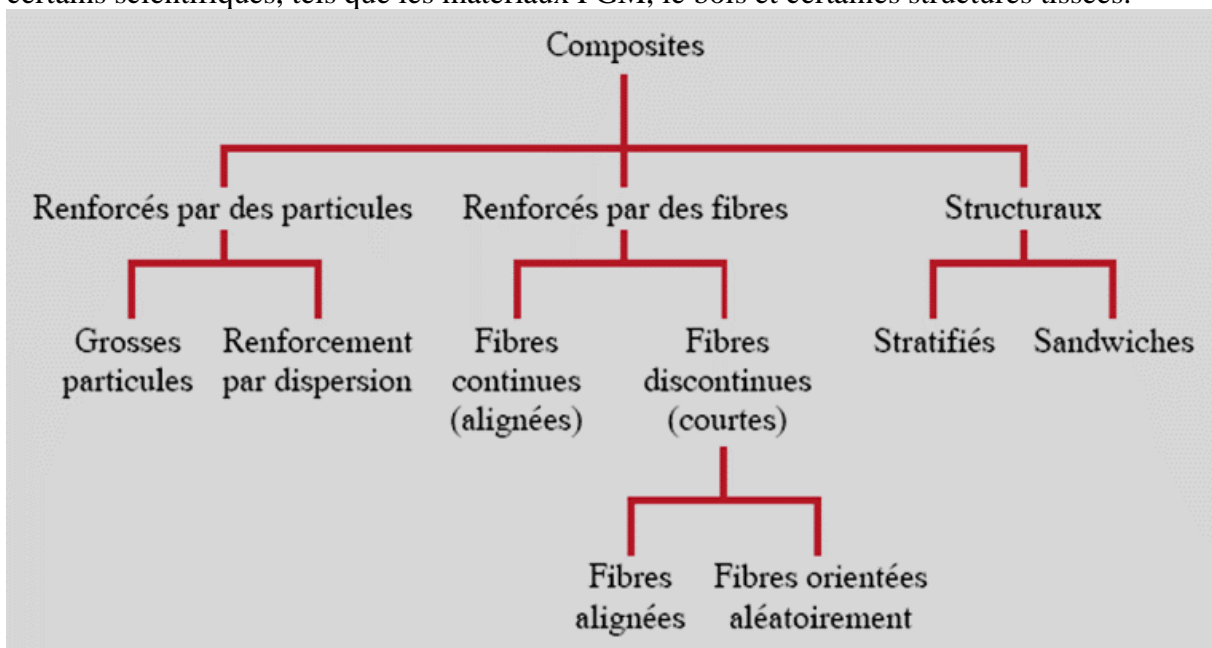


Figure II.6: Classification des matériaux composites (William & Callister, 2001)[6].

### II.5.1- Composites renforcés par des particules :

Dans cette catégorie, les matériaux composites sont renforcés par de grandes particules telles que le béton et les polymères chargés, où la géométrie des particules varie mais leurs dimensions restent similaires dans toutes les directions. Certains matériaux composites sont également renforcés par la dispersion, où les microparticules sont dispersées à partir d'une substance qui n'est pas très active dans une petite proportion habituellement dans les matrices métalliques.

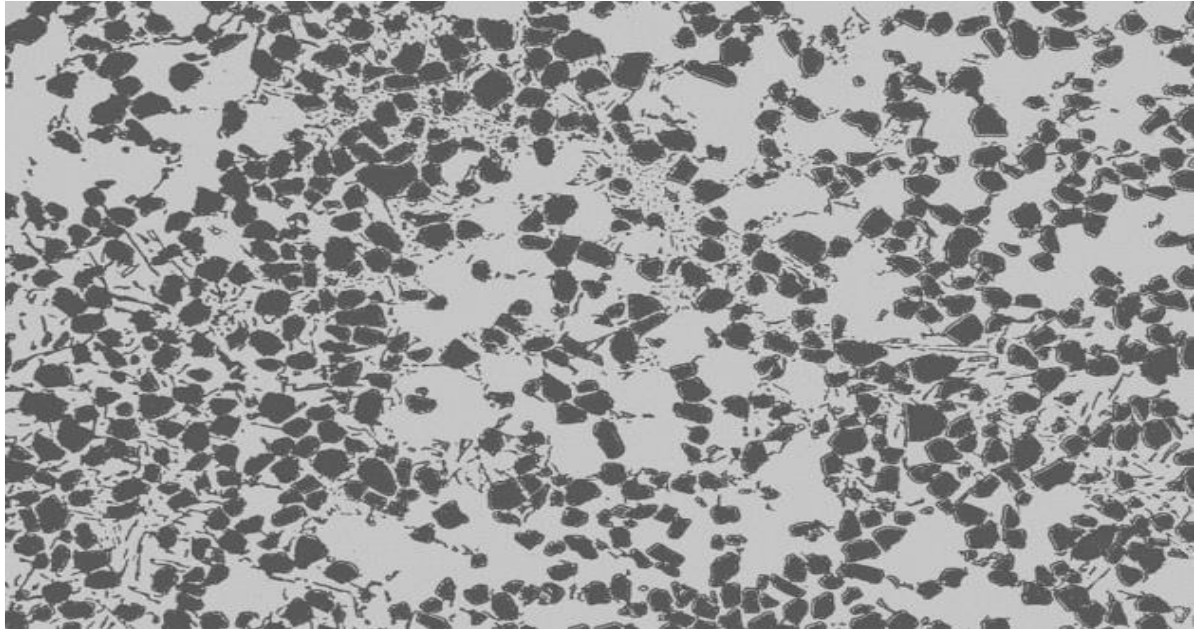
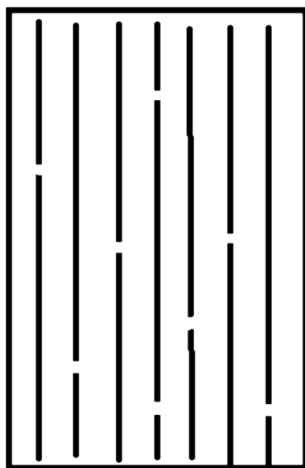


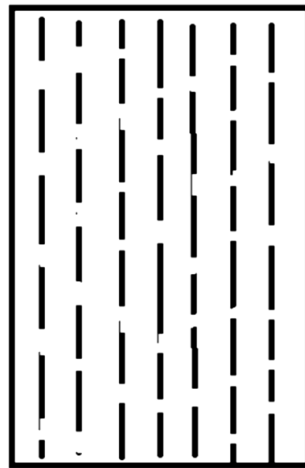
Figure II.7 : Composite à matrice métallique renforcé par dispersion (Hairy, 2018)[6].

### II.5.2- Composites renforcés par des fibres :

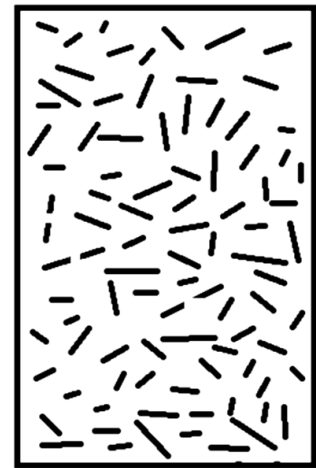
Ces composés sont développés pour obtenir des matériaux solides et légers. Les matériaux polymères renforcés de fibres sont classés dans cette catégorie en deux sous-groupes : les matériaux renforcés de fibres continues (fibres longues alignées) et les matériaux renforcés de fibres intermittentes (fibres courtes). Ces fibres courtes peuvent être alignées ou dirigées aléatoirement. La figure II.8 montre différentes configurations de composés renforcés de fibres.



Fibres continues et alignées



Fibres discontinues et alignées



Fibres discontinues et orientées aléatoirement

Figure II.8 : Les différents types des composites renforcés par des fibres[6].

### II.5.3- Composites structuraux :

Les composés structuraux sont constitués de matériaux homogènes et composites. Les composés structuraux sont classés en deux groupes :

### II.5.3.1- Les stratifiés :

La couche composite est un empilement de panneaux dont les propriétés varient selon la direction. Ces couches sont pavées et plâtrées de façon à ce que la direction de leur plus fort change d'une couche à l'autre, comme l'illustre la figure II.9. (Gornet, 2008).

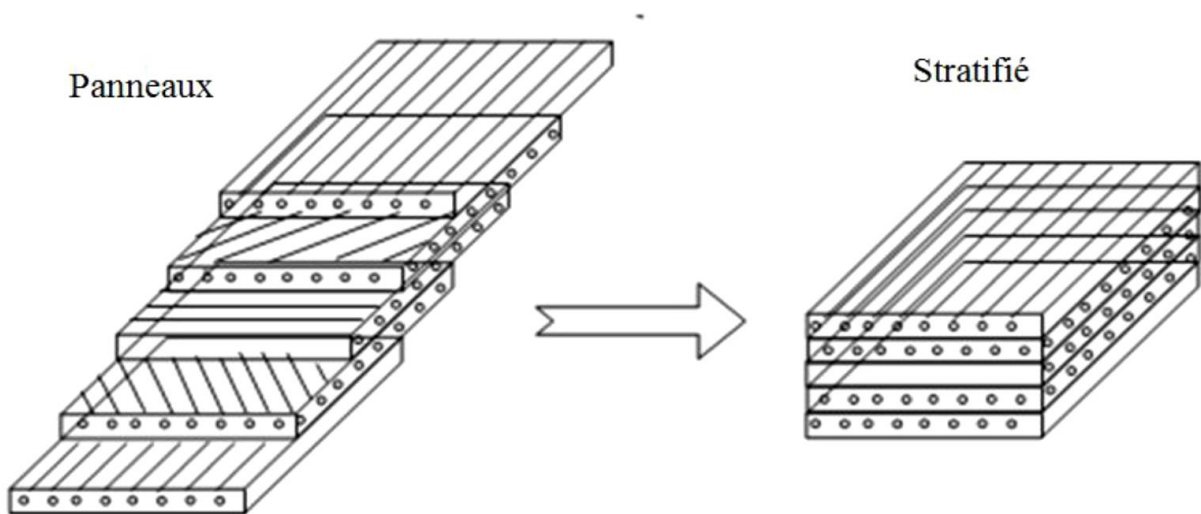


Figure II.9 : Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié[6].

### II.5.3.2- Les panneaux sandwich :

Ces composés comprennent deux couches de matériau hautement résistant, entre lesquelles un cœur est placé en moins d'intensité, moins de résistance et moins de dureté.

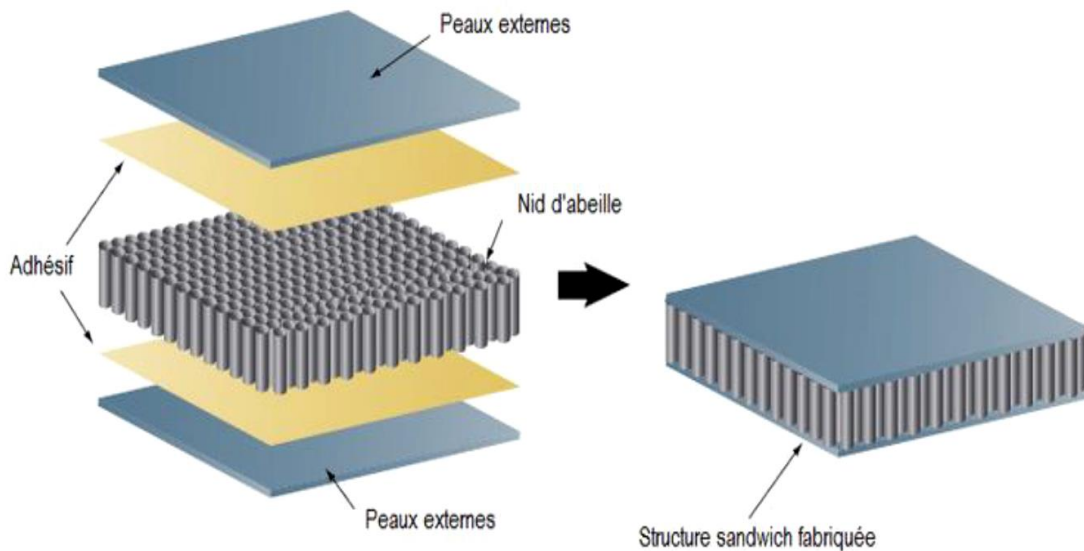


Figure II.10 : Représentation schématique d'un panneau sandwich1.[6]

## II.6- Techniques d'élaboration des matériaux composites :

Il existe de nombreuses façons de fabriquer des tondeuses composites. Certaines techniques de mise en œuvre de matériaux composites à base de matrice organique enrichie en fibres seront présentées au cours de ce segment[6].

### II.6.1- Moulage sans pression :

Le moulage sous pression est un procédé largement utilisé pour fabriquer des composés de fibre de verre, où il facilite la mise en œuvre et permet d'obtenir des pièces de différentes formes et dimensions. Cette technique comprend plusieurs méthodes, notamment [6]:

#### II.6.1.1- Moulage par contact :

Le principe consiste à placer les renforts (sous forme de mat ou de tissu) dans le moule après les avoir imprégnés manuellement d'une résine thermodurcissable. Il est possible de produire des pièces de formes variées, mais avec un taux de production très faible[4].

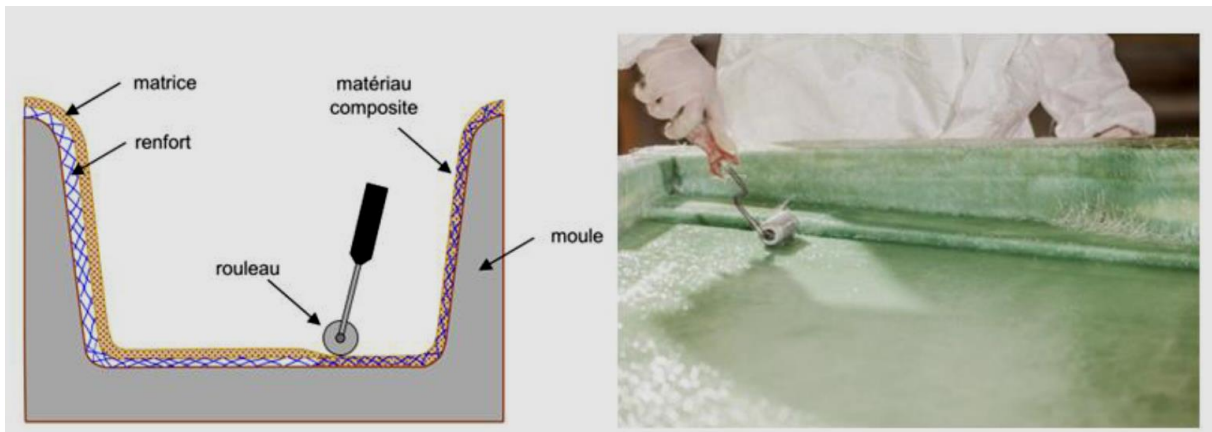


Figure II.11 : Moulage par contact[6].

#### II.6.1.2- Moulage par projection simultanée:

La coupe est coulée par projection simultanée de fibre de coupe et de résine sur le moule. Cela comprend une machine de découpe de feuilles et une pulvérisation pneumatique de résine et de pistolet à fibre. Ensuite, la fibre saturée de résine est pressée et bouillie. Ce procédé permet la production d'une grande série de pièces à faible coût[4].

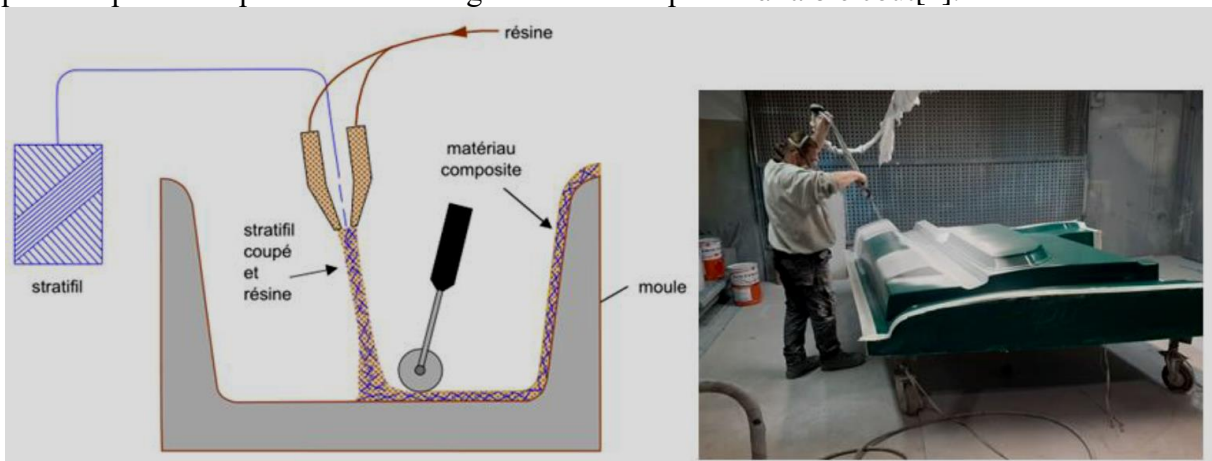


Figure II.12 : Moulage par projection simultanée[6]

### II.6.2- Moulage par centrifugation :

Technique exclusivement personnalisée pour la fabrication de pièces composites telles que tuyaux, cylindres et réservoirs. Dans ce processus, le moule est combiné et tourné avec du renfort et de la résine. Le renfort est pollinisé avec de la résine par centrifugeuse.

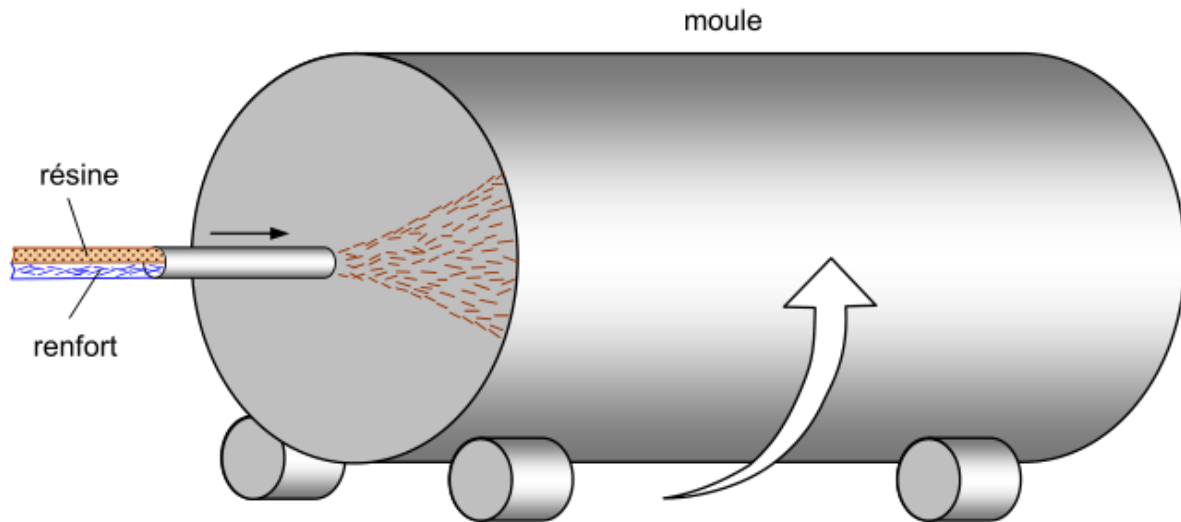


Figure II.13 : Moulage par centrifugation (Berthelot, 2010)[6].

### II.6.3- Moulage par enroulement filamentaire :

Dans cette technique, le renforcement est généralement brossé sous la forme de fibres continues, imprégnées de résine stimulée pour se former par la méthode de révolution rotative. Ensuite, le mouvement relatif du système de titrisation et de renforcement est effectué, permettant la formation de différents types de matériaux.

#### II.6.3.1- Enroulement circonférentiel :

L'enroulement est effectué à un angle de 90 degrés par rapport à l'axe du mandrin. Pour améliorer la résistance dans toutes les directions, il est nécessaire d'ajouter des couches unidirectionnelles dans le sens longitudinal du mandrin (Figure II.14).

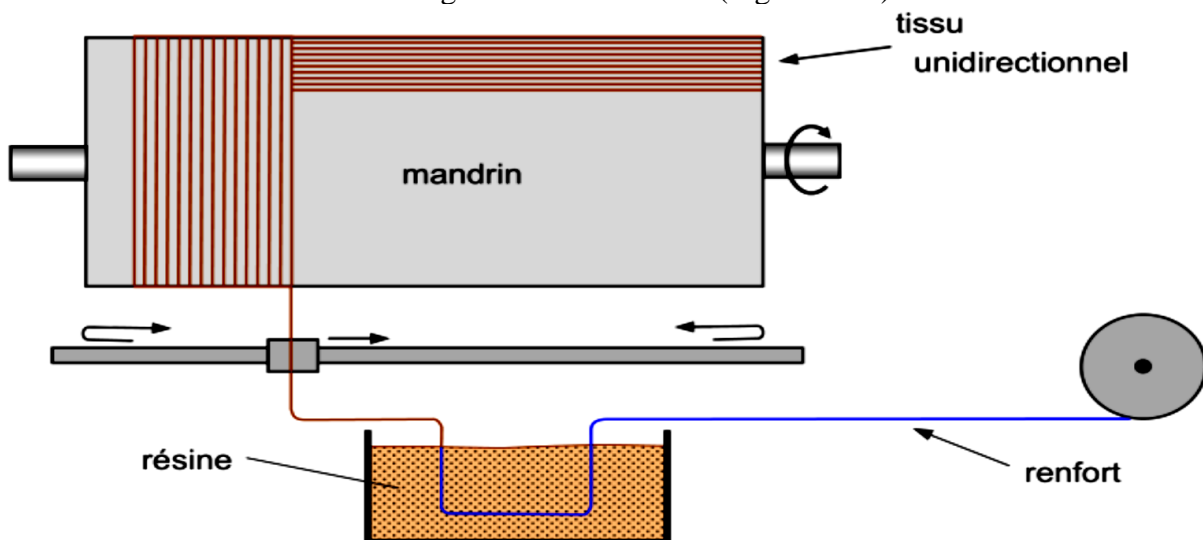


Figure II.14 : Moulage par enroulement circonférentiel (Berthelot, 2010)[6].

#### II.6.3.2- Enroulement polaire :

Cette technique permet la fabrication de pièces avec des extrémités sphériques en utilisant l'enroulement polaire pour l'axe du mandrin. Chuck a trois degrés de liberté pour tourner pour contrôler trois cycles en même temps. L'enroulement polaire est utilisé dans la fabrication de réservoirs haute pression, d'équipements spatiaux et d'autres applications (Berthelot, 2010).

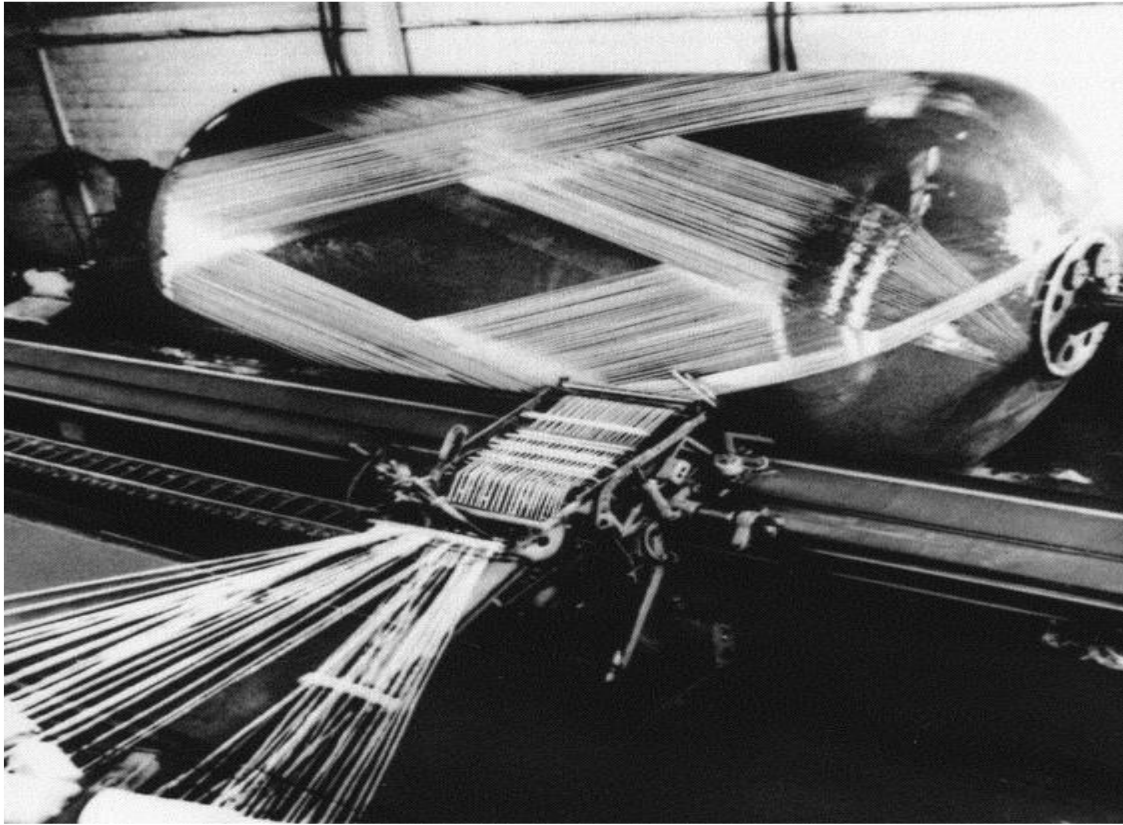


Figure II.15 : Moulage par enroulement polaire (Berthelot, 2010)[6]

## **II.7- Les avantages et inconvénients des matériaux composites pour certains produits :**

### **II.7.1-Produits aéronautique:**

La motivation principale pour l'utilisation de matériaux composites dans les structures d'avions est d'augmenter l'acquisition de masse tout en conservant d'excellentes propriétés mécaniques (Figure II.16 ). Par rapport aux matériaux métalliques, les matériaux composites ne sont pas sensibles à la fatigue et ne sont pas exposés à la corrosion, et une bonne isolation électrique est nécessaire lors de l'utilisation d'alliages légers entre les véhicules et les métaux pour éviter la corrosion galvanisée. Les techniques de fabrication utilisées permettent l'acquisition directe de formes complexes par coulée avec la possibilité de réaliser un assemblage monobloc (Figure II.17 ), ce qui réduit considérablement les coûts d'assemblage.





Figure II.16 : Pièces composites sur des structures d'aéronefs (transport aérien civil).



Figure II.17 : Les pièces composites sur des structures d'aéronefs(transport aérien militaire)[7].

### II.7.2-Produits militaires :

Pour les produits militaires tels que les missiles, le principal avantage réside dans la performance des matériaux composites. L'utilisation de matériaux montés sur des ailettes de direction de missile est autorisée pour assurer un contrôle efficace de la trajectoire du missile vers la cible finale en traitant les effets dynamiques et thermiques du frottement sur la structure.



Figure II.18 : Exemple des ailettes de guidage dans les missiles[7].

### II.7.3-Produits spatiaux (satellites):

La déformation de la structure peut être une source de chaleur, et la température d'exposition varie entre  $-180\text{ }^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est à l'ombre et  $+160\text{ }^{\circ}\text{C}$  lorsqu'il est exposé au soleil. En outre, les gradients de température entre les côtés éclairés et ombragés de la structure peuvent être importants. Les structures en matériaux composites à matrice organique permettent d'améliorer la direction des différentes couches grâce au coefficient de dilatation thermique négative de la fibre de carbone et au coefficient de dilatation thermique positive de la matrice, et le coefficient de dilatation thermique totale de la structure approche de zéro. L'utilisation de fibres de carbone à haut coefficient dans les composés peut aider à résoudre ce problème.



Figure II.19 : Exemple des composites dans les satellites[7].



---

**CHAPITRE III**  
**COMPORTEMENT MECANIQUE DES TUBES SOUS**  
**PRESSION ET GRADIENT DE TEMPERATURE**

---

### III.1 Introduction :

Les tubes composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie pétrolière et gazière en raison de leur meilleure résistance à la corrosion par rapport aux tuyaux en acier. Les premières alternatives composites comprennent des tubes qui utilisent des matrices thermoplastiques. Les tubes composites filetés en plastique renforcés de fibres ont une rigidité élevée, une bonne résistance à la corrosion et une bonne isolation thermique.

Ce travail consiste à étudier de prédiction du comportement thermo-mécanique de la partie tubulaire des réservoirs en matériau composite stratifié soumise à la pression interne et un gradient de température à travers l'épaisseur. Ces structures généralement obtenues par le procédé d'enroulement filamentaire sous différents angles d'orientation sont considérées à comportement anisotrope. La théorie d'élasticité des structures multicouches stratifiées est utilisée pour déterminer les champs des déplacements, des contraintes et des déformations dans l'épaisseur des différentes couches du tube. L'influence de l'angle d'orientation sur le comportement mécanique est ensuite analysée. Les résultats obtenus concernent une enceinte formée de six couches de stratification.

### III.2 Position du problème :

La partie tubulaire du réservoir est la plus sollicitée, ainsi l'étude portera essentiellement sur cette partie. On considère la partie cylindrique du réservoir représentée par la figure 1, ainsi le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$  est utilisé pour cette étude. Cette forme tubulaire est soumise à la pression interne ( $P_0$ ) et au gradient de température  $(T(r)-T_{ref})$  à travers l'épaisseur où  $T(r)$  et  $T_{ref}$  sont respectivement la température du tube et la température de référence. Les températures intérieure du fluide  $T_f$  et extérieure  $T_\infty$  sont considérées constantes. L'échange de chaleur à travers l'épaisseur se fait donc par convection et par conduction.

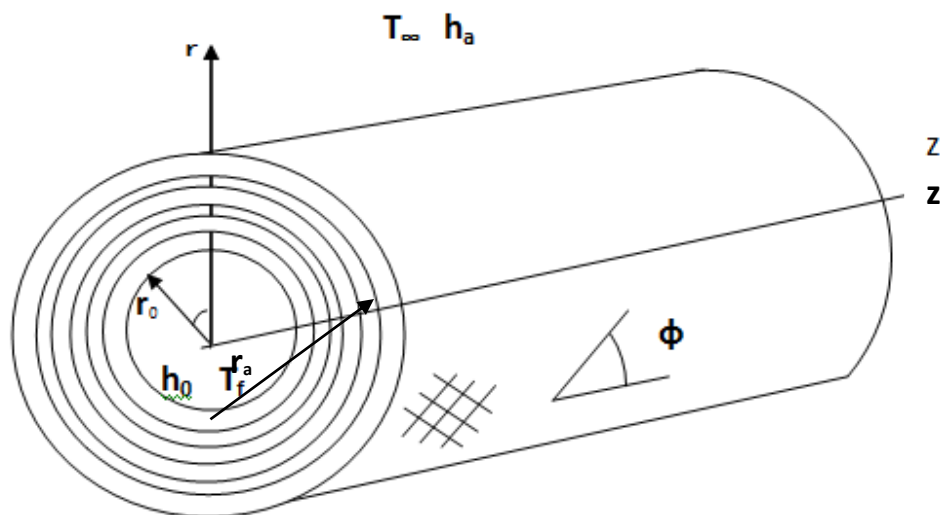


Figure III.1 : Tube composite multicouche en coordonnées cylindriques.

### III.3 Analyse thermique [8]:

La distribution de la température et les contraintes thermiques résultantes sont des paramètres importants dans la séparation des couches. En raison de la grande différence de coefficient de dilatation thermique entre la direction longitudinale et transversale des fibres, le

gradient thermique à l'intérieur d'une structure composite multicouche en angle entraîne d'importantes contraintes longitudinales et de cisaillement transversal.

La forme générale de l'équation de conduction thermique dans les coordonnées cylindriques est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

T : la température du tube

q : est le taux de production d'énergie interne

k: Coefficient de conductivité thermique

$\alpha$ : diffusivité thermique.

Supposons qu'il existe un tuyau de rayon intérieur ( $r_0$ ) et de rayon extérieur ( $r_a$ ). En raison de la grande longueur, de la symétrie axiale et des conditions stationnaires, la distribution de la température dans le tuyau dépend uniquement du rayon. En l'absence de génération de chaleur, l'équation différentielle du flux de chaleur se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (\text{III.2})$$

L'intégration de l'équation (III.2) donne la fonction de température suivante :

$$T = A + B \ln(r) \quad (\text{III.3})$$

A et B sont des constantes d'intégration.

La surface extérieure est exposée à la convection libre à la température ambiante ( $T_\infty$ ), et la surface intérieure est exposée à la convection forcée du fluide chaud à la température ( $T_f$ ).

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = h_0 (T_f - T) \quad \text{for } r = r_0 \quad (\text{III.4})$$

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = h_a (T - T_\infty) \quad \text{for } r = r_a \quad (\text{III.5})$$

où  $h_0$  et  $h_a$  sont les coefficients de transfert de chaleur par convection interne et externe, respectivement. En utilisant les conditions ci-dessus, les constantes d'intégration A et B peuvent être déterminées :

$$A = \frac{k \left( \frac{T_f}{r_a h_a} + \frac{T_\infty}{r_0 h_0} \right) + (T_f \ln r_a - T_\infty \ln r_0)}{k \left( \frac{1}{r_a h_a} + \frac{1}{r_0 h_0} \right) + \ln \left( \frac{r_a}{r_0} \right)} \quad (\text{III.6})$$

$$B = \frac{T_\infty - T_f}{k \left( \frac{1}{r_a h_a} + \frac{1}{r_0 h_0} \right) + \ln \left( \frac{r_a}{r_0} \right)} \quad (\text{III.7})$$

### III.4 Analyse thermomécanique[8][9] :

#### III.4.1 Analyse des contraintes et des déformations:

Le tube cylindrique composite à couches multiples est soumis à une charge thermique et mécanique axialement symétrique, ainsi qu'à une pression interne comme illustré dans la figure III.1. L'état de contrainte en coordonnées cylindriques est représenté sur la figure III.2.

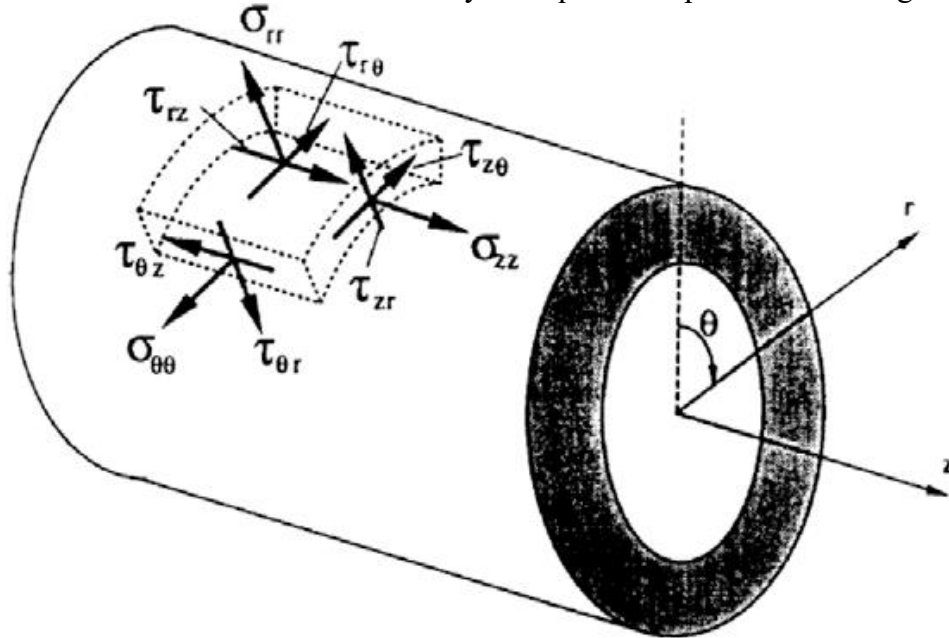


Figure III. 2 : État de contrainte dans un tuyau composite FW multicouche.

En effet, les contraintes et les déformations sont indépendantes de  $\Theta$ , c'est-à-dire que ( $\frac{\partial}{\partial \Theta} = 0$ ). De plus, les déformations radiales et axiales dépendent uniquement des coordonnées radiales et axiales respectivement. Avec les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement peut être exprimé comme suit.

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_\theta(r, z), \quad u_z = u_z(z) \quad (III.8)$$

Les déplacements radiaux, circonférentiels et axiaux sont représentés respectivement par  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$ . Le système de coordonnées cylindriques illustré dans la Figure III.2 est utilisé pour transformer les contraintes et les déformations pour la couche  $k$  du matériau composite orthotrope s'écrit selon la loi de Hooke généralisée :

$$[\sigma]^{(k)} = [C]^{(k)} \cdot [\varepsilon]^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{45} & \bar{c}_{55} & 0 \\ \bar{c}_{16} & \bar{c}_{26} & \bar{c}_{36} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_z - \alpha_z \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T \\ \varepsilon_r - \alpha_r \Delta T \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{z\theta} - 2 \alpha_{z\theta} \Delta T \end{bmatrix}^{(k)} \quad (III.9)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k)} &= \overline{c_{11}^{(k)}} \varepsilon_z^{(k)} + \overline{c_{12}^{(k)}} \varepsilon_\theta^{(k)} + \overline{c_{13}^{(k)}} \varepsilon_r^{(k)} + \overline{c_{16}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_z^{(k)} \Delta T \\
\sigma_\theta^{(k)} &= \overline{c_{12}^{(k)}} \varepsilon_z^{(k)} + \overline{c_{22}^{(k)}} \varepsilon_\theta^{(k)} + \overline{c_{23}^{(k)}} \varepsilon_r^{(k)} + \overline{c_{26}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_\theta^{(k)} \Delta T \\
\sigma_r^{(k)} &= \overline{c_{13}^{(k)}} \varepsilon_z^{(k)} + \overline{c_{23}^{(k)}} \varepsilon_\theta^{(k)} + \overline{c_{33}^{(k)}} \varepsilon_r^{(k)} + \overline{c_{36}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_r^{(k)} \Delta T \\
\sigma_{\theta r}^{(k)} &= \overline{c_{44}^{(k)}} \gamma_{\theta r}^{(k)} + \overline{c_{45}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} \\
\sigma_{zr}^{(k)} &= \overline{c_{45}^{(k)}} \gamma_{\theta r}^{(k)} + \overline{c_{55}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} \\
\sigma_{z\theta}^{(k)} &= \overline{c_{16}^{(k)}} \varepsilon_z^{(k)} + \overline{c_{26}^{(k)}} \varepsilon_\theta^{(k)} + \overline{c_{36}^{(k)}} \varepsilon_r^{(k)} + \overline{c_{66}^{(k)}} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_{z\theta}^{(k)} \Delta T
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\xi_z^{(k)} &= \overline{c_{11}^{(k)}} \alpha_z^{(k)} + \overline{c_{12}^{(k)}} \alpha_\theta^{(k)} + \overline{c_{13}^{(k)}} \alpha_r^{(k)} + \overline{c_{16}^{(k)}} \alpha_{z\theta}^{(k)} \\
\xi_\theta^{(k)} &= \overline{c_{12}^{(k)}} \alpha_z^{(k)} + \overline{c_{22}^{(k)}} \alpha_\theta^{(k)} + \overline{c_{23}^{(k)}} \alpha_r^{(k)} + \overline{c_{26}^{(k)}} \alpha_{z\theta}^{(k)} \\
\xi_r^{(k)} &= \overline{c_{13}^{(k)}} \alpha_z^{(k)} + \overline{c_{32}^{(k)}} \alpha_\theta^{(k)} + \overline{c_{33}^{(k)}} \alpha_r^{(k)} + \overline{c_{36}^{(k)}} \alpha_{z\theta}^{(k)} \\
\xi_{z\theta}^{(k)} &= \overline{c_{16}^{(k)}} \alpha_z^{(k)} + \overline{c_{26}^{(k)}} \alpha_\theta^{(k)} + \overline{c_{36}^{(k)}} \alpha_r^{(k)} + \overline{c_{66}^{(k)}} \alpha_{z\theta}^{(k)}
\end{aligned} \tag{III.11}$$

$\overline{C_{ij}^{(k)}}$  : les constantes de rigidité.

$\alpha_i^{(k)}$  : les coefficients de dilatation thermique .

$\Delta T$  : la différence de température .

$$\Delta T = T(r) - T_{ref} \tag{III.12}$$

$T_{ref}$  : la température de référence

$T(r)$  : est la distribution de température dans l'épaisseur

Les relations entre la déformation et le déplacement peuvent être décrites comme suit :

$$\begin{aligned}
[\varepsilon]^{(k)} &= \frac{1}{2} [\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u)]^{(k)} \\
\varepsilon_r^{(k)} &= \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta^{(k)} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k)}}{r} \\
\varepsilon_z^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \\
\gamma_{\theta r}^{(k)} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( \frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right) \\
\gamma_{z\theta}^{(k)} &= \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} \\
\gamma_{zr}^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{III.13}$$

Les équations d'équilibre dans les coordonnées cylindriques sont :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}[\sigma]^{(k)} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_{\theta}^{(k)}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{\theta r}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k)}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\theta r}^{(k)}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^{(k)}}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

En remplaçant l'équation (III.8) dans les équations (III.13) et (III.14), on obtient les formes simplifiées suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^{(k)} &= \frac{du_r^{(k)}}{dr} \\
 \varepsilon_{\theta}^{(k)} &= \frac{u_r^{(k)}}{r} \\
 \varepsilon_z^{(k)} &= \frac{du_z^{(k)}}{dz} = \varepsilon_0 \\
 \gamma_{zr}^{(k)} &= 0 \\
 \gamma_{\theta r}^{(k)} &= \frac{du_{\theta}^{(k)}}{dr} - \frac{u_{\theta}^{(k)}}{r} \\
 \gamma_{z\theta}^{(k)} &= \frac{du_{\theta}^{(k)}}{dz} = \gamma_0 r
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

Étant donné que  $(\gamma_0)$  représente la torsion du tuyau par unité de longueur, et que les déformations axiales de toutes les couches sont constantes avec une valeur de  $(\varepsilon_0)$ . Par conséquent, l'équation d'équilibre pour le problème actuel axisymétrique peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_r^{(k)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_{\theta}^{(k)}}{r} &= 0 \\
 \frac{d\sigma_{\theta r}^{(k)}}{dr} + \frac{2\sigma_{\theta r}^{(k)}}{r} &= 0 \\
 \frac{d\sigma_{zr}^{(k)}}{dr} + \frac{\sigma_{zr}^{(k)}}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Les deux équations (III.19) et (III.20) peuvent être résolues selon la forme suivante :

$$\sigma_{\theta r}^{(k)} = \frac{A^{(k)}}{r^2} \quad ; \quad \sigma_{zr}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{r} \tag{III.17}$$

Où  $A^{(k)}$  et  $B^{(k)}$  sont des constantes d'intégration inconnues.

En remplaçant les expressions pour la contrainte de l'équation (III.10) dans l'équation (III.16), et en utilisant l'équation (III.15), nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_r^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^{(k)}}{dr} - \frac{\beta^{(k)2}}{r^2} u_r^{(k)} = \alpha^{(k)} \frac{\varepsilon_0}{r} + \delta^{(k)} \gamma_0 + \frac{\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda^{(k)} \Delta T}{r} \quad (\text{III.18})$$

Lorsque

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= \frac{\overline{c_{12}^{(k)}} - \overline{c_{13}^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}} \\ \delta^{(k)} &= \frac{\overline{c_{26}^{(k)}} - 2\overline{c_{36}^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}} \\ \beta^{(k)} &= \sqrt{\frac{\overline{c_{22}^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}}} \\ \lambda^{(k)} &= \frac{\overline{\xi_r^{(k)}} - \overline{\xi_\theta^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Lorsque  $\frac{\overline{c_{22}^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}} > 0$  et  $\frac{\overline{c_{22}^{(k)}}}{\overline{c_{33}^{(k)}}} \neq 0$ , qui sont utilisés pour les matériaux anisotropes dans cette étude, la solution de l'équation (III.18) peut être obtenue.

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= D^{(k)} r^{\beta^{(k)}} + E^{(k)} r^{-\beta^{(k)}} + \left( \alpha_1^{(k)} \varepsilon_0 + \eta^{(k)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1 - \beta^{(k)2}} \right) r + \\ &\alpha_2^{(k)} \gamma_0 r^2 + \eta^{(k)} B r \ln(r) \end{aligned} \quad (\text{III.20 a})$$

Lorsque

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)} &= \frac{\alpha^{(k)}}{1 - \beta^{(k)2}} \\ \alpha_2^{(k)} &= \frac{\delta^{(k)}}{4 - \beta^{(k)2}} \\ \eta^{(k)} &= \frac{\lambda^{(k)}}{1 - \beta^{(k)2}} \end{aligned} \quad (\text{III.20 b})$$

Et  $D^{(k)}$  et  $E^{(k)}$  sont des constantes d'intégration inconnues, et doivent être déterminées à partir des conditions aux limites et des conditions de contact à chaque interface entre les couches. A et B sont des constantes d'échange thermique (équations (III.6, III.7)).

En utilisant les relations (III.10) et (III.17) on peut déterminer ainsi les contraintes et les déformations dans chaque couche :

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(k)} = & \left( \overline{c_{13}^{(k)}} + \alpha_1^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + \overline{c_{33}^{(k)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + \beta(k) \overline{c_{33}^{(k)}} \right) r_k^{\beta(k)-1} + E^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} - \beta(k) \overline{c_{33}^{(k)}} \right) r_k^{-\beta(k)-1} + \\
& Y_0 \left( \overline{c_{36}^{(k)}} + \alpha_2^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + 2\overline{c_{33}^{(k)}} \right) \right) r_{k-\xi_r^{(k)}} \Delta T^{(k)} + \overline{c_{23}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \right. \\
& \left. \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k \right) + \overline{c_{33}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k + \right. \\
& \left. \eta^{(k)} B \right) \tag{III.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(k)} = & \left( \overline{c_{11}^{(k)}} + \alpha_1^{(k)} \left( \overline{c_{12}^{(k)}} + \overline{c_{13}^{(k)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(k)} \left( \overline{c_{12}^{(k)}} + \beta(k) \overline{c_{13}^{(k)}} \right) r_k^{\beta(k)-1} + E^{(k)} \left( \overline{c_{12}^{(k)}} - \beta(k) \overline{c_{13}^{(k)}} \right) r_k^{-\beta(k)-1} + \\
& Y_0 \left( \overline{c_{16}^{(k)}} + \alpha_2^{(k)} \left( \overline{c_{12}^{(k)}} + 2\overline{c_{13}^{(k)}} \right) \right) r_{k-\xi_r^{(k)}} \Delta T^{(k)} + \overline{c_{12}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \right. \\
& \left. \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k \right) + \overline{c_{13}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k + \right. \\
& \left. \eta^{(k)} B \right) \tag{III.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^{(k)} = & \left( \overline{c_{12}^{(k)}} + \alpha_1^{(k)} \left( \overline{c_{22}^{(k)}} + \overline{c_{23}^{(k)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(k)} \left( \overline{c_{22}^{(k)}} + \beta(k) \overline{c_{23}^{(k)}} \right) r_k^{\beta(k)-1} + E^{(k)} \left( \overline{c_{22}^{(k)}} - \beta(k) \overline{c_{23}^{(k)}} \right) r_k^{-\beta(k)-1} + \\
& Y_0 \left( \overline{c_{26}^{(k)}} + \alpha_2^{(k)} \left( \overline{c_{22}^{(k)}} + 2\overline{c_{23}^{(k)}} \right) \right) r_{k-\xi_r^{(k)}} \Delta T^{(k)} + \overline{c_{22}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \right.
\end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)}B \ln r_k \right) + \overline{c_{23}^{(k)}} \left( \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)}B \ln r_k + \right. \\ & \left. \eta^{(k)}B \right) \end{aligned} \quad (III.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z\theta}^{(k)} = & \left( \overline{c_{16}^{(k)}} + \alpha_1^{(k)} (\overline{c_{26}^{(k)}} + \overline{c_{36}^{(k)}}) \right) \varepsilon_0 + D^{(k)} (\overline{c_{26}^{(k)}} + \beta^{(k)} \overline{c_{36}^{(k)}}) r_k^{\beta^{(k)}-1} + E^{(k)} (\overline{c_{26}^{(k)}} - \beta^{(k)} \overline{c_{36}^{(k)}}) r_k^{-\beta^{(k)}-1} + \\ & Y_0 \left( \overline{c_{66}^{(k)}} + \alpha_2^{(k)} (\overline{c_{26}^{(k)}} + 2\overline{c_{36}^{(k)}}) \right) r_k^{-\xi_r^{(k)}} \Delta T^{(k)} + \overline{c_{26}^{(k)}} \left( \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \right. \\ & \left. \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)}B \ln r_k \right) + \overline{c_{36}^{(k)}} \left( \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(k)}B \ln r_k + \right. \\ & \left. \eta^{(k)}B \right) \end{aligned} \quad (III.24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(k)} = & D^{(k)} \beta^{(k)} r^{\beta^{(k)}-1} - E^{(k)} \beta^{(k)} r^{-\beta^{(k)}-1} + \alpha_1^{(k)} \varepsilon_0 + \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \\ & \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + 2\alpha_2^{(k)} Y_0 r + \eta^{(k)}B \ln(r_k) + \eta^{(k)}B \end{aligned} \quad (III.25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta^{(k)} = & D^{(k)} r^{\beta^{(k)}-1} + E^{(k)} r^{-\beta^{(k)}-1} + \alpha_1^{(k)} \varepsilon_0 + \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B}{1-\beta^{(k)2}} + \\ & \alpha_2^{(k)} Y_0 r_k + \eta^{(k)}B \ln(r_k) \end{aligned} \quad (III.26)$$

### III.4.2- Propriétés des plaques stratifiées tridimensionnelles [8]:

Pour déterminer les propriétés des matériaux tridimensionnels des plaques stratifiées, il est nécessaire d'utiliser les éléments de la matrice de rigidité du matériau ( $C_{ij}$ ). La relation entre la contrainte et la déformation, en tenant compte des effets thermiques, par rapport à la matrice de compliance est :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \varepsilon_z - \alpha_z \Delta T \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27 a})$$

Avec :  $[S] = [C]^{-1}$

x, y et z se réfèrent aux axes principaux du matériau le long des fibres et des directions transversales. Les valeurs des composants de la matrice peuvent être calculées à partir des constantes d'ingénierie, définies par :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1/E_x, S_{22} = 1/E_y, S_{33} = 1/E_z, S_{12} = -\nu_{xy}/E_x, S_{13} = -\nu_{xz}/E_x, \\ S_{23} &= -\nu_{yz}/E_z, S_{44} = 1/G_{yz}, S_{55} = 1/G_{xz}, S_{66} = 1/G_{xy} \end{aligned} \quad (\text{III.27 b})$$

Pour les cas généraux des propriétés des plaques stratifiées orthotropes, ces valeurs doivent être mesurées expérimentalement ou estimées en utilisant la micromécanique. Pour les composites à orientation unidirectionnelle des fibres, les distributions des fibres sont très similaires dans les directions y et z. Par conséquent, en supposant l'isotropie transverse, et en se basant sur les propriétés équivalentes dans le plan y-z pour les matériaux unidirectionnels, on obtient :

$$E_y = E_z, \quad G_{xz} = G_{yz}, \quad \nu_{xz} = \nu_{xy} \quad (\text{III.28 a})$$

$$G_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})} \quad (\text{III.28 b})$$

Aussi

$$S_{12} = S_{13}, \quad S_{22} = S_{33}, \quad S_{66} = S_{55} \quad (\text{III.29})$$

La conversion des constantes d'ingénierie en éléments de la matrice de rigidité est obtenue à partir de :

$$C_{ij} = S_{ij}^{-1} \quad (\text{III.30})$$

La transformation de la rigidité du système de coordonnées sur l'axe à un système hors-axe (cylindrique), comme illustré dans la figure III.3, peut être obtenue en utilisant une matrice de transformation de la rigidité écrite comme suit :

$$[\bar{C}]^{(k)} = [T_\sigma]^{-1(k)} [C] [T_\varepsilon]^{(k)} \quad (\text{III.31 a})$$

$T_\sigma$  et  $T_\varepsilon$  sont deux matrices de changement de base du vecteur contrainte et de déformation, respectivement, et sont exprimées comme suit :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31 b})$$

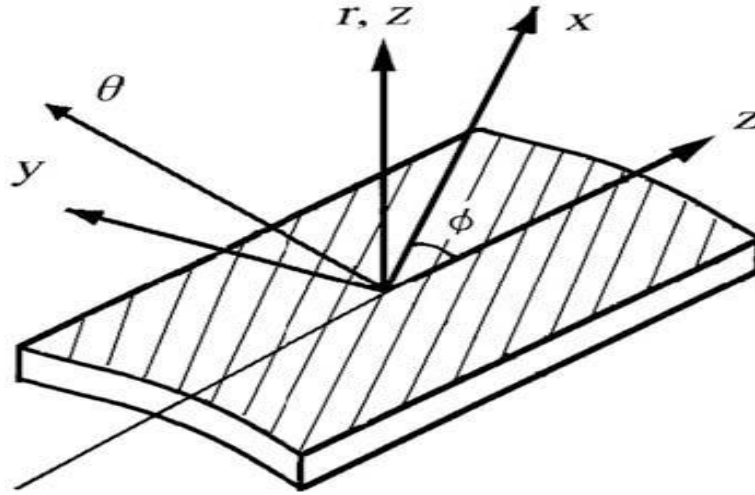


Figure III.3 : Relation entre l'axe principal du matériau et les axes du cylindre.

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31 c})$$

$m = \cos \phi$  et  $n = \sin \phi$ , et  $\phi$  est l'angle cylindrique des filaments par rapport à l'axe du tuyau. Les coefficients d'expansion thermique orientés du stratifié, qui représentent les déformations non mécaniques, peuvent être obtenus en utilisant[8][9]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_z \\ \alpha_\theta \\ \alpha_r \\ \alpha_{z\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 \\ n^2 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ mn & -mn & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

### III.4.3- Conditions aux limites[8][9] :

Les conditions limites sont imposées par les conditions géométriques de la structure et les conditions de chargement, en supposant qu'il n'y a pas de glissement dans les interfaces et que les contraintes et les déformations sont continués. Ces conditions limites permettent de

déterminer les constantes d'intégration. Le condition de traction (pression  $p_0$ ) à la surface interne et la condition de traction nulle à la surface externe sont écrites comme suit.

$$\sigma_r^{(k)}(r_0) = -p_0 \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} & \left( \overline{c_{13}^{(1)}} + \alpha_1^{(1)} \left( \overline{c_{23}^{(1)}} + \overline{c_{33}^{(1)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(1)} \left( \overline{c_{23}^{(1)}} + \beta(1) \overline{c_{33}^{(1)}} \right) r_0^{\beta(1)-1} + E^{(1)} \left( \overline{c_{23}^{(1)}} - \beta(1) \overline{c_{33}^{(1)}} \right) r_0^{-\beta(1)-1} \\ & + \gamma_0 \left( \overline{c_{36}^{(1)}} + \alpha_2^{(1)} \left( \overline{c_{23}^{(1)}} + 2\overline{c_{33}^{(1)}} \right) \right) r_0^{-\xi_r^{(1)}} \Delta T^{(1)} + \overline{c_{23}^{(1)}} \left( \eta^{(1)} (A - T_{ref}) \right. \\ & \left. + \frac{\frac{B \xi_r^{(1)}}{\overline{c_{33}^{(1)}}} - 2\eta^{(1)} B}{1 - \beta^{(1)2}} + \eta^{(1)} B \ln r_0 \right) + \overline{c_{33}^{(1)}} \left( \eta^{(1)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(1)}}{\overline{c_{33}^{(1)}}} - 2\eta^{(1)} B}{1 - \beta^{(1)2}} \right. \\ & \left. + \eta^{(1)} B \ln r_0 + \eta^{(1)} B \right) = -p_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_r^{(k)}(r_a) = 0 \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} & \left( \overline{c_{13}^{(6)}} + \alpha_1^{(6)} \left( \overline{c_{23}^{(6)}} + \overline{c_{33}^{(6)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(6)} \left( \overline{c_{23}^{(6)}} + \beta(6) \overline{c_{33}^{(6)}} \right) r_0^{\beta(6)-1} + E^{(6)} \left( \overline{c_{23}^{(6)}} - \beta(6) \overline{c_{33}^{(6)}} \right) r_a^{-\beta(6)-1} \\ & + \gamma_0 \left( \overline{c_{36}^{(6)}} + \alpha_2^{(6)} \left( \overline{c_{23}^{(6)}} + 2\overline{c_{33}^{(6)}} \right) \right) r_a^{-\xi_r^{(6)}} \Delta T^{(6)} + \overline{c_{23}^{(6)}} \left( \eta^{(6)} (A - T_{ref}) \right. \\ & \left. + \frac{\frac{B \xi_r^{(6)}}{\overline{c_{33}^{(6)}}} - 2\eta^{(6)} B}{1 - \beta^{(6)2}} + \eta^{(6)} B \ln r_a \right) + \overline{c_{33}^{(6)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(6)}}{\overline{c_{33}^{(6)}}} - 2\eta^{(6)} B}{1 - \beta^{(6)2}} \right. \\ & \left. + \eta^{(6)} B \ln r_a + \eta^{(6)} B \right) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions de continuité pour les déplacements radiaux et les contraintes dans les interfaces conduisent à :

$$\mathbf{u}_r^{(k)}(\mathbf{r}_k) = \mathbf{u}_r^{(k+1)}(\mathbf{r}_k) \quad , \quad k=1,\dots,(n-1) \quad (\text{III.35})$$

$$D^{(k)} r_k^{\beta(k)} + E^{(k)} r_k^{-\beta(k)} + \left( \alpha_1^{(k)} \varepsilon_0 + \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1 - \beta^{(k)2}} \right) r_k +$$

$$\alpha_2^{(k)} \gamma_0 r_k^2 + \eta^{(k)} B r_k \ln(r_k) = D^{(k+1)} r_k^{\beta(k+1)} + E^{(k+1)} r_k^{-\beta(k+1)} + \left( \alpha_1^{(k+1)} \varepsilon_0 +$$

$$\eta^{(k+1)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k+1)}}{c_{33}^{(k+1)}} - 2\eta^{(k+1)} B}{1 - \beta^{(k+1)2}} \right) r_k + \alpha_2^{(k+1)} \gamma_0 r_k^2 + \eta^{(k+1)} B r_k \ln(r_k) r_k^{\beta(k+1)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_r^{(k)}(\mathbf{r}_k) = \boldsymbol{\sigma}_r^{(k+1)}(\mathbf{r}_k) \quad , \quad k=1,\dots,(n-1) \quad , \quad (\text{III.36})$$

$$\left( \overline{c_{13}^{(k)}} + \alpha_1^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + \overline{c_{33}^{(k)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + \beta^{(k)} \overline{c_{33}^{(k)}} \right) r_k^{\beta(k)-1} + E^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} - \beta^{(k)} \overline{c_{33}^{(k)}} \right) r_k^{-\beta(k)-1} +$$

$$\gamma_0 \left( \overline{c_{36}^{(k)}} + \alpha_2^{(k)} \left( \overline{c_{23}^{(k)}} + 2\overline{c_{33}^{(k)}} \right) \right) r_k^{-\xi_r^{(k)}} \Delta T^{(k)} + \overline{c_{23}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) +$$

$$\frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1 - \beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k \right) + \overline{c_{33}^{(k)}} \left( \eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)} B}{1 - \beta^{(k)2}} + \eta^{(k)} B \ln r_k +$$

$$\eta^{(k)} B \right) = \left( \overline{c_{13}^{(k+1)}} + \alpha_1^{(k+1)} \left( \overline{c_{23}^{(k+1)}} + \overline{c_{33}^{(k+1)}} \right) \right) \varepsilon_0 + D^{(k+1)} \left( \overline{c_{23}^{(k+1)}} +$$

$$\beta^{(k+1)} \overline{c_{33}^{(k+1)}} \right) r_k^{\beta(k+1)-1} + E^{(k+1)} \left( \overline{c_{23}^{(k+1)}} - \beta^{(k+1)} \overline{c_{33}^{(k+1)}} \right) r_k^{-\beta(k+1)-1} +$$

$$\gamma_0 \left( \overline{c_{36}^{(k+1)}} + \alpha_2^{(k+1)} \left( \overline{c_{23}^{(k+1)}} + 2\overline{c_{33}^{(k+1)}} \right) \right) r_k -$$

$$\xi_r^{(k+1)} \Delta T^{(k+1)} + \overline{c_{23}^{(k+1)}} \left( \eta^{(k+1)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k+1)}}{c_{33}^{(k+1)}} - 2\eta^{(k+1)} B}{1 - \beta^{(k+1)2}} +$$

$$\eta^{(k+1)B} \ln r_k \Big) + \overline{c_{33}^{(k+1)}} \left( \eta^{(k+1)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(k+1)}}{c_{33}^{(k+1)}} - 2\eta^{(k+1)B}}{1 - \beta^{(k+1)2}} + \eta^{(k+1)B} \ln r_k + \eta^{(k+1)B} \right)$$

De plus, les deux conditions intégrales peuvent être exprimées comme suit:

$$2\pi \sum_{k=1}^6 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \sigma_z^{(k)}(\mathbf{r}_K) \mathbf{r}_K d\mathbf{r} = \pi r_0^2 p_0 + F \quad (\text{III.37})$$

$$\begin{aligned} & 2\pi \sum_{k=1}^6 \left[ \left( \overline{c_{11}^{(K)}} + \alpha_1^{(K)} \left( \overline{c_{12}^{(K)}} + \overline{c_{13}^{(K)}} \right) \right) \varepsilon_0 \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + D^{(K)} \left( \overline{c_{12}^{(K)}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \beta(K) \overline{c_{13}^{(K)}} \right) \frac{r_k^{\beta(K)+1} - r_{k-1}^{\beta(K)+1}}{\beta(K)+1} + E^{(K)} \left( \overline{c_{12}^{(K)}} - \beta(K) \overline{c_{13}^{(K)}} \right) \frac{r_k^{-\beta(K)+1} - r_{k-1}^{-\beta(K)+1}}{-\beta(K)+1} + \right. \\ & \left. \gamma_0 \left( \overline{c_{16}^{(K)}} + \alpha_2^{(K)} \left( \overline{c_{12}^{(K)}} + 2\overline{c_{13}^{(K)}} \right) \right) \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3} - \xi_z^{(K)} \Delta T^{(k)} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \overline{c_{12}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - \right. \\ & \left. T_{ref}) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \frac{\frac{B \xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)B}}{1 - \beta^{(k)2}} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \eta^{(K)B} \left[ \left( \frac{r_k^2}{2} \ln r_K - \frac{r_{k-1}^2}{2} \ln r_{K-1} \right) - \frac{1}{4} (r_k^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. r_{k-1}^2) \right] \right) + \overline{c_{13}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{ref}) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \frac{\frac{B \xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)B}}{1 - \beta^{(k)2}} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \eta^{(K)B} \left[ \left( \frac{r_k^2}{2} \ln r_K - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{r_{k-1}^2}{2} \ln r_{K-1} \right) - \frac{1}{4} (r_k^2 - r_{k-1}^2) \right] + \eta^{(K)B} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} ) = \pi r_0^2 p_0 + F \end{aligned}$$

Équilibre de couple est :

$$2\pi \sum_{k=1}^6 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \sigma_{z\theta}^{(k)}(\mathbf{r}_K) r_k^2 d\mathbf{r} = M \quad (\text{III.38})$$

$$\begin{aligned} & 2\pi \sum_{k=1}^6 \left[ \left( \overline{c_{16}^{(K)}} + \alpha_1^{(K)} \left( \overline{c_{26}^{(K)}} + \overline{c_{36}^{(K)}} \right) \right) \varepsilon_0 \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3} + D^{(K)} \left( \overline{c_{26}^{(K)}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \beta(K) \overline{c_{36}^{(K)}} \right) \frac{r_k^{\beta(K)+2} - r_{k-1}^{\beta(K)+2}}{\beta(K)+2} + E^{(K)} \left( \overline{c_{26}^{(K)}} - \beta(K) \overline{c_{36}^{(K)}} \right) \frac{r_k^{-\beta(K)+2} - r_{k-1}^{-\beta(K)+2}}{-\beta(K)+2} + \right. \\ & \left. \gamma_0 \left( \overline{c_{66}^{(K)}} + \alpha_2^{(K)} \left( \overline{c_{26}^{(K)}} + 2\overline{c_{36}^{(K)}} \right) \right) \frac{r_k^4 - r_{k-1}^4}{4} - \xi_{z\theta}^{(K)} \Delta T^{(k)} \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3} + \overline{c_{26}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - \right. \\ & \left. T_{ref}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)B}}{1 - \beta^{(k)2}} + \eta^{(K)B} \left[ \left( \frac{r_k^3}{3} \ln r_K - \frac{r_{k-1}^3}{3} \ln r_{K-1} \right) - \frac{1}{6} (r_k^3 - r_{k-1}^3) \right] \right) + \end{aligned}$$

$$\overline{c_{36}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B\xi r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)} B}{1 - \beta^{(k)2}} + \eta^{(K)} B [(\frac{r_k^3}{3} \ln r_k - \frac{r_{k-1}^3}{3} \ln r_{k-1}) - \frac{1}{6} (r_k^3 - r_{k-1}^3)]) + \eta^{(K)} B \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3} = M$$

L'hypothèse de cette étude ignore le couple de torsion et les charges axiales (  $F = 0$  et  $M = 0$ ). Les constantes d'intégration  $A^{(k)} = B^{(k)} = 0$  (cisaillement nul à l'intérieur et à l'extérieur).

Pour un tube composite à  $N$  couches, il existe  $2N+2$  constantes d'intégration inconnues, à savoir  $D^{(k)}$ ,  $E^{(k)}$  (où  $k = 1, 2, \dots, N$ ), et  $\varepsilon_0$ ,  $\gamma_0$ . Le système d'équations comprend  $2+2(N - 1)+2 = 2N+2$  pour déterminer les constantes inconnues. Par conséquent, il y a  $2(N+1)$  équations disponibles pour déterminer toutes les constantes d'intégration.

Dans le cas où  $N=6$ , il y a 14 équations à 14 inconnues.

$$\begin{bmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \\ D^4 \\ D^5 \\ D^6 \\ E^1 \\ E^2 \\ E^3 \\ E^4 \\ E^5 \\ E^6 \\ \varepsilon_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} & a_{21} & a_{22} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{42} & e_{43} & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{42} \\ 0 & 0 & d_{53} & d_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{53} & e_{54} & 0 & 0 & a_{51} & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & d_{64} & d_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{64} & e_{65} & 0 & a_{61} & a_{62} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{75} & d_{76} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{75} & e_{76} & a_{71} & a_{72} \\ d_{81} & d_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{81} & e_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{81} & a_{82} \\ 0 & d_{92} & d_{93} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{92} & e_{93} & 0 & 0 & 0 & a_{91} & a_{92} \\ 0 & 0 & D_{13} & D_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_{24} & D_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{24} & E_{25} & 0 & A_{21} & A_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{35} & D_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{35} & E_{36} & A_{31} & A_{32} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} & E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} & A_{41} & A_{42} \\ D_{54} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} & E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} & A_{51} & A_{52} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 39})$$

Où  $d_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $a_{ij}$  et  $f_{ij}$  sont obtenus après réarrangement des équations aux limites. L'expression de ces paramètres est donnée pour dans l'annexe de ce mémoire..

Une fois que leurs valeurs sont déterminées, les déplacements, les déformations et les contraintes sont obtenus à partir des équations (III.20), (III.15) et (III.10) respectivement.

---

CHAPITRE IV  
PROGRAMMATION ET RESULTATS

---



#### **IV.1- Introduction :**

Le programme appliqué dans le cadre de ce projet permet de calculer les déplacements, les déformations et les contraintes dans l'épaisseur du tube composite sous l'effet de la pression et de la température variable. Les modèles analytiques ont été programmés en utilisant le logiciel MATLAB.

#### **IV.2- Paramètres d'entrée :**

Les caractéristiques géométriques du tube :

- rayon intérieur du tube ( $r_0$  [mm]).
- l'épaisseur du tube ( $e$  [mm]).
- le nombre de couches ( $n$ ).
- la configuration : [ $\varphi_1 / \varphi_2 / \varphi_3 / \varphi_4 / \varphi_5 / \varphi_6$ ].

Les caractéristiques du matériau :

- les modules d'Young ( $E_x, E_y$  [MPa]).
- les modules de cisaillement ( $G_{xy}$ [MPa]).
- les coefficients de Poisson ( $\nu_{xy}, \nu_{yz}$  ).
- les coefficients de transfert de chaleur moyen ( $h_0, h_a$ [W/m<sup>2</sup> °C])
- les coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_x, \alpha_y$ [°C<sup>-1</sup>]).
- Coefficient de conductivité thermique ( $k$ [W/m°C])

Les charges appliquées :

- pression intérieure ( $P_0$  [MPa]).
- Les températures ( $T_\infty, T_{réf}, T_f$  [°C])

#### **IV.3- Paramètres de sortie :**

- Le déplacement radial dans l'épaisseur du tube ( $u_r$ ).
- La déformation dans l'épaisseur du tube ( $\epsilon_r, \epsilon_\theta$ ).
- Les contraintes dans l'épaisseur du tube ( $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_{z\theta}$ ).

#### **IV.4- Organigramme de programmation :**

L'organigramme de ce programme est présenté comme suit :

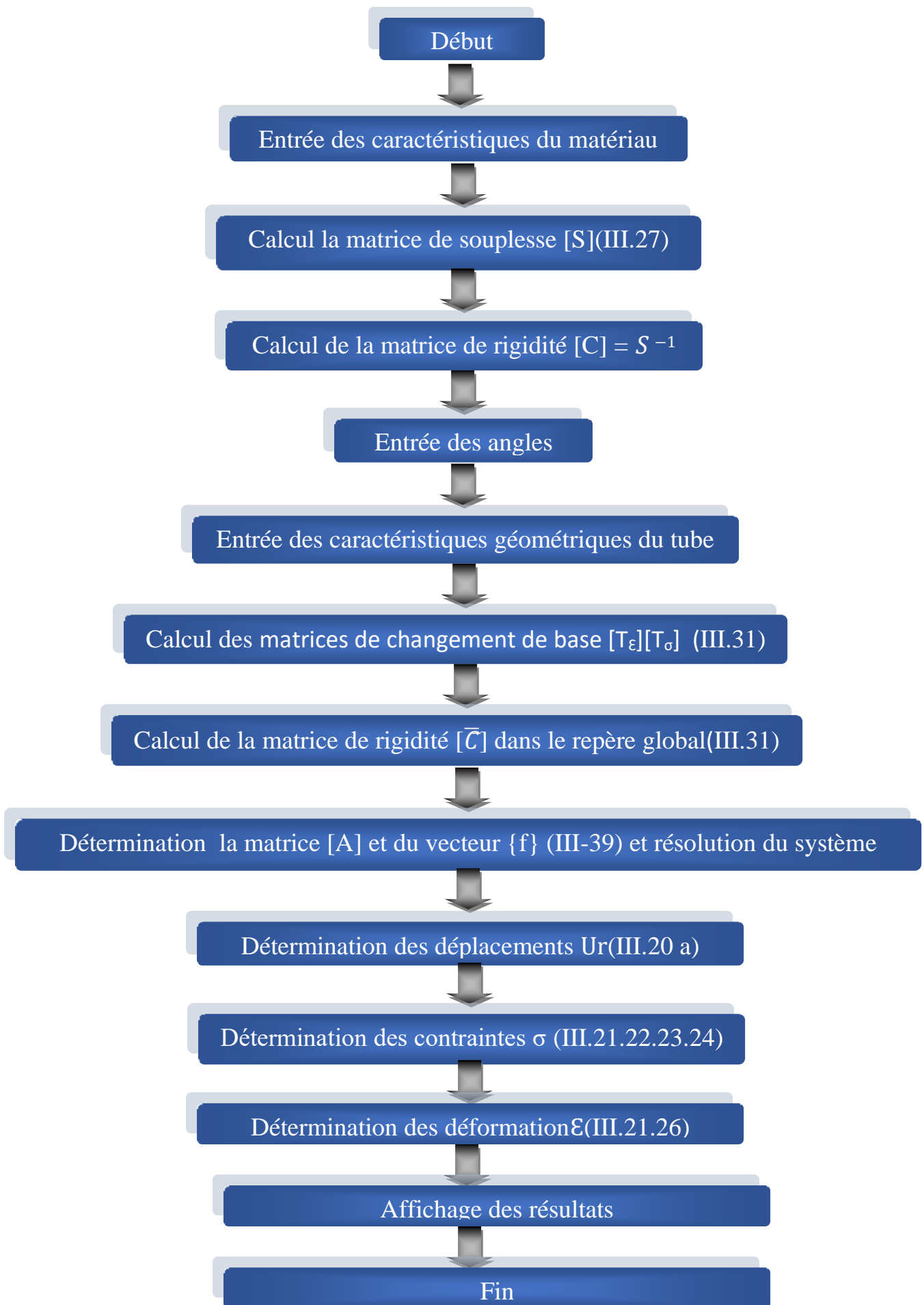


Figure IV.1 : Organigramme

## IV.5- Les cas d'étude :

Deux configurations ont été étudiées, la première avec un même angle d'orientation et la deuxième avec deux angles d'orientation différents. Les deux configurations ont été soumises au cas sans gradient de température ( $\Delta T=0$ ), puis un gradient de température constant ( $\Delta T=\text{constant}$ ) et finalement un gradient de température variable dans l'épaisseur (en fonction du rayon) ( $\Delta T=f(r)=\text{variable}$ ).

### IV.5.1- Les données[9]:

Les caractéristiques géométriques du tube :

- rayon intérieur du tube  $r_0=50$  [mm].
- l'épaisseur de couche  $e=0.3$  [mm].
- le nombre de couches  $n=6$ .

Les caractéristiques du matériau :

- les modules d'Young :  $E_x=141600$ ,  $E_y=10700$ ,  $E_z=E_y$  [MPa].
- les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}=0.268$ ,  $\nu_{yz}=0.495$ ,  $\nu_{xz}=\nu_{xy}$
- les modules de cisaillement  $G_{xy}=3880$ ,  $G_{xz}=G_{xy}$  [MPa]
- Coefficient de dilatation thermique  $\alpha_x = -0.6 \cdot 10^{-6}$  et  $\alpha_y = 32 \cdot 10^{-6}$  [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]
- Conductivité thermique :  $k = 0.41$  [W/m  $^{\circ}\text{C}$ ]
- les configurations : (a) : [+55/-55 /+55 /-55/+55 /-55] , (b) : [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35]
- Les charges appliquées : pression intérieure  $P_0=10$  [MPa].
- Température du fluide :  $T_f=100$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]
- Température extérieure :  $T_{\infty}=25$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]
- Température de référence :  $T_{\text{ref}}=25$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]

### IV.5.2- Résultat de l'étude thermique :

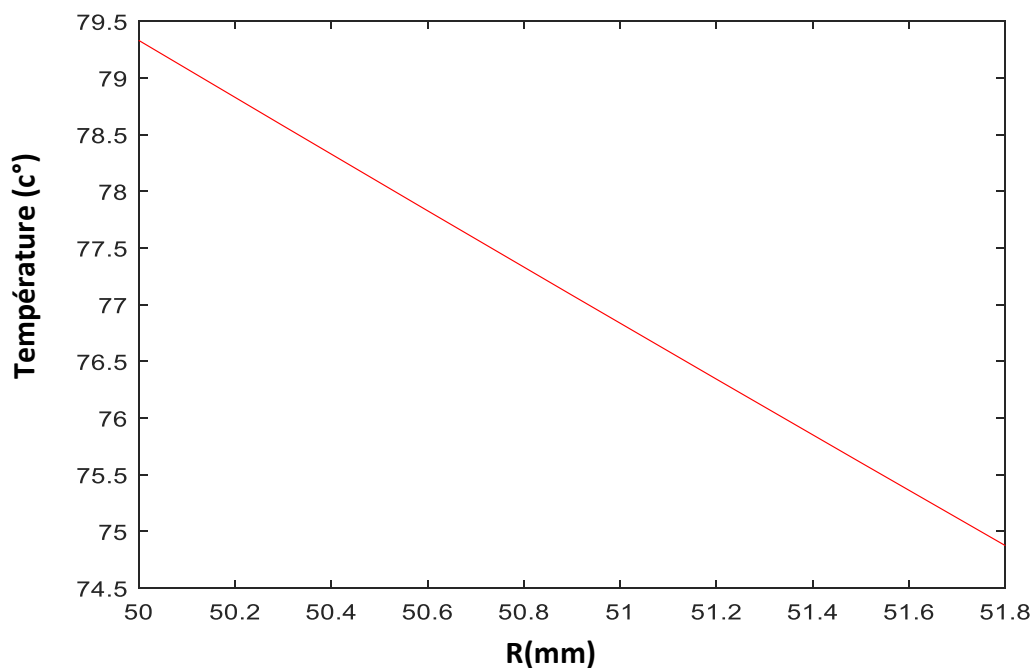


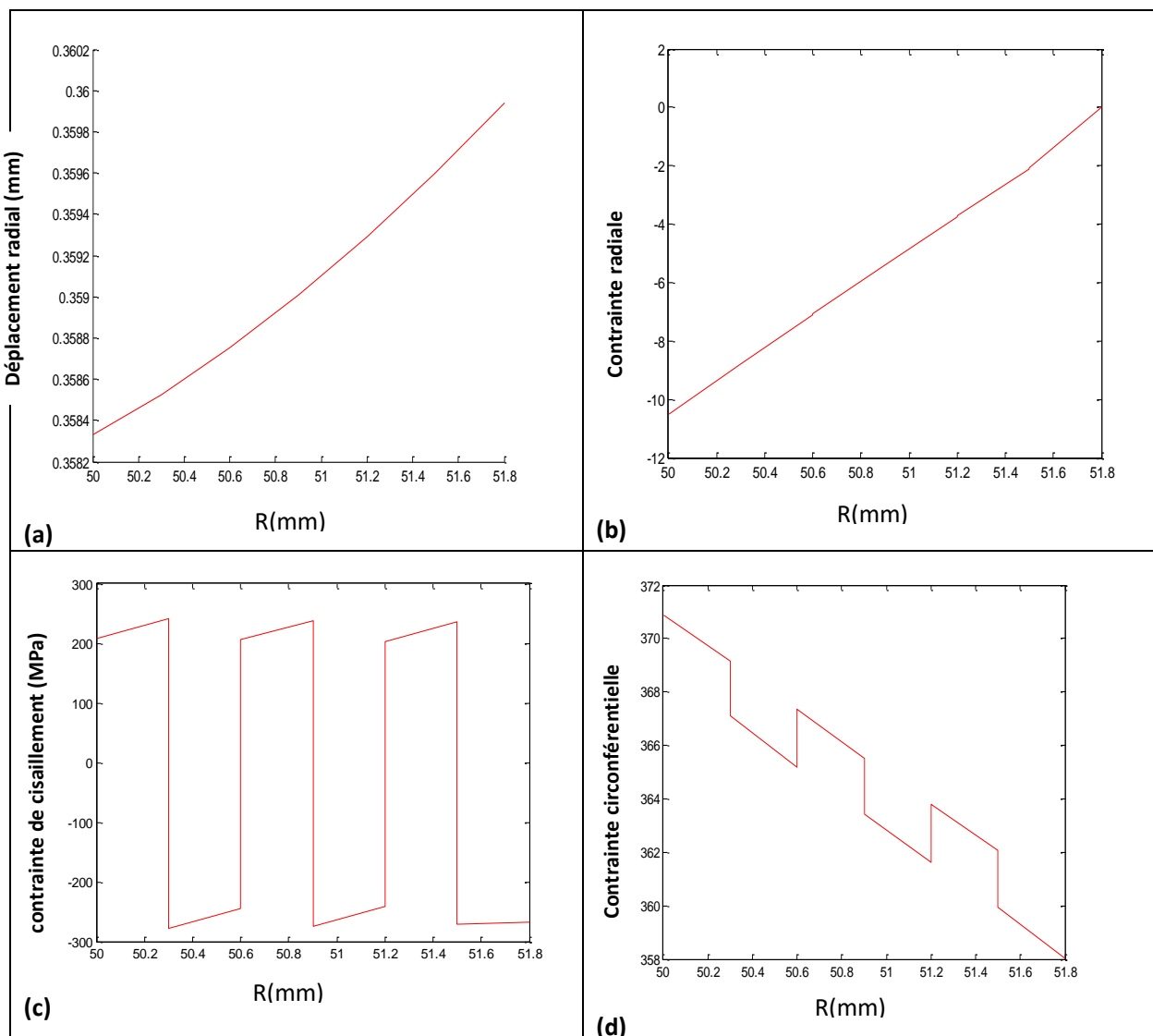
Figure IV.2 : La distribution de la température dans l'épaisseur du tube.

La figure IV.2 présente la courbe de distribution de la température à travers l'épaisseur du tube. On observe que la température diminue de la valeur de (79,3 C°) au rayon interne jusqu'à la valeur de (74,87 C°) au rayon externe. La différence entre la température du fluide et la température de la paroi intérieure du tube ainsi que la température extérieure et la température de la paroi extérieure est due à l'effet de la convection.

### IV.5.3- Résultat de l'étude thermomécanique :

Cette étude préliminaire suppose un chargement de pression interne et un gradient de température variable dans l'épaisseur du tube.

#### a-Cas de la configuration : [+55/-55 /+55 /-55/+55/-55]



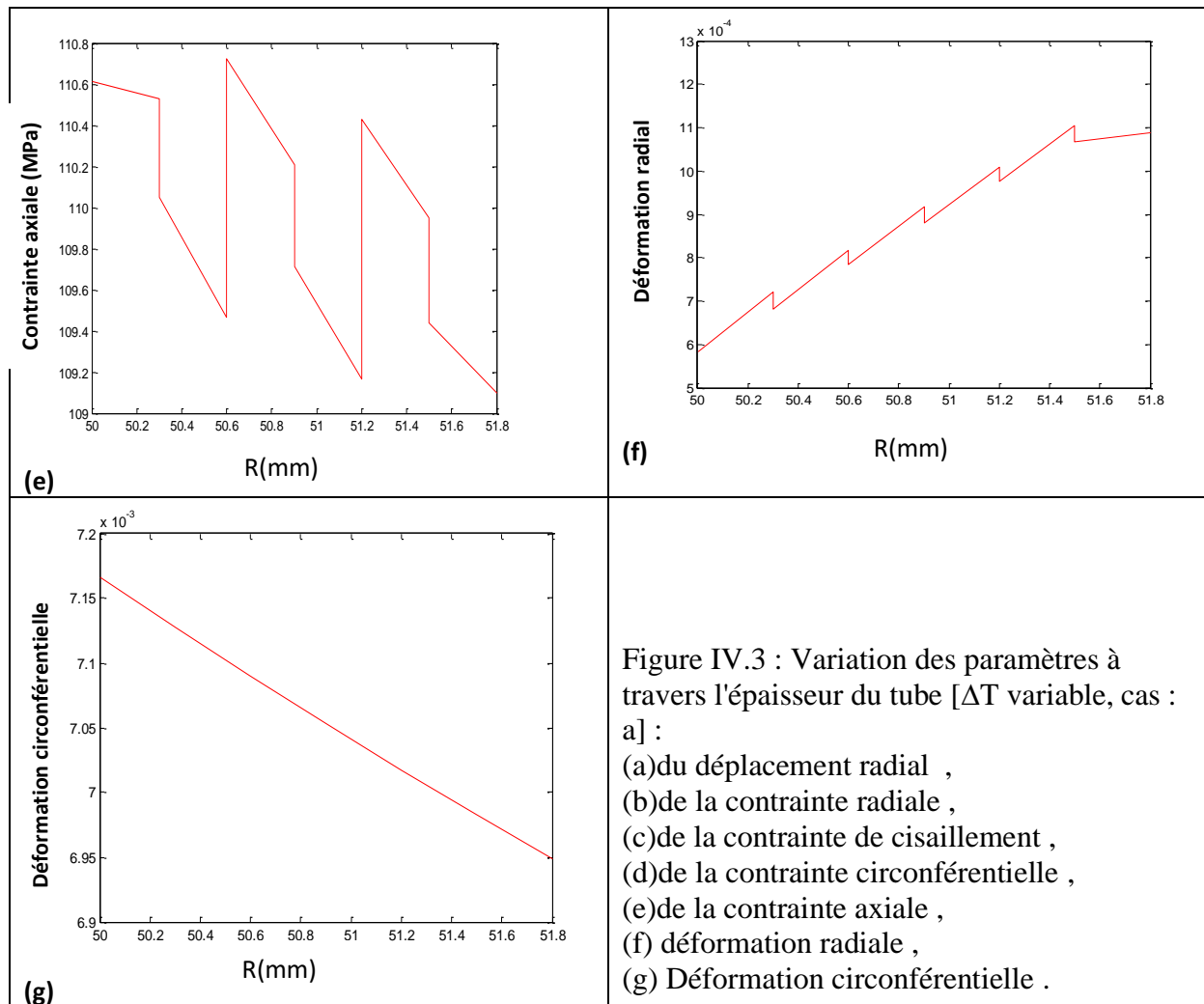


Figure IV.3 : Variation des paramètres à travers l'épaisseur du tube [ $\Delta T$  variable, cas : a] :

- (a) du déplacement radial ,
- (b) de la contrainte radiale ,
- (c) de la contrainte de cisaillement ,
- (d) de la contrainte circonférentielle ,
- (e) de la contrainte axiale ,
- (f) déformation radiale ,
- (g) Déformation circonférentielle .

Les graphes de la figure IV.3 montrent la distribution des paramètres mécaniques à travers l'épaisseur du tube sous le chargement de la pression interne et le gradient de température variable pour le cas de la configuration : [+55/-55 /+55 /-55/+55/-55]

Le graphe (a) décrit la variation croissante et continue du déplacement radial ( $u_r$ ).

Le graphe (b) montre la variation continue et décroissante de la contrainte de compression ( $\sigma_r$ ) de la valeur légèrement supérieure à  $P_0$  jusqu'à la valeur nulle (pression extérieure).

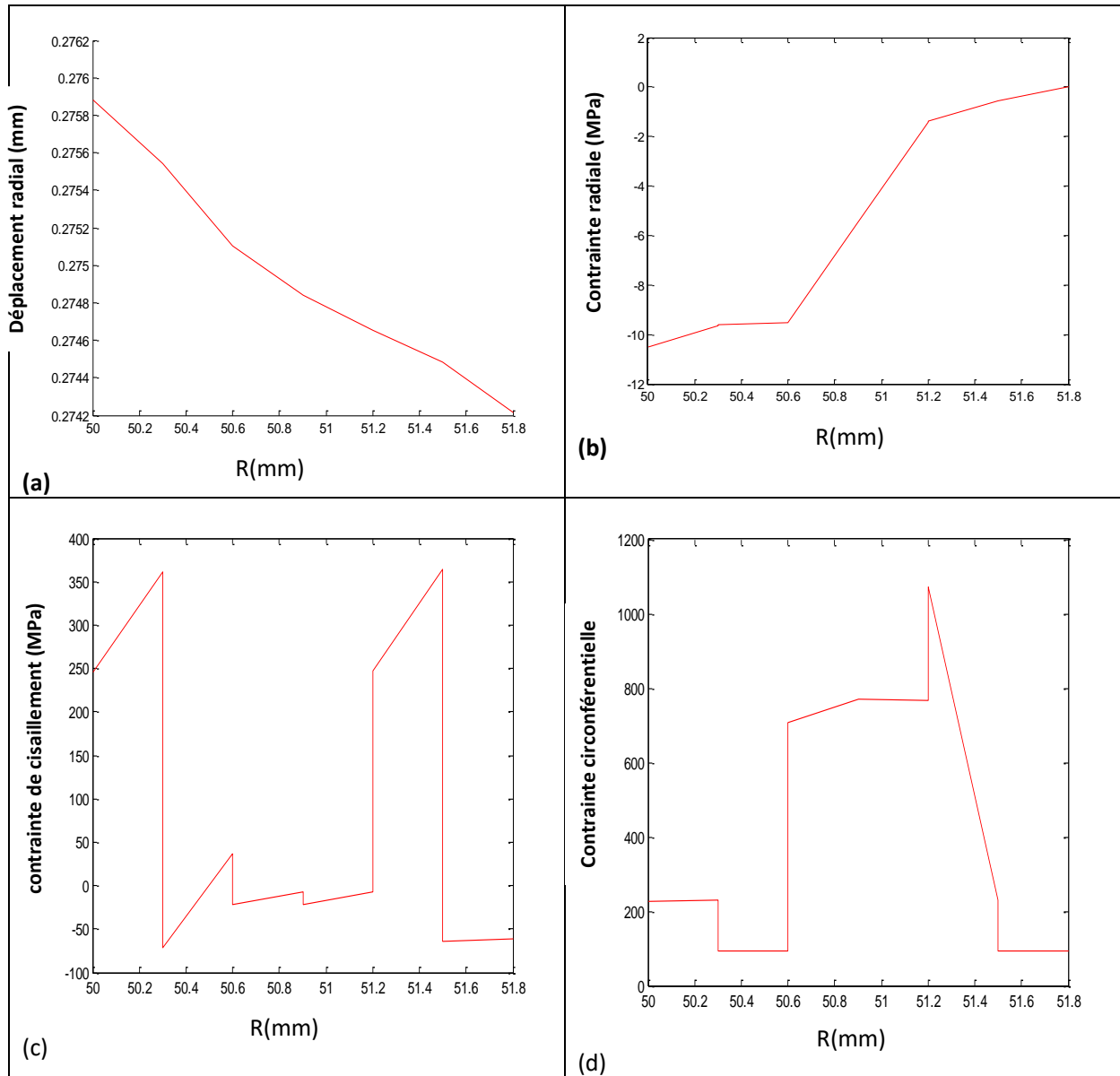
Les graphes (c) et (d) respectivement la montrent variation de la contrainte circonférentielle ( $\sigma_\theta$ ) et la contrainte de cisaillement ( $\sigma_{z\theta}$ )

Le graphe (e) respectivement la montrent variation de la contrainte axiale ( $\sigma_z$ ).

Le graphe (f) décrit la variation croissante et discontinue du déformation radiale ( $\epsilon_r$ ).

Le graphe (g) montre la variation continue et décroissante de la déformation circonférentielle ( $\epsilon_\theta$ ).

**b-Cas de la configuration : [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35] :**



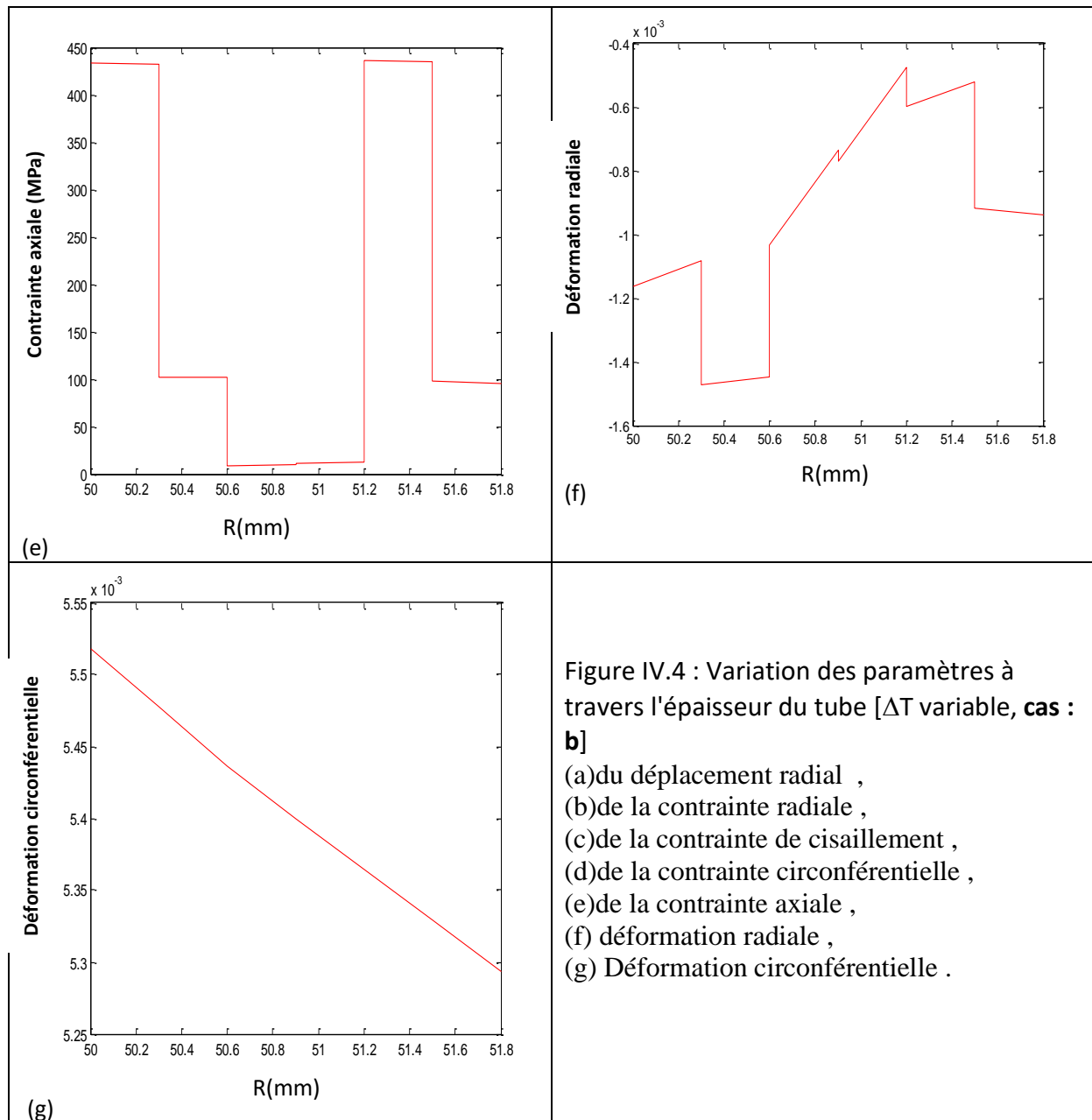


Figure IV.4 : Variation des paramètres à travers l'épaisseur du tube [ $\Delta T$  variable, **cas : b**]  
 (a) du déplacement radial ,  
 (b) de la contrainte radiale ,  
 (c) de la contrainte de cisaillement ,  
 (d) de la contrainte circonférentielle ,  
 (e) de la contrainte axiale ,  
 (f) déformation radiale ,  
 (g) Déformation circonférentielle .

Les graphes de la figure IV.4 montrent la distribution des paramètres mécaniques à travers l'épaisseur du tube sous le chargement de la pression interne et le gradient de température variable pour le cas de la configuration [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35].

La variation des courbes conserve la même allure avec des franches discontinuités aux interfaces dues au changement brutal de la valeur et le signe des angles d'orientation.

#### IV.5.4- Résultat d'étude thermomécanique comparative :

Cette étude concerne la comparaison des paramètres mécaniques pour le cas de chargement de pression interne sans le gradient de température, puis avec un gradient de température constant et enfin un gradient de température variable dans l'épaisseur.

##### a- Cas de la configuration : [+55/-55 /+55 /-55/+55/-55]

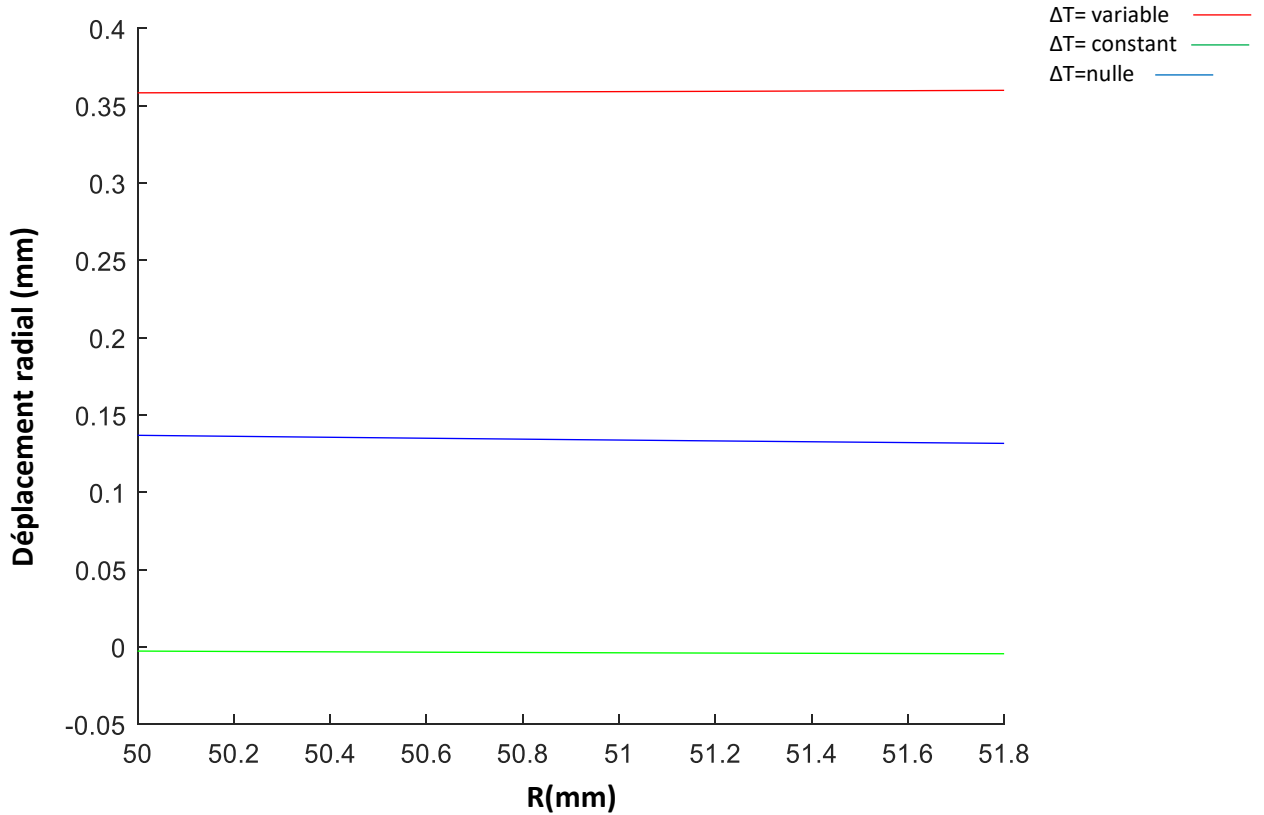


Figure IV.5 : Variation du déplacement radial à travers l'épaisseur du tube



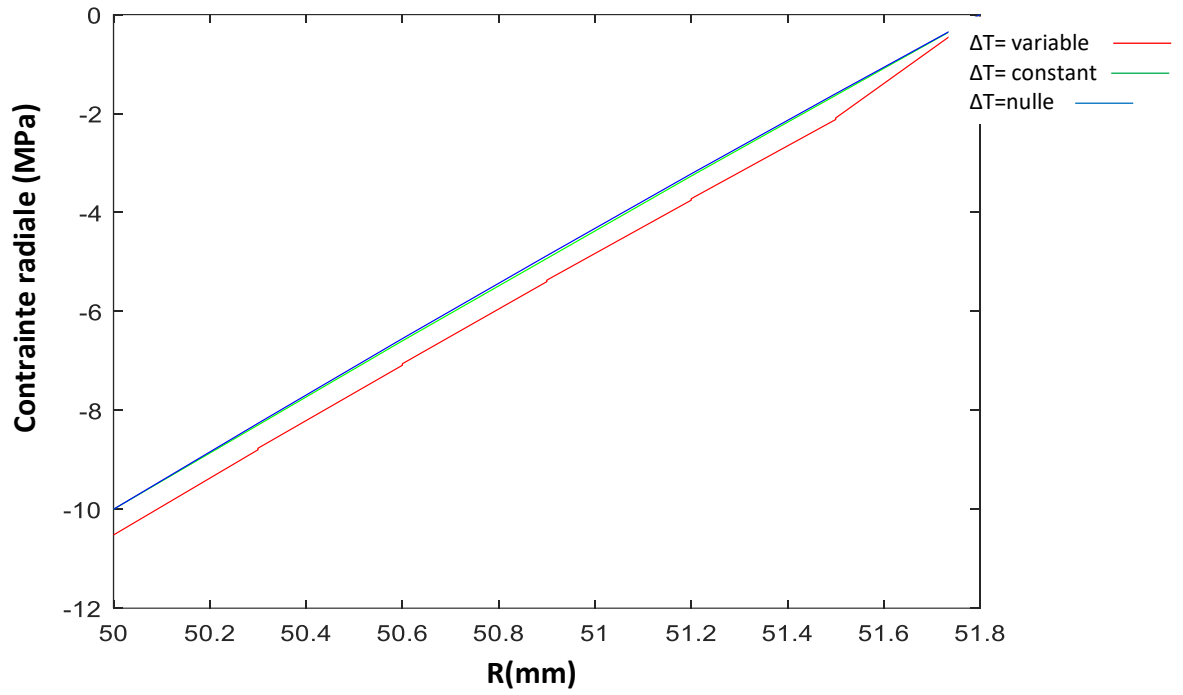


Figure IV.6 : Distribution de la contrainte radiale

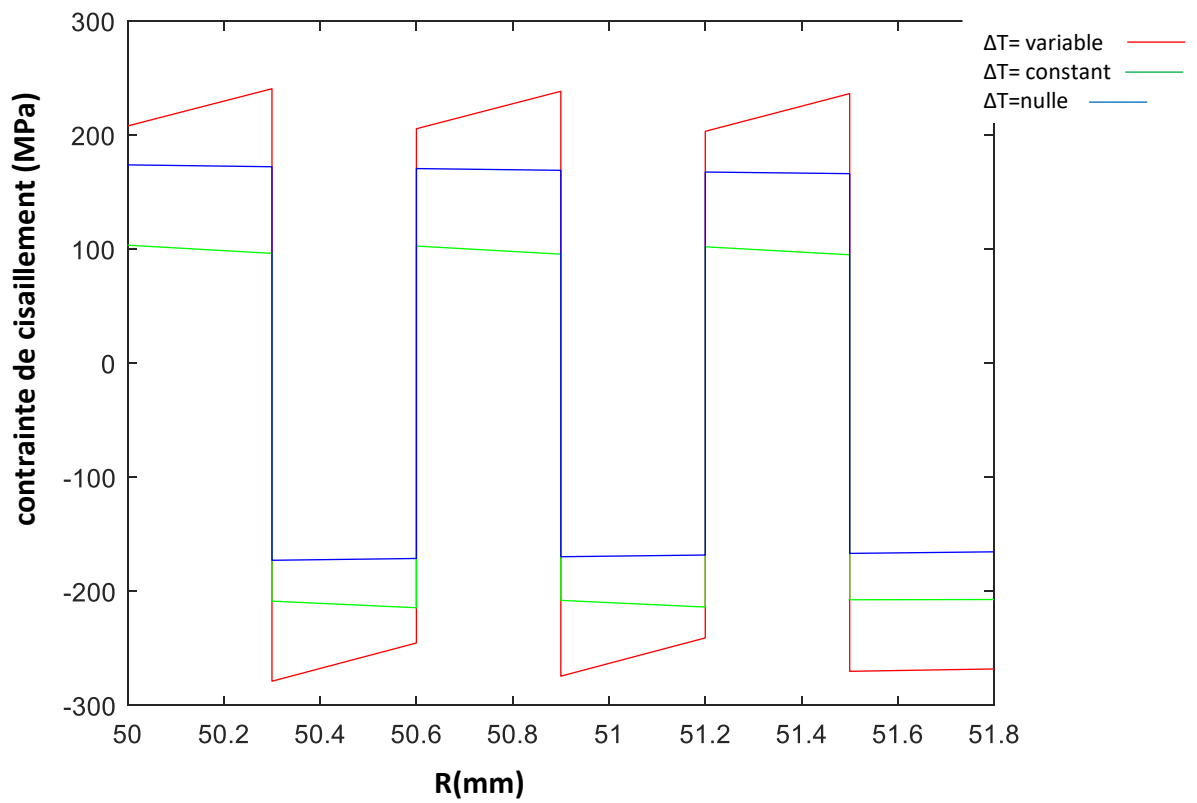


Figure IV.7 : Distribution de la contrainte de cisaillement à travers le rayon

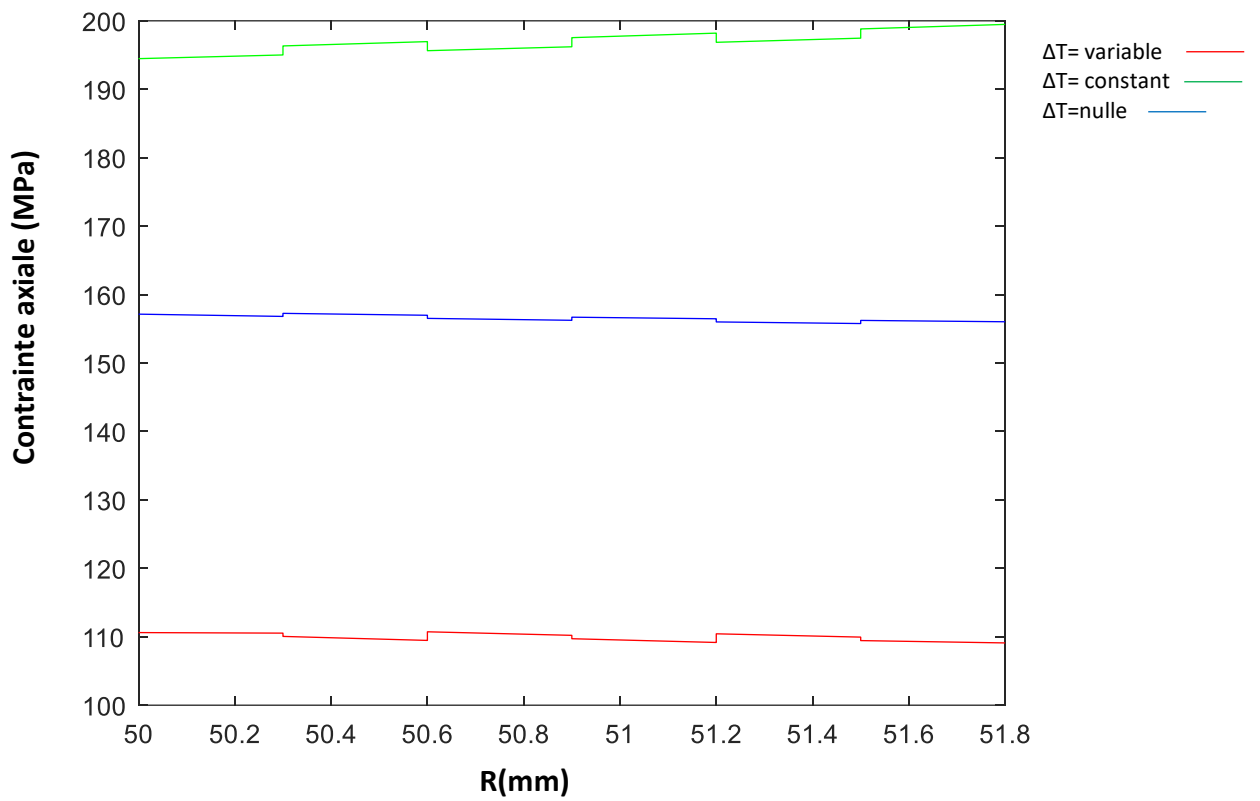


Figure IV.8 : Distribution de la contrainte axiale à travers l'épaisseur du tube

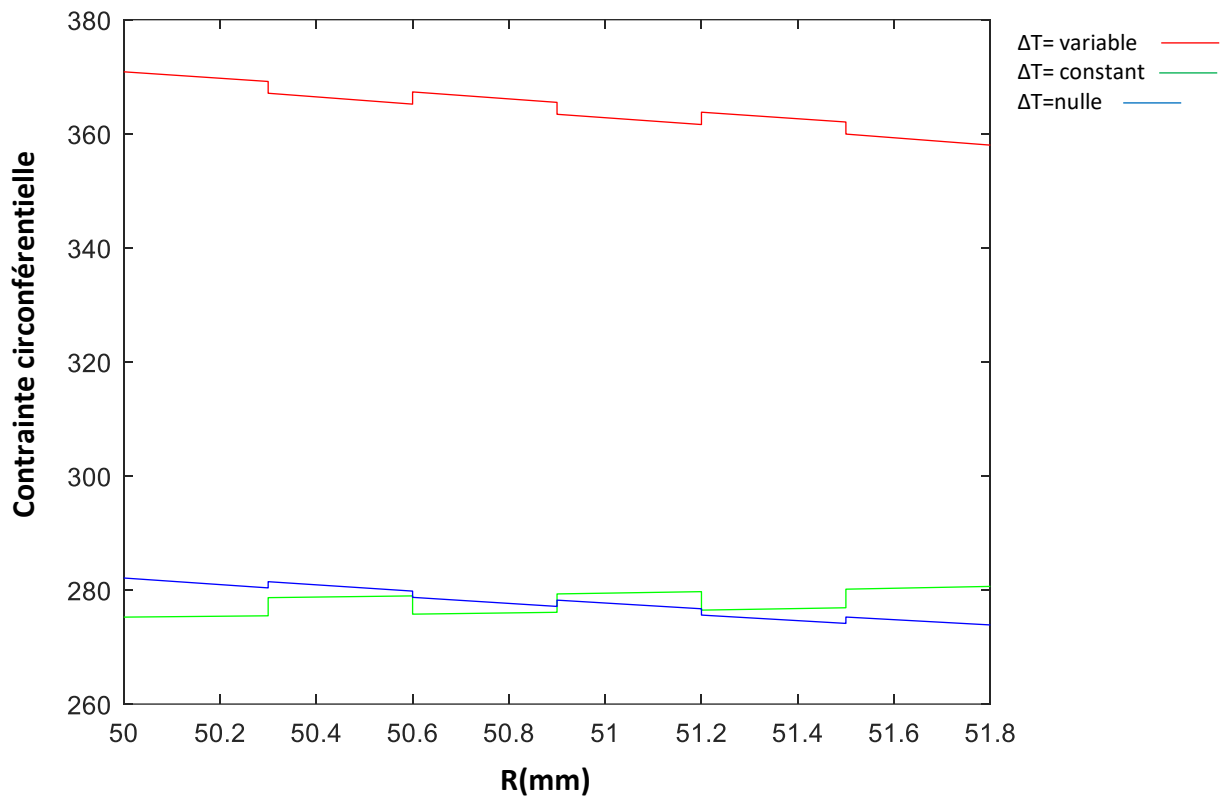


Figure IV.9 : Distribution de la contrainte circonférentielle sur la distance radiale dans l'épaisseur

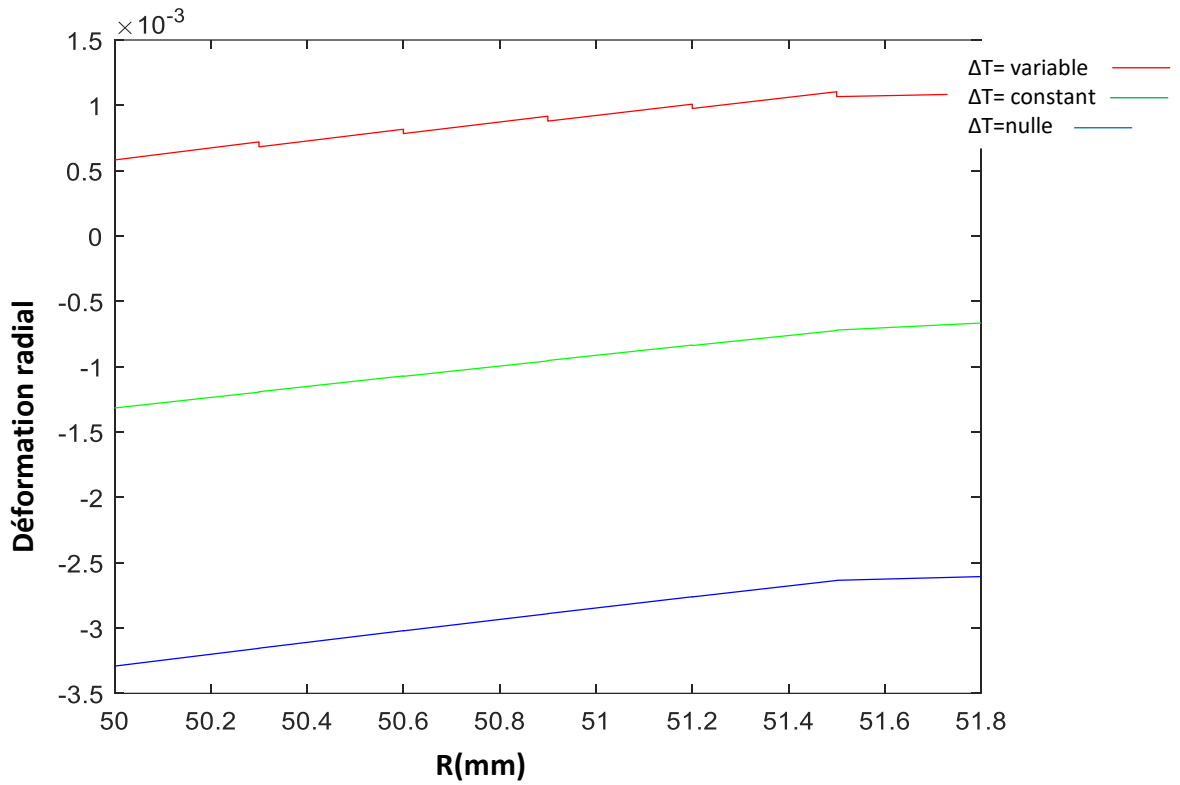


Figure IV.10 : Distribution de la déformation radiale à travers l'épaisseur du tube

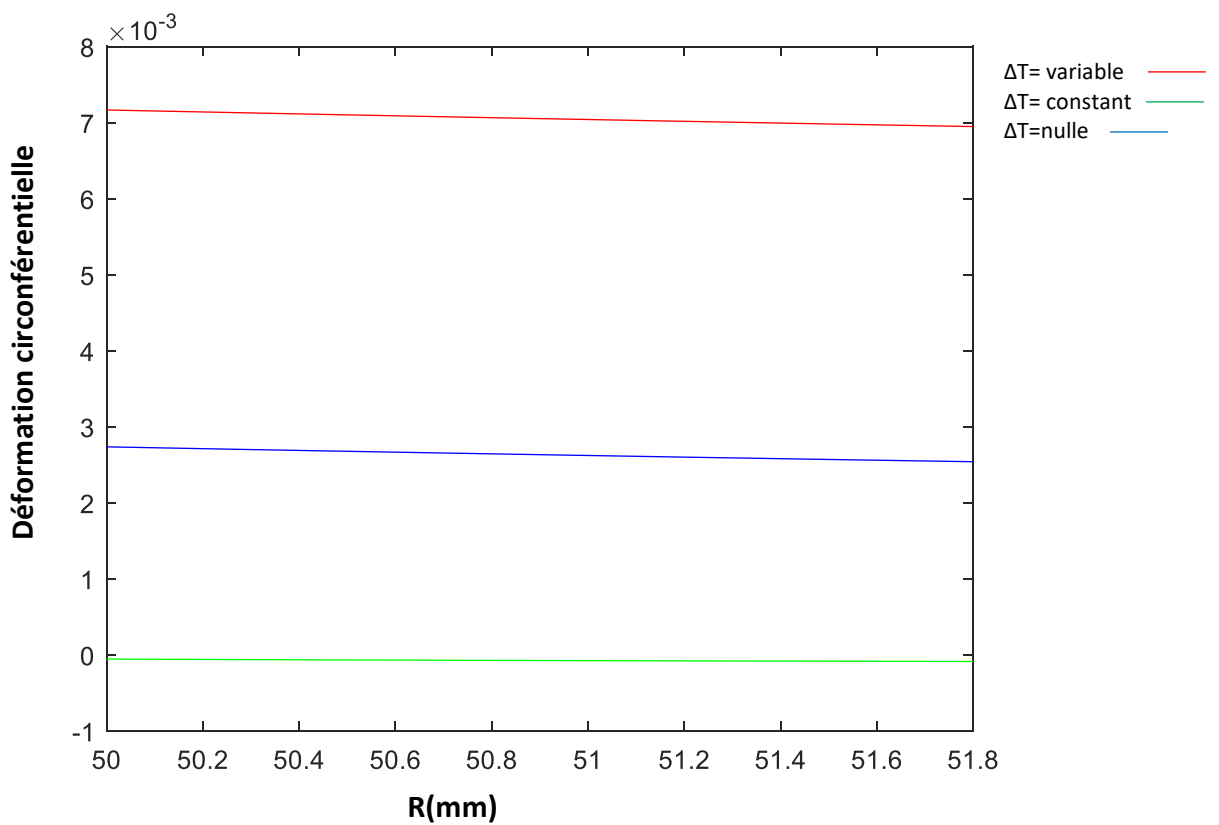


Figure IV.11 : Distribution de la déformation circonférentielle à travers l'épaisseur du tube

## Interprétation :

Figure IV.5 : montre la variation du déplacement radial le long du rayon  $r$  du tube. Dans le cas de cette configuration, on observe dans les trois cas une diminution continue du déplacement de l'intérieur du tube vers l'extérieur.

Dans le premier cas, lorsque la température est variable, on observe une augmentation de la valeur du déplacement radial, avec une valeur maximale au rayon externe ( $r_a = 51,8$ ) et une valeur minimale au rayon interne ( $r_0 = 50$ ).

Dans le deuxième cas, lorsque la température est nulle, et dans le troisième cas, lorsque la température est constante, on observe dans les deux courbes une diminution du déplacement radial, avec une valeur maximale au rayon interne et une valeur minimale au rayon externe.

Figure IV.6 : montre la variation de la contrainte radiale à travers l'épaisseur du tube pour les trois cas du gradient de température.

La contrainte radiale varie linéairement, partant d'une contrainte légèrement inférieure à la pression interne et augmentant jusqu'à atteindre zéro à la surface externe dans le cas où la température est variable.

Dans les cas où la température est constante et nulle, la contrainte augmente de la valeur correspondant à la pression interne jusqu'à zéro.

Figure IV.7 : montre la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du tube.

Nous remarquons dans la courbe qu'il y a une discontinuité de la contrainte entre les couches, tandis qu'elle est continue à l'intérieur des couches. La aussi, la différence des valeurs pour les trois cas du gradient de température est significative.

Figure IV.8 : montre la variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur du tube pour trois cas de gradient de température.

On observe que, dans le cas où la température est constante, la contrainte axiale augmente de manière discontinue. En revanche, dans les deux cas où la température est variable et nulle, elle diminue également de manière discontinue. La discontinuité se présente dans les interfaces des couches du stratifié.

Figure IV.9 : montre la variation de la contrainte circonferentielle à travers l'épaisseur du tube pour trois cas de gradient de température.

On observe que, dans le cas où la température est constante, la contrainte circonferentielle augmente de manière discontinue. En revanche, dans les deux cas où la température est variable et nulle, elle diminue également de manière discontinue.

Figure IV.10 : montre la variation de la déformation radiale à travers l'épaisseur du tube pour trois cas de température.

On observe que, dans le cas où la température est variable, la déformation radiale augmente de manière discontinue, tandis que dans les deux cas où la température est constante et nulle, elle augmente de manière continue.

Figure IV.11 : montre la variation de la déformation circonferentielle à travers l'épaisseur du tube pour trois cas de température.

On observe dans les trois cas que la déformation circonferentielle diminue du rayon interne au rayon externe.

La continuité observée des courbes concerne la contrainte radiale et le déplacement radial à cause des conditions aux limites aux interfaces des couches appliquées à ces fonctions. Ce genre de conditions ne sont pas appliquées à la contrainte de cisaillement, la contrainte circonférentielle et aux déformations, ce qui justifie la discontinuité des ces fonctions entre les couches.

**b- Cas de la configuration : [+35/-35 /+90 /-90/+35/-35]**

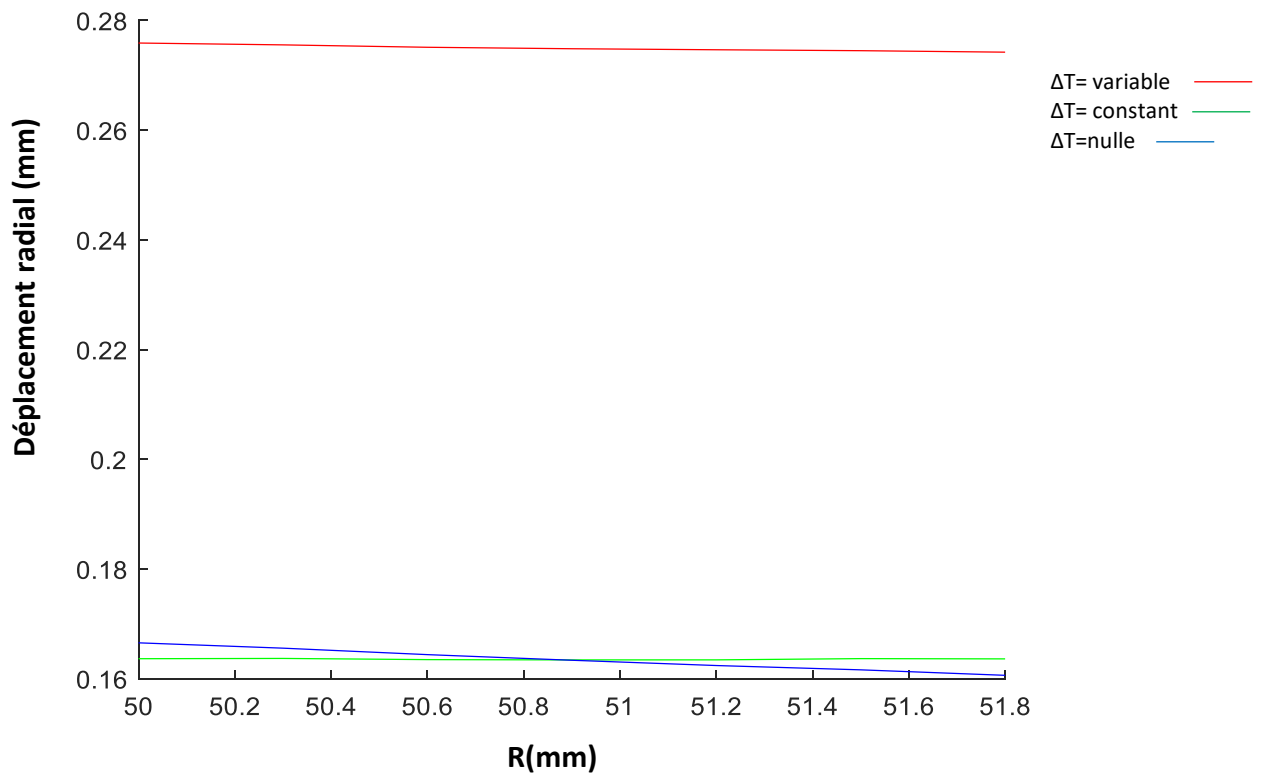


Figure IV.12 : Variation of déplacement radial à travers l'épaisseur du tube

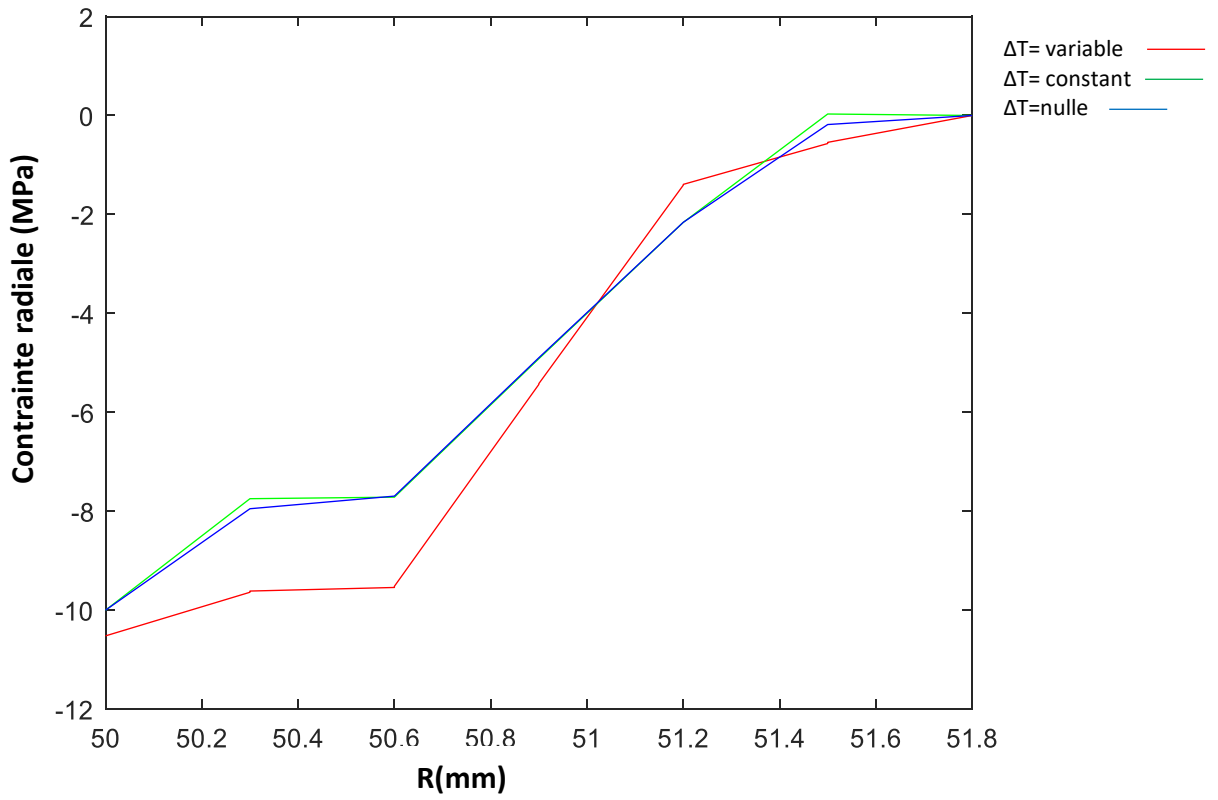


Figure IV.13 : distribution de la contrainte radiale à travers l'épaisseur du tube

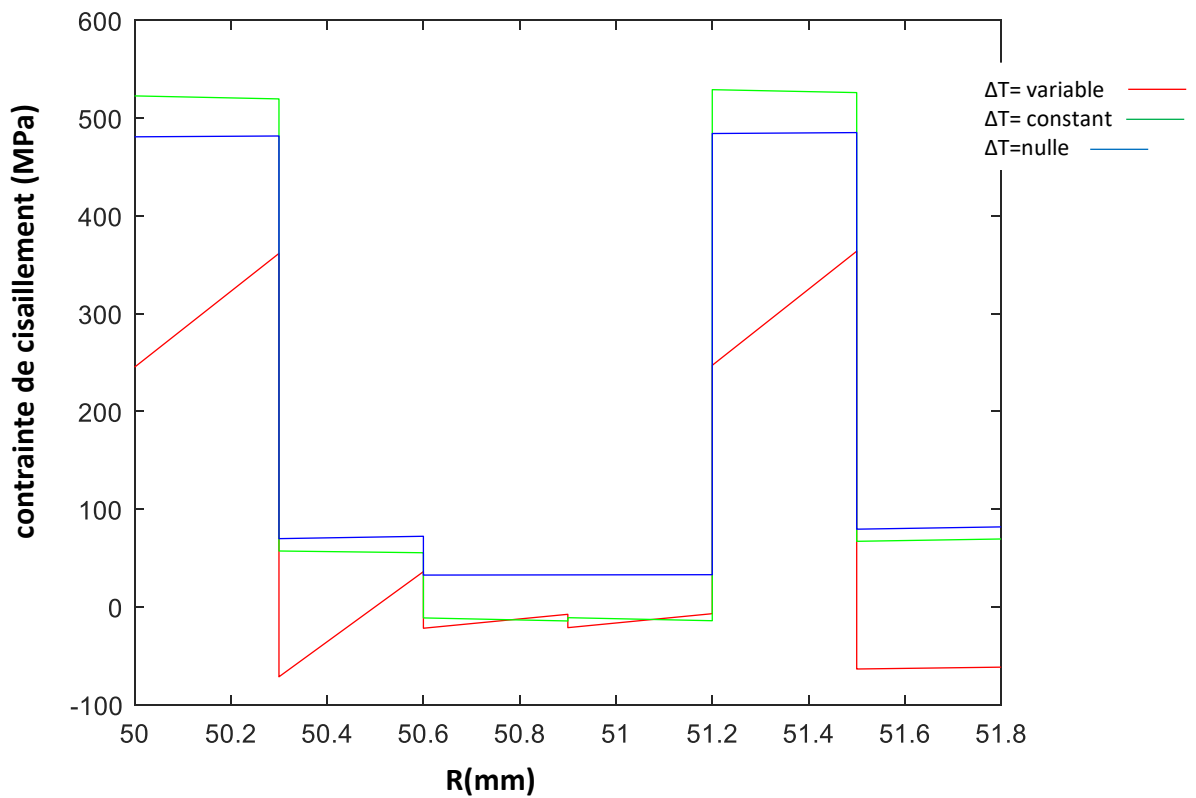


Figure IV.14: Distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du tube

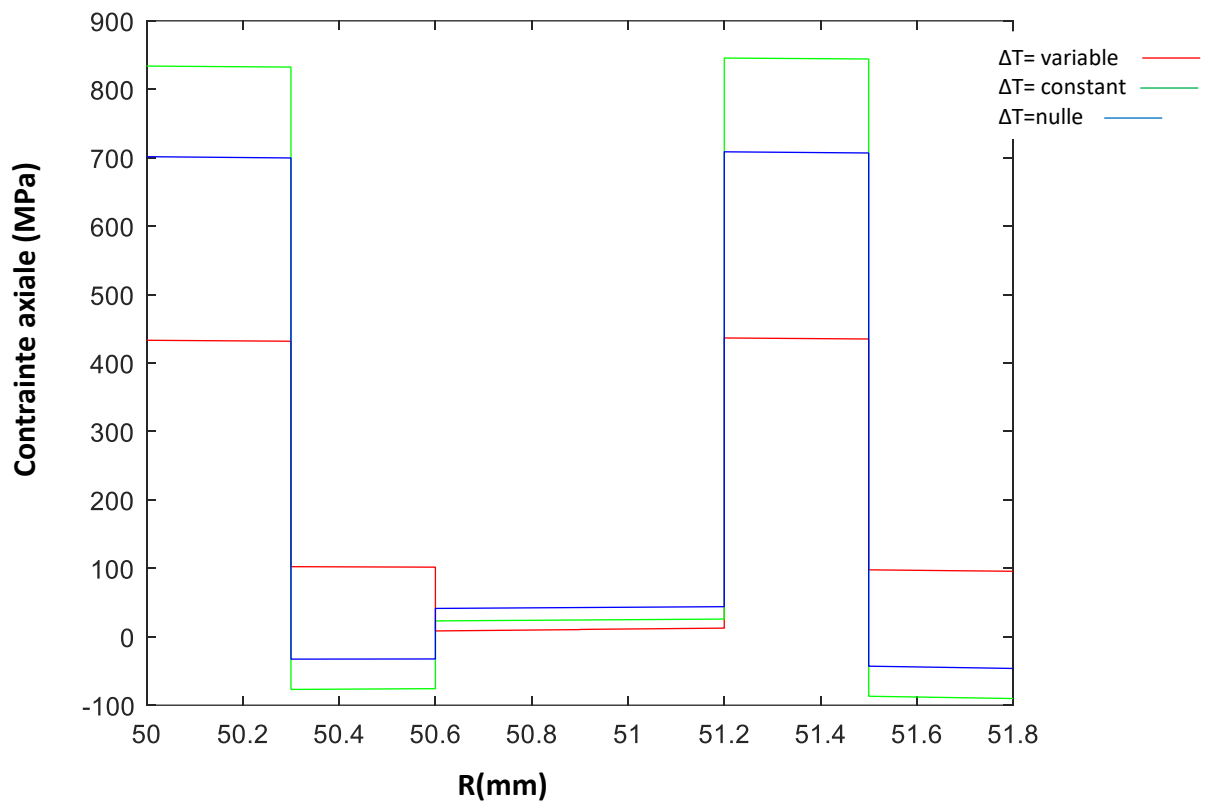


Figure IV.15 : Distribution de la contrainte axiale à travers l'épaisseur du tube

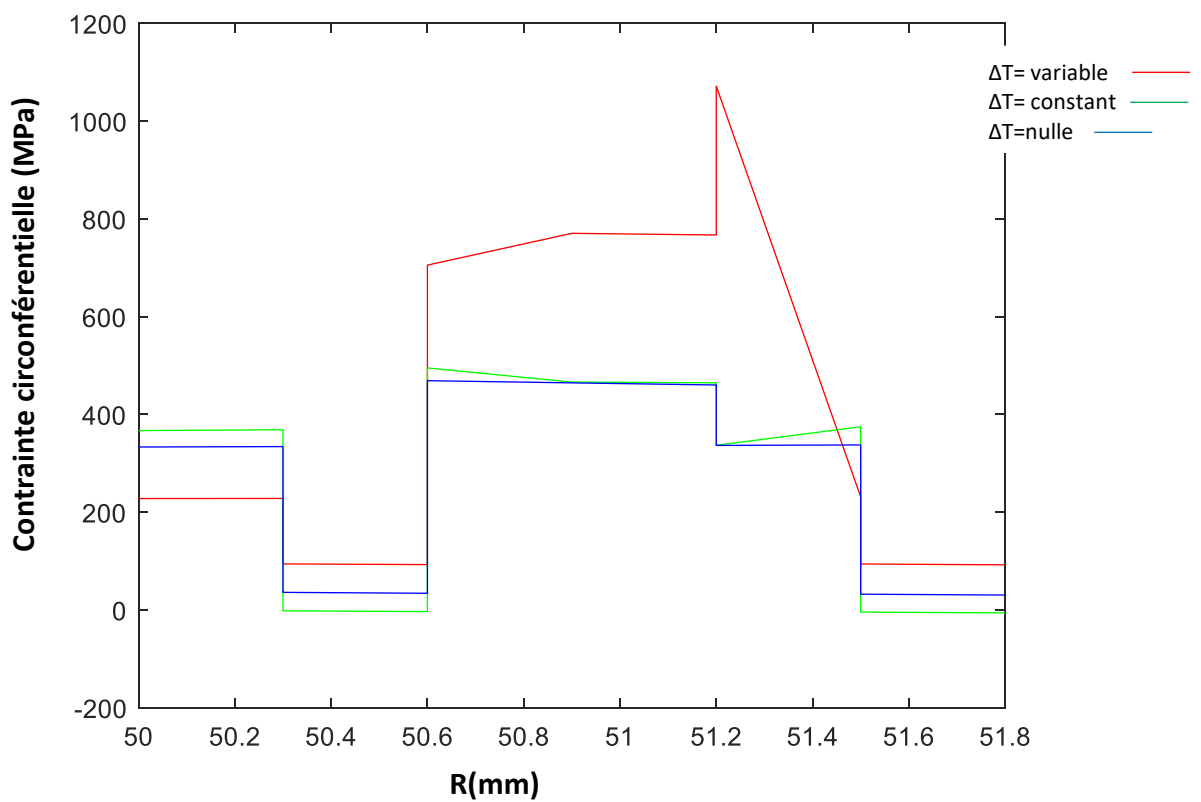


Figure IV.16 : Distribution de la contrainte circonférentielle sur la distance radiale

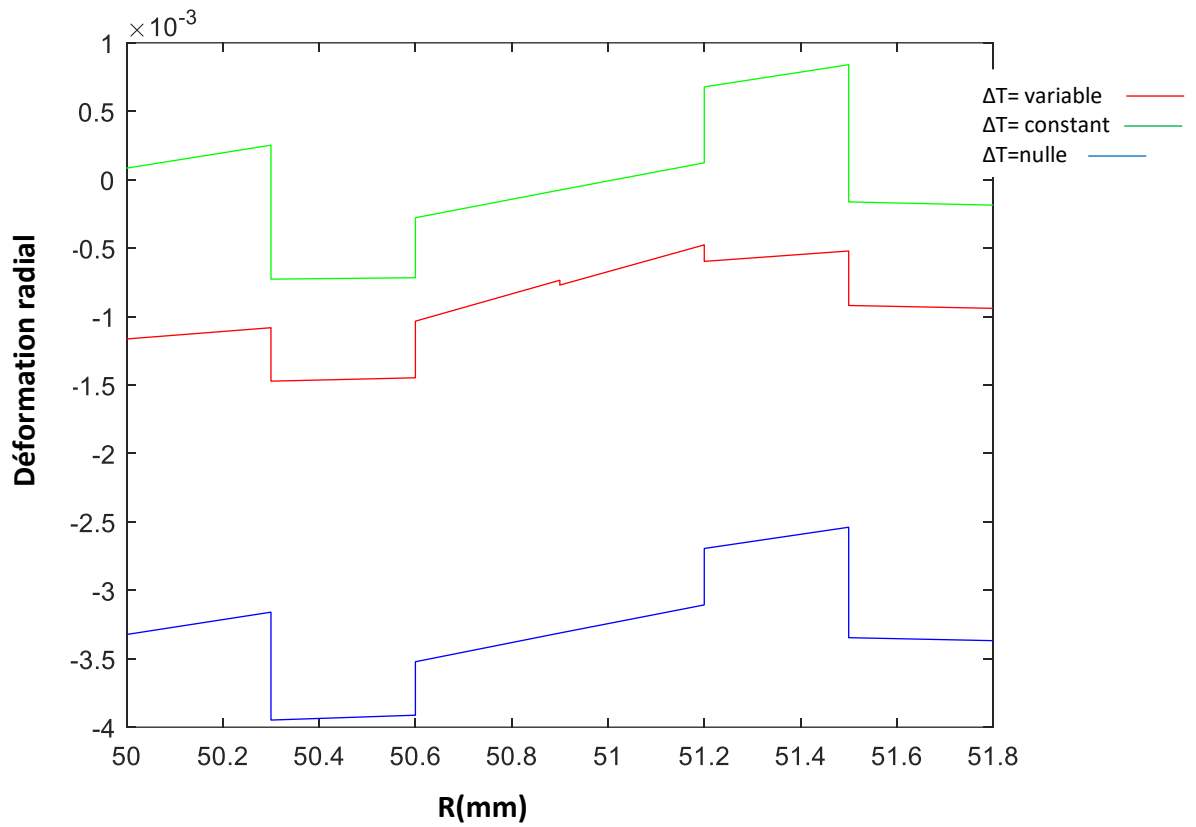


Figure IV.17 : Distribution de la déformation radiale à travers l'épaisseur du tube

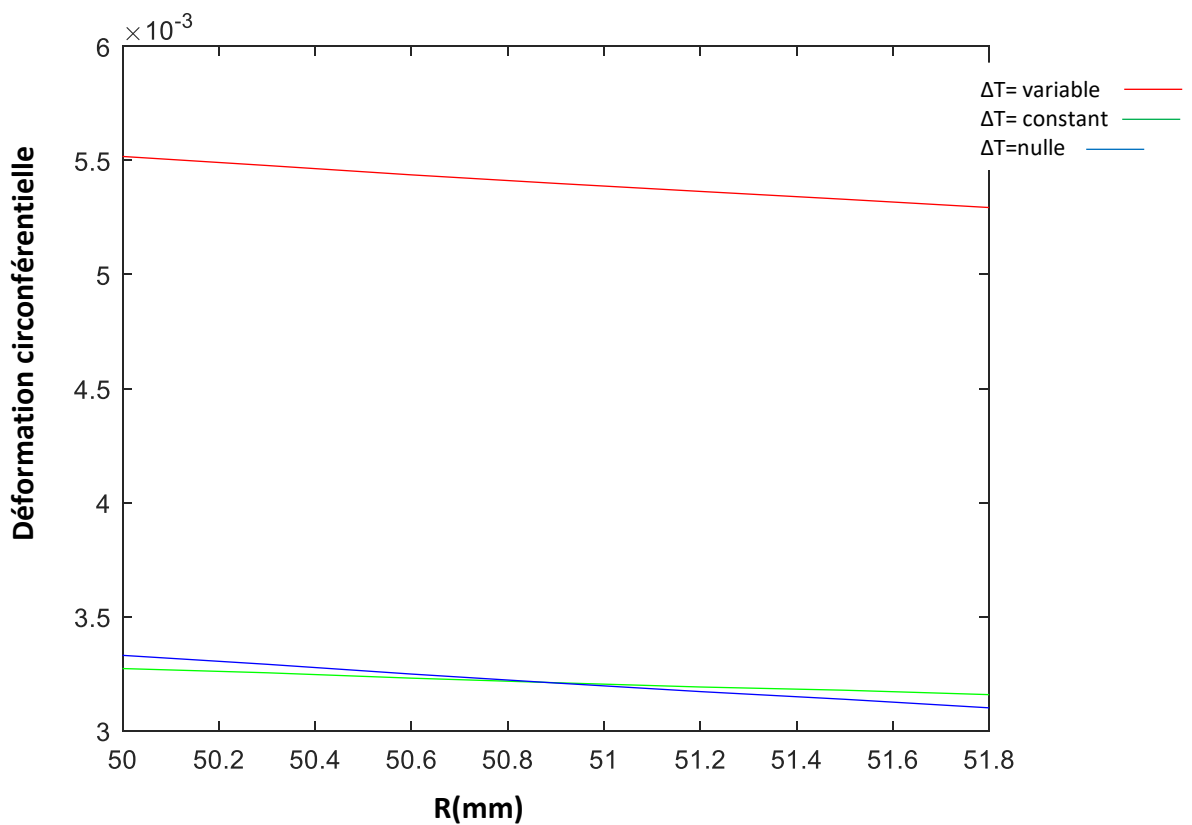


Figure IV.18 : Distribution de la déformation circonférentielle à travers l'épaisseur du tube



### **Interprétation :**

Nous remarquons que le changement de l'angle d'orientation n'affecte pas la forme des courbes, qui conservent la même allure, mais seules les valeurs des contraintes, des déplacements et des déformations changent. La discontinuité entre les couches d'angles d'orientation différents est ainsi plus importante. Les remarques concernant la comparaison entre les trois cas observées dans la configuration (a) restent les mêmes dans la configuration (b).

---

## CONCLUSION GENERALE

---

---

## CONCLUSION GENERALE

---

Les réservoirs en matériaux composites sont de plus en plus utilisés pour remplacer les tubes en acier au carbone traditionnels dans diverses industries, grâce à leur meilleure résistance à la corrosion, isolation thermique, rigidité élevée, légèreté et résistance spécifique.

L'objectif principal de cette étude est de développer un outil basé sur la modélisation analytique du comportement mécanique pour optimiser la fabrication de réservoirs en matériaux composites soumis à une pression interne et à des variations de température. L'analyse mécano-thermique de ces tubes repose sur des propriétés permettant d'exprimer les champs de déplacement, de déformation et de contrainte à travers l'épaisseur du tube. Le modèle développé a été programmé en utilisant le logiciel MATLAB.

Le premier chapitre est consacré à la compréhension de l'importance de l'hydrogène en tant que source d'énergie propre et à ses méthodes de stockage, tandis que le deuxième chapitre aborde les informations générales sur les matériaux composites. Les troisième et quatrième chapitres traitent de l'analyse mécano-thermique de ces tubes sous l'effet de la pression interne et du gradient thermique, ainsi que de la programmation du modèle et de la présentation des résultats obtenus.

Deux configurations ont été analysées : [+55/-55/+55/-55] et [+35/-35/+90/-90] sous l'effet de la seule pression interne (P-10Mpa), puis avec trois scénarios de gradient de température où celle-ci est soit constant, soit nul, soit variable.

L'étude a montré l'impact du changement d'angle de direction sur divers paramètres mécaniques tels que le déplacement, la contrainte et la déformation, à travers les variations de la pente des courbes et des discontinuités. Cela indique l'importance de l'agencement des couches dans le comportement mécanique des tubes en matériaux composites.

L'application du gradient thermique a modifié les valeurs des paramètres mécaniques, affectant la forme des courbes. Ce paramètre doit être pris en compte lors de l'analyse des réservoirs en matériaux composites.

Le travail de recherche peut être amélioré et complété par des études futures portant sur :

- L'application de la pression externe (cas des tubes sous l'eau).
- L'étude de configurations avec un nombre infini de couches (cas général).
- L'application d'autres types de contraintes (torsion, moment, etc.).
- Introduction des caractéristiques thermomécaniques en fonction de la température

---

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

---

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] : Germain Gondor. Pour le stockage de l'hydrogène : Analyse thermodynamique de la formation d'hydrures métalliques et optimisation du remplissage d'un réservoir.. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Franche-Comté, 2008.
- [2] : Pierre Millet. Production D'hydrogene Par Electrolyse de L'eau sur Membrane Acide , decouverte n°343 decembre 2006.
- [3] : Hadjer Benlatreche. L'hydrogène. Polycopié Pédagogique de Université Mostafa ben Boulaid – Batna,2020.Algeria
- [4] : Taqiyeddine Moumen , Les Composites, Polycopié Pédagogique Université Ibn Khaldoun- Tiaret
- [5] : Laurent Gornet , G\_En\_Eralit\_Es Sur Les Mat\_Eriaux Composites , Ecole D'ingénieur , 2008.
- [6] :Belhenini Soufyane , Matériaux Composites , Polycopié Pédagogique de Universite Belhadj-Bouchaib D'ain temouchent Laboratoire Des Structures Intelligentes
- [7] : Brek Samir , Comportement Mécanique Des Matériaux Composites , Polycopié Pédagogique Universtié Abbes Laghrour , Khenchela , Algeria , 2023
- [8] : H. Bakaiyan \*, H. Hosseini, E. Ameri , “Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermomechanical loading with thermal variations, Composite Structures, vol. 88 (2009), pp. 532-541
- [9] : Xia M, Takayanagi H, Kemmochi K. Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under internal pressure. Compos Struct 2001;53:483–91

---

## ANNEXE

---

---

## ANNEXE

---

$$\begin{aligned}
d_{11} &= (\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)} \beta^{(1)}) r_0^{\beta^{(1)}-1}; & e_{11} &= (\bar{C}_{23}^{(1)} - \bar{C}_{33}^{(1)} \beta^{(1)}) r_0^{-\beta^{(1)}-1} \\
a_{11} &= \bar{C}_{13}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)}) \alpha_1^{(1)} & ; & a_{12} = (\bar{C}_{36}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + 2\bar{C}_{33}^{(1)}) \alpha_2^{(1)}) r_0 \\
d_{26} &= (\bar{C}_{23}^{(6)} + \bar{C}_{33}^{(6)} \beta^{(6)}) r_0^{\beta^{(6)}-1} & ; & e_{26} = (\bar{C}_{23}^{(6)} - \bar{C}_{33}^{(6)} \beta^{(6)}) r_0^{-\beta^{(6)}-1} \\
a_{21} &= \bar{C}_{13}^{(6)} + (\bar{C}_{23}^{(6)} + \bar{C}_{33}^{(6)}) \alpha_1^{(6)} & ; & a_{22} = (\bar{C}_{36}^{(6)} + (\bar{C}_{23}^{(6)} + 2\bar{C}_{33}^{(6)}) \alpha_2^{(6)}) r_a \\
d_{31} &= r_1^{\beta^{(1)}} & ; & d_{32} = -r_1^{\beta^{(2)}} & ; & e_{31} = r_1^{-\beta^{(1)}} & ; & e_{32} = -r_1^{-\beta^{(2)}} \\
a_{31} &= (\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) r_1 & ; & a_{32} = (\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}) r_1^2 \\
d_{42} &= r_2^{\beta^{(2)}} & ; & d_{43} = -r_2^{\beta^{(3)}} & ; & e_{42} = r_2^{-\beta^{(2)}} & ; & e_{43} = -r_2^{-\beta^{(3)}} \\
a_{41} &= (\alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(3)}) r_2 & ; & a_{42} = (\alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(3)}) r_2^2 \\
d_{53} &= r_3^{\beta^{(3)}} & ; & d_{54} = -r_3^{\beta^{(4)}} & ; & e_{53} = r_3^{-\beta^{(3)}} & ; & e_{54} = -r_3^{-\beta^{(4)}} \\
a_{51} &= (\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(4)}) r_3 & ; & a_{52} = (\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(4)}) r_3^2 \\
d_{64} &= r_4^{\beta^{(4)}} & ; & d_{65} = -r_4^{\beta^{(5)}} & ; & e_{64} = r_4^{-\beta^{(4)}} & ; & e_{65} = -r_4^{-\beta^{(5)}} \\
a_{61} &= (\alpha_1^{(4)} - \alpha_1^{(5)}) r_4 & ; & a_{62} = (\alpha_2^{(4)} - \alpha_2^{(5)}) r_4^2 \\
d_{75} &= r_5^{\beta^{(5)}} & ; & d_{76} = -r_5^{\beta^{(6)}} & ; & e_{75} = r_5^{-\beta^{(5)}} & ; & e_{76} = -r_5^{-\beta^{(6)}} \\
a_{71} &= (\alpha_1^{(5)} - \alpha_1^{(6)}) r_5 & ; & a_{72} = (\alpha_2^{(4)} - \alpha_2^{(5)}) r_5^2 \\
d_{81} &= (\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)} \beta^{(1)}) r_1^{\beta^{(1)}-1}; & d_{82} &= (-\bar{C}_{23}^{(2)} - \bar{C}_{33}^{(2)} \beta^{(2)}) r_1^{\beta^{(2)}-1} \\
e_{81} &= (\bar{C}_{23}^{(1)} - \bar{C}_{33}^{(1)} \beta^{(1)}) r_1^{-\beta^{(1)}-1} & ; & e_{82} = (-\bar{C}_{23}^{(2)} + \bar{C}_{33}^{(2)} \beta^{(2)}) r_1^{-\beta^{(2)}-1} \\
a_{81} &= \bar{C}_{36}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)}) \alpha_1^{(1)} - (\bar{C}_{13}^{(2)} + (\bar{C}_{23}^{(2)} + \bar{C}_{33}^{(2)}) \alpha_1^{(2)}) \\
a_{82} &= (\bar{C}_{36}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + 2\bar{C}_{33}^{(1)}) \alpha_2^{(1)}) - (\bar{C}_{36}^{(2)} + (\bar{C}_{23}^{(2)} + 2\bar{C}_{33}^{(2)}) \alpha_2^{(2)}) r_1 \\
d_{92} &= (\bar{C}_{23}^{(2)} + \bar{C}_{33}^{(2)} \beta^{(2)}) r_2^{\beta^{(2)}-1}; & d_{93} &= (-\bar{C}_{23}^{(3)} - \bar{C}_{33}^{(3)} \beta^{(3)}) r_2^{\beta^{(3)}-1} \\
e_{92} &= (\bar{C}_{23}^{(2)} - \bar{C}_{33}^{(2)} \beta^{(2)}) r_2^{-\beta^{(2)}-1} & ; & e_{93} = (-\bar{C}_{23}^{(3)} + \bar{C}_{33}^{(3)} \beta^{(3)}) r_2^{-\beta^{(3)}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{91} &= \overline{C_{36}^{(2)}} + (\overline{C_{23}^{(2)}} + \overline{C_{33}^{(2)}}) \alpha_1^{(2)} - (\overline{C_{13}^{(3)}} + (\overline{C_{23}^{(3)}} + \overline{C_{33}^{(3)}}) \alpha_1^{(3)}) \\
a_{92} &= (\overline{C_{36}^{(2)}} + (\overline{C_{23}^{(2)}} + 2\overline{C_{33}^{(2)}}) \alpha_2^{(2)}) - (\overline{C_{36}^{(3)}} + (\overline{C_{23}^{(3)}} + 2\overline{C_{33}^{(3)}}) \alpha_2^{(3)}) r_2 \\
D_{13} &= (\overline{C_{23}^{(3)}} + \overline{C_{33}^{(3)}} \beta^{(3)}) r_3^{\beta^{(3)}-1}; \quad d_{14} = (-\overline{C_{23}^{(4)}} - \overline{C_{33}^{(4)}} \beta^{(4)}) r_3^{\beta^{(4)}-1} \\
E_{13} &= (\overline{C_{23}^{(3)}} - \overline{C_{33}^{(3)}} \beta^{(3)}) r_3^{-\beta^{(3)}-1}; \quad E_{14} = (\overline{-C_{23}^{(4)}} + \overline{C_{33}^{(4)}} \beta^{(4)}) r_3^{-\beta^{(4)}-1} \\
A_{11} &= \overline{C_{36}^{(3)}} + (\overline{C_{23}^{(3)}} + \overline{C_{33}^{(3)}}) \alpha_1^{(3)} - (\overline{C_{13}^{(4)}} + (\overline{C_{23}^{(4)}} + \overline{C_{33}^{(4)}}) \alpha_1^{(4)}) \\
A_{12} &= (\overline{C_{36}^{(3)}} + (\overline{C_{23}^{(3)}} + 2\overline{C_{33}^{(3)}}) \alpha_2^{(3)}) - (\overline{C_{36}^{(4)}} + (\overline{C_{23}^{(4)}} + 2\overline{C_{33}^{(4)}}) \alpha_2^{(4)}) r_3 \\
D_{24} &= (\overline{C_{23}^{(4)}} + \overline{C_{33}^{(4)}} \beta^{(4)}) r_4^{\beta^{(4)}-1}; \quad d_{25} = (-\overline{C_{23}^{(5)}} - \overline{C_{33}^{(5)}} \beta^{(5)}) r_4^{\beta^{(5)}-1} \\
E_{24} &= (\overline{C_{23}^{(4)}} - \overline{C_{33}^{(4)}} \beta^{(4)}) r_4^{-\beta^{(4)}-1}; \quad E_{25} = (\overline{-C_{23}^{(5)}} + \overline{C_{33}^{(5)}} \beta^{(5)}) r_4^{-\beta^{(5)}-1} \\
A_{21} &= \overline{C_{36}^{(4)}} + (\overline{C_{23}^{(4)}} + \overline{C_{33}^{(4)}}) \alpha_1^{(4)} - (\overline{C_{13}^{(5)}} + (\overline{C_{23}^{(5)}} + \overline{C_{33}^{(5)}}) \alpha_1^{(5)}) \\
A_{22} &= (\overline{C_{36}^{(4)}} + (\overline{C_{23}^{(4)}} + 2\overline{C_{33}^{(4)}}) \alpha_2^{(4)}) - (\overline{C_{36}^{(5)}} + (\overline{C_{23}^{(5)}} + 2\overline{C_{33}^{(5)}}) \alpha_2^{(5)}) r_4 \\
D_{35} &= (\overline{C_{23}^{(5)}} + \overline{C_{33}^{(5)}} \beta^{(5)}) r_5^{\beta^{(5)}-1}; \quad d_{36} = (-\overline{C_{23}^{(6)}} - \overline{C_{33}^{(6)}} \beta^{(6)}) r_5^{\beta^{(6)}-1} \\
E_{35} &= (\overline{C_{23}^{(5)}} - \overline{C_{33}^{(5)}} \beta^{(5)}) r_5^{-\beta^{(5)}-1}; \quad E_{36} = (\overline{-C_{23}^{(6)}} + \overline{C_{33}^{(6)}} \beta^{(6)}) r_5^{-\beta^{(6)}-1} \\
A_{31} &= \overline{C_{36}^{(5)}} + (\overline{C_{23}^{(5)}} + \overline{C_{33}^{(5)}}) \alpha_1^{(5)} - (\overline{C_{13}^{(6)}} + (\overline{C_{23}^{(6)}} + \overline{C_{33}^{(6)}}) \alpha_1^{(6)}) \\
A_{32} &= (\overline{C_{36}^{(5)}} + (\overline{C_{23}^{(5)}} + 2\overline{C_{33}^{(5)}}) \alpha_2^{(5)}) - (\overline{C_{36}^{(6)}} + (\overline{C_{23}^{(6)}} + 2\overline{C_{33}^{(6)}}) \alpha_2^{(6)}) r_5 \\
D_{41} &= (\overline{C_{12}^{(1)}} + \overline{C_{13}^{(1)}} \beta^{(1)}) \frac{r_1^{\beta^{(1)}+1} - r_0^{\beta^{(1)}+1}}{\beta^{(1)} + 1}; \quad D_{42} = (\overline{C_{12}^{(2)}} + \overline{C_{13}^{(2)}} \beta^{(2)}) \frac{r_2^{\beta^{(2)}+1} - r_1^{\beta^{(2)}+1}}{\beta^{(2)} + 1} \\
D_{43} &= (\overline{C_{12}^{(3)}} + \overline{C_{13}^{(3)}} \beta^{(3)}) \frac{r_3^{\beta^{(3)}+1} - r_2^{\beta^{(3)}+1}}{\beta^{(3)} + 1}; \quad D_{44} = (\overline{C_{12}^{(4)}} + \overline{C_{13}^{(4)}} \beta^{(4)}) \frac{r_4^{\beta^{(4)}+1} - r_3^{\beta^{(4)}+1}}{\beta^{(4)} + 1} \\
D_{45} &= (\overline{C_{12}^{(5)}} + \overline{C_{13}^{(5)}} \beta^{(5)}) \frac{r_5^{\beta^{(5)}+1} - r_4^{\beta^{(5)}+1}}{\beta^{(5)} + 1}; \quad D_{46} = (\overline{C_{12}^{(6)}} + \overline{C_{13}^{(6)}} \beta^{(6)}) \frac{r_6^{\beta^{(6)}+1} - r_5^{\beta^{(6)}+1}}{\beta^{(6)} + 1} \\
E_{41} &= (\overline{C_{12}^{(1)}} - \overline{C_{13}^{(1)}} \beta^{(1)}) \frac{r_1^{-\beta^{(1)}+1} - r_0^{-\beta^{(1)}+1}}{-\beta^{(1)}+1}; \quad E_{42} = (\overline{C_{12}^{(2)}} - \overline{C_{13}^{(2)}} \beta^{(2)}) \frac{r_2^{-\beta^{(2)}+1} - r_1^{-\beta^{(2)}+1}}{-\beta^{(2)}+1} \\
E_{43} &= (\overline{C_{12}^{(3)}} - \overline{C_{13}^{(3)}} \beta^{(3)}) \frac{r_3^{-\beta^{(3)}+1} - r_2^{-\beta^{(3)}+1}}{-\beta^{(3)}+1}; \quad E_{44} = (\overline{C_{12}^{(4)}} - \overline{C_{13}^{(4)}} \beta^{(4)}) \frac{r_4^{-\beta^{(4)}+1} - r_3^{-\beta^{(4)}+1}}{-\beta^{(4)}+1} \\
E_{45} &= (\overline{C_{12}^{(5)}} - \overline{C_{13}^{(5)}} \beta^{(5)}) \frac{r_5^{-\beta^{(5)}+1} - r_4^{-\beta^{(5)}+1}}{-\beta^{(5)}+1}; \quad E_{46} = (\overline{C_{12}^{(6)}} - \overline{C_{13}^{(6)}} \beta^{(6)}) \frac{r_6^{-\beta^{(6)}+1} - r_5^{-\beta^{(6)}+1}}{-\beta^{(6)}+1}
\end{aligned}$$



$$A_{41} = \sum_{k=1}^6 [(\overline{C_{11}^{(K)}} + (\overline{C_{12}^{(K)}} + \overline{C_{13}^{(K)}})\alpha_1^{(K)}) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2}]$$

$$A_{42} = \sum_{k=1}^6 [(\overline{C_{16}^{(K)}} + (\overline{C_{12}^{(K)}} + 2\overline{C_{13}^{(K)}})\alpha_2^{(K)}) \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3}]$$

$$D_{51} = (\overline{C_{26}^{(1)}} + \overline{C_{36}^{(1)}}\beta^{(1)}) \frac{r_1^{\beta^{(1)+2} - r_0^{\beta^{(1)+2}}}{\beta^{(1)+2}} ; \quad D_{52} = (\overline{C_{26}^{(2)}} + \overline{C_{36}^{(2)}}\beta^{(2)}) \frac{r_2^{\beta^{(2)+2} - r_1^{\beta^{(2)+2}}}{\beta^{(2)+2}}$$

$$D_{53} = (\overline{C_{26}^{(3)}} + \overline{C_{36}^{(3)}}\beta^{(3)}) \frac{r_3^{\beta^{(3)+2} - r_2^{\beta^{(3)+2}}}{\beta^{(3)+2}} ; \quad D_{54} = (\overline{C_{26}^{(4)}} + \overline{C_{36}^{(4)}}\beta^{(4)}) \frac{r_4^{\beta^{(4)+2} - r_3^{\beta^{(4)+2}}}{\beta^{(4)+2}}$$

$$D_{55} = (\overline{C_{26}^{(5)}} + \overline{C_{36}^{(5)}}\beta^{(5)}) \frac{r_5^{\beta^{(5)+2} - r_4^{\beta^{(5)+2}}}{\beta^{(5)+2}} ; \quad D_{56} = (\overline{C_{26}^{(6)}} + \overline{C_{36}^{(6)}}\beta^{(6)}) \frac{r_6^{\beta^{(6)+2} - r_5^{\beta^{(6)+2}}}{\beta^{(6)+2}}$$

$$E_{51} = (\overline{C_{26}^{(1)}} - \overline{C_{36}^{(1)}}\beta^{(1)}) \frac{r_1^{-\beta^{(1)+2} - r_0^{-\beta^{(1)+2}}}{-\beta^{(1)+2}} ; \quad E_{52} = (\overline{C_{26}^{(2)}} - \overline{C_{36}^{(2)}}\beta^{(2)}) \frac{r_2^{-\beta^{(2)+2} - r_1^{-\beta^{(2)+2}}}{-\beta^{(2)+2}}$$

$$E_{53} = (\overline{C_{26}^{(3)}} - \overline{C_{36}^{(3)}}\beta^{(3)}) \frac{r_3^{-\beta^{(3)+2} - r_2^{-\beta^{(3)+2}}}{-\beta^{(3)+2}} ; \quad E_{54} = (\overline{C_{26}^{(4)}} - \overline{C_{36}^{(4)}}\beta^{(4)}) \frac{r_4^{-\beta^{(4)+2} - r_3^{-\beta^{(4)+2}}}{-\beta^{(4)+2}}$$

$$E_{55} = (\overline{C_{26}^{(5)}} - \overline{C_{36}^{(5)}}\beta^{(5)}) \frac{r_5^{-\beta^{(5)+2} - r_4^{-\beta^{(5)+2}}}{-\beta^{(5)+2}} ; \quad E_{56} = (\overline{C_{26}^{(6)}} - \overline{C_{36}^{(6)}}\beta^{(6)}) \frac{r_6^{-\beta^{(6)+2} - r_5^{-\beta^{(6)+2}}}{-\beta^{(6)+2}}$$

$$A_{51} = \sum_{k=1}^6 [(\overline{C_{16}^{(K)}} + (\overline{C_{26}^{(K)}} + \overline{C_{36}^{(K)}})\alpha_1^{(K)}) \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3}]$$

$$A_{52} = \sum_{k=1}^6 [(\overline{C_{66}^{(K)}} + (\overline{C_{26}^{(K)}} + 2\overline{C_{13}^{(K)}})\alpha_2^{(K)}) \frac{r_k^4 - r_{k-1}^4}{4}]$$

$$f_{1=p_0+\xi_r^{(1)}\Delta T^{(1)}-c_{23}^{(1)}} \left( \eta^{(1)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} - 2\eta^{(1)}B}{1-\beta^{(1)2}} + \eta^{(1)}B \ln r_0 \right) - c_{33}^{(1)} \left( \eta^{(1)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} - 2\eta^{(1)}B}{1-\beta^{(1)2}} + \eta^{(1)}B \ln r_0 + \eta^{(1)}B \right)$$

$$f_2 = \xi_r^{(6)} \Delta T^{(6)} - c_{23}^{(6)} \left( \eta^{(6)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(6)}}{c_{33}^{(6)}} - 2\eta^{(6)} B}{1 - \beta^{(6)2}} + \eta^{(6)} B \ln r_a \right) - c_{33}^{(6)} \left( \eta^{(6)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(6)}}{c_{33}^{(6)}} - 2\eta^{(6)} B}{1 - \beta^{(6)2}} + \eta^{(6)} B \ln r_a + \eta^{(6)} B \right)$$

$$f_3 = \left( \eta^{(2)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)} B}{1 - \beta^{(2)2}} + \eta^{(2)} B \ln r_1 \right) r_1 - \left( \eta^{(1)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} - 2\eta^{(1)} B}{1 - \beta^{(1)2}} + \eta^{(1)} B \ln (r_1) \right) r_1$$

$$f_4 = \left( \eta^{(3)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)} B}{1 - \beta^{(3)2}} + \eta^{(3)} B \ln r_2 \right) r_2 - \left( \eta^{(2)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)} B}{1 - \beta^{(2)2}} + \eta^{(2)} B \ln (r_2) \right) r_2$$

$$f_5 = \left( \eta^{(4)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)} B}{1 - \beta^{(4)2}} + \eta^{(4)} B \ln r_3 \right) r_3 - \left( \eta^{(3)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)} B}{1 - \beta^{(3)2}} + \eta^{(3)} B \ln (r_3) \right) r_3$$

$$f_6 = \left( \eta^{(5)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)} B}{1 - \beta^{(5)2}} + \eta^{(5)} B \ln r_4 \right) r_4 - \left( \eta^{(4)} (A - T_{\text{ref}}) + \frac{\frac{B \xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)} B}{1 - \beta^{(4)2}} + \eta^{(4)} B \ln (r_4) \right) r_4$$

$$f_7 = \left( \eta^{(6)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(6)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(6)}B}{1-\beta^{(6)2}} + \eta^{(6)}B \ln r_5 \right) r_5 - \left( \eta^{(5)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)}B}{1-\beta^{(5)2}} + \eta^{(5)}B \ln(r_5) \right) r_5$$

$$f_8 = -\xi_r^{(2)} \Delta T^{(2)} + \overline{c_{23}^{(2)}} \left( \eta^{(2)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)}B}{1-\beta^{(2)2}} + \eta^{(2)}B \ln r_1 \right) + \overline{c_{33}^{(2)}} \left( \eta^{(2)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)}B}{1-\beta^{(2)2}} + \eta^{(2)}B \ln r_1 + \eta^{(2)}B \right) + \xi_r^{(1)} \Delta T^{(1)} - \overline{c_{23}^{(1)}} \left( \eta^{(1)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} - 2\eta^{(1)}B}{1-\beta^{(1)2}} + \eta^{(1)}B \ln r_1 \right) - \overline{c_{33}^{(1)}} \left( \eta^{(1)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} - 2\eta^{(1)}B}{1-\beta^{(1)2}} + \eta^{(1)}B \ln r_1 + \eta^{(1)}B \right)$$

$$f_9 = -\xi_r^{(3)} \Delta T^{(3)} + \overline{c_{23}^{(3)}} \left( \eta^{(3)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)}B}{1-\beta^{(3)2}} + \eta^{(3)}B \ln r_2 \right) + \overline{c_{33}^{(3)}} \left( \eta^{(3)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)}B}{1-\beta^{(3)2}} + \eta^{(3)}B \ln r_2 + \eta^{(3)}B \right) + \xi_r^{(2)} \Delta T^{(2)} - \overline{c_{23}^{(2)}} \left( \eta^{(2)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)}B}{1-\beta^{(2)2}} + \eta^{(2)}B \ln r_2 \right) - \overline{c_{33}^{(2)}} \left( \eta^{(2)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} - 2\eta^{(2)}B}{1-\beta^{(2)2}} + \eta^{(2)}B \ln r_2 + \eta^{(2)}B \right)$$

$$f_{10} = -\xi_r^{(4)} \Delta T^{(4)} + \overline{c_{23}^{(4)}} \left( \eta^{(4)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)}B}{1-\beta^{(4)2}} + \eta^{(4)}B \ln r_3 \right) + \overline{c_{33}^{(4)}} \left( \eta^{(4)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)}B}{1-\beta^{(4)2}} + \eta^{(4)}B \ln r_3 + \eta^{(4)}B \right) + \xi_r^{(3)} \Delta T^{(3)} - \overline{c_{23}^{(3)}} \left( \eta^{(3)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)}B}{1-\beta^{(3)2}} + \eta^{(3)}B \ln r_3 \right) - \overline{c_{33}^{(3)}} \left( \eta^{(3)}(A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(3)}}{c_{33}^{(3)}} - 2\eta^{(3)}B}{1-\beta^{(3)2}} + \eta^{(3)}B \ln r_3 + \eta^{(3)}B \right)$$

$$f_{11} = -\xi_r^{(5)} \Delta T^{(5)} + \overline{c_{23}^{(5)}} \left( \eta^{(5)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)} B}{1-\beta^{(5)2}} + \eta^{(5)} B \ln r_4 \right) + \overline{c_{33}^{(5)}} \left( \eta^{(5)} (A - T_{ref}) + \frac{B\xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)} B \right) + \eta^{(5)} B \ln r_4 + \eta^{(5)} B \right) + \xi_r^{(4)} \Delta T^{(4)} - \overline{c_{23}^{(4)}} \left( \eta^{(4)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)} B}{1-\beta^{(4)2}} + \eta^{(4)} B \ln r_4 + \eta^{(4)} B \right) - \overline{c_{33}^{(4)}} \left( \eta^{(4)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(4)}}{c_{33}^{(4)}} - 2\eta^{(4)} B}{1-\beta^{(4)2}} + \eta^{(4)} B \ln r_4 + \eta^{(4)} B \right)$$

$$f_{12} = -\xi_r^{(6)} \Delta T^{(6)} + \overline{c_{23}^{(6)}} \left( \eta^{(6)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(6)}}{c_{33}^{(6)}} - 2\eta^{(6)} B}{1-\beta^{(6)2}} + \eta^{(6)} B \ln r_5 \right) + \overline{c_{33}^{(6)}} \left( \eta^{(6)} (A - T_{ref}) + \frac{B\xi_r^{(6)}}{c_{33}^{(6)}} - 2\eta^{(6)} B \right) + \eta^{(6)} B \ln r_5 + \eta^{(6)} B \right) + \xi_r^{(5)} \Delta T^{(5)} - \overline{c_{23}^{(5)}} \left( \eta^{(5)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)} B}{1-\beta^{(5)2}} + \eta^{(5)} B \ln r_5 + \eta^{(5)} B \right) - \overline{c_{33}^{(5)}} \left( \eta^{(5)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(5)}}{c_{33}^{(5)}} - 2\eta^{(5)} B}{1-\beta^{(5)2}} + \eta^{(5)} B \ln r_5 + \eta^{(5)} B \right)$$

$$f_{13} = \frac{p_0 r_0^2}{2} + \sum_{k=1}^6 [\xi_{z\theta}^{(K)} \Delta T^{(k)} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} - \overline{c_{12}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{ref}) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \frac{\frac{B\xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)} B}{1-\beta^{(k)2}} \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \eta^{(K)} B [(\frac{r_k^2}{2} \ln r_k - \frac{r_{k-1}^2}{2} \ln r_{k-1}) - \frac{1}{4} (r_k^2 - r_{k-1}^2)]) - \overline{c_{13}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{ref}) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \frac{B\xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)} B) \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2} + \eta^{(K)} B [(\frac{r_k^2}{2} \ln r_k - \frac{r_{k-1}^2}{2} \ln r_{k-1}) - \frac{1}{4} (r_k^2 - r_{k-1}^2)] + \eta^{(K)} B \frac{r_k^2 - r_{k-1}^2}{2}]$$

$$f_{14} = \sum_{k=1}^6 [\xi_{z\theta}^{(K)} \Delta T^{(k)} \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3} - \overline{c_{26}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(K)} B [(\frac{r_k^3}{3} \ln r_k - \frac{r_{k-1}^3}{3} \ln r_{k-1}) - \frac{1}{6} (r_k^3 - r_{k-1}^3)]) - \overline{c_{36}^{(K)}} (\eta^{(k)} (A - T_{ref}) + \frac{\frac{B\xi_r^{(1K)}}{c_{33}^{(K)}} - 2\eta^{(K)} B}{1-\beta^{(k)2}} + \eta^{(K)} B [(\frac{r_k^3}{3} \ln r_k - \frac{r_{k-1}^3}{3} \ln r_{k-1}) - \frac{1}{6} (r_k^3 - r_{k-1}^3)]) + \eta^{(K)} B \frac{r_k^3 - r_{k-1}^3}{3}]$$

---

## RESUME

---

## ملخص

تُعتبر الخزانات من أكثر الوسائل استخداماً في نقل وتخزين المنتجات السائلة والغازية. ومع ذلك، أظهر استخدام الفولاذ في هذه التطبيقات حدوده بسبب وزنه الكبير ومشكلة التآكل، مما يؤدي إلى عواقب وخيمة في المنشآت الصناعية

في الوقت الحاضر، تُقدم المواد المركبة المصنوعة كحل واعد لتصنيع الأنابيب والخزانات، حيث تلبى المتطلبات البيئية وتتفوق على الفولاذ في بعض النواحي

يتطلب تحسين تكوين وحجم هذه الهياكل، بالإضافة إلى ضمان سلامتها، إجراء دراسات دقيقة لسلوكها تحت تأثير الضغوط الخارجية المختلفة

يهدف هذا العمل إلى تحديد السلوك الميكانيكي للأنابيب المصنوعة من المواد المركبة عند تعرضها للضغط الداخلي ودرجات الحرارة المتغيرة. تعتمد هذه الدراسة على تحديد مجال الضغط والتشوه والإزاحة عبر سماكة الأنابيب. تمت MATLAB برمجة النماذج التحليلية المستخدمة في هذه الدراسة في بيئة

## Résumé

Les réservoirs sont parmi les moyens les plus utilisés pour le transport et le stockage des produits liquides et gazeux. Cependant, l'utilisation de l'acier dans ces applications a montré ses limites en raison de son poids important et des problèmes de corrosion, ce qui entraîne des conséquences graves dans les installations industrielles.

Actuellement, les matériaux composites stratifiés se présentent comme une solution prometteuse pour la fabrication des tuyaux et des réservoirs, car ils répondent aux exigences environnementales et surpassent l'acier dans certains aspects.

L'amélioration de la conception et de la taille de ces structures, ainsi que la garantie de leur sécurité, nécessitent des études précises sur leur comportement sous l'effet de différentes pressions externes.

Ce travail vise à déterminer le comportement mécanique des tuyaux en matériaux composites exposés à une pression interne et à des températures variables. Cette étude repose sur la détermination du champ de pression, de la déformation et du déplacement à travers l'épaisseur des tuyaux. Les modèles analytiques développés dans cette étude ont été programmés dans l'environnement MATLAB.

## Abstract :

Tanks are among the most widely used means for transporting and storing liquid and gaseous products. However, the use of steel in these applications has shown its limitations due to its significant weight and corrosion issues, leading to severe consequences in industrial installations.

Currently, laminated composite materials present a promising solution for manufacturing pipes and tanks, as they meet environmental requirements and, in some aspects, outperform steel.

Improving the design and size of these structures, along with ensuring their safety, requires precise studies of their behavior under various external pressures.

This work aims to determine the mechanical behavior of pipes made of composite materials when subjected to internal pressure and varying temperatures. This study is based on determining the pressure field, deformation, and displacement through the pipe thickness. The analytical models developed in this study were programmed in the MATLAB environment.