



Université Mohamed Khider de Biskra
Sciences et Technologies
Génie Mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Métallurgie

Spécialité : Génie Métallurgique

Réf. : Entrez la référence du document

Présenté et soutenu par :

Benabdallah Taki Eddine

Agoun Oussama

Le : /./....

OBTENTION DU CHAMP DE TEMPÉRATURE CONDUCTIF DANS UN CYLINDRE MÉTALLIQUE PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIS

Jury:

Pr.	BENTRAH Hamza	Pr	Université de Biskra	Président
Dr.	BEGAR Abdelhakim	MCA	Université de Biskra	Rapporteur
Mlle.	Melik Baya	MAB	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire: 2023/2024

ملخص

في هذه الدراسة، قمنا بفحص الحل العددي لمعادلة الحرارة غير الثابتة باستخدام طريقة الفروق النهائية. تم اختيار تكوين معين: أسطوانة رأسية صلبة تتعرض لتدفق حراري دوري على طول جدارها. تمكنا من تحديد حقول الحرارة، بالإضافة إلى خطوط الحرارة المقابلة.

Résumé :

Dans cette étude, nous avons examiné la résolution numérique de l'équation de la chaleur en régime instationnaire à l'aide de la méthode des différences finies. Nous avons opté pour une configuration particulière : un cylindre vertical solide soumis à un flux de chaleur périodique le long de sa paroi. Nous avons réussi à déterminer les champs de température ainsi que les lignes isothermes correspondantes.

Abstract:

In this study, we examined the numerical solution of the unsteady heat equation using the finite difference method. We chose a specific configuration: a solid vertical cylinder subjected to periodic heat flux along its wall. We successfully determined the temperature fields as well as the corresponding isotherms.

Dédicace :

JE VOUDRAIS DÉDIER CETTE LETTRE À MES MERVEILLEUX PARENTS, DONT LE SOUTIEN INDÉFACTIBLE, L'AMOUR ET LES ENCOURAGEMENTS ONT ÉTÉ LE MOTEUR DE MON PARCOURS SCOLAIRE. VOTRE CONFIANCE EN MOI M'A INSPIRÉ À REPOUSSER MES LIMITES ET À POURSUIVRE MES RÊVES.

À MON FRÈRE, MA SCEUR, MA FAMILLE ET MES AMIS, VOS ENCOURAGEMENTS CONSTANTS ET VOTRE CONFIANCE EN MES CAPACITÉS M'ONT INSPIRÉ À POURSUIVRE MA CARRIÈRE UNIVERSITAIRE. MERCI D'ÊTRE TOUJOURS À MES CÔTÉS ET DE CÉLÉBRER MES RÉALISATIONS COMME SI ELLES ÉTAIENT LES VÔTRES.
MERCI POUR CE QUE VOUS M'AVEZ DONNÉ.

Remerciement :

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma gratitude envers Dieu, le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la santé, la volonté, le courage et la patience nécessaires pour mener à bien ma formation et réaliser ce travail de recherche.

*Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **BEGAR Abdelhakim**, Maître de conférences/A à l'Université de BISKRA, qui m'a donné l'opportunité de réaliser ma mémoire de Master sous sa direction. Je lui adresse ici mes plus sincères remerciements pour ses précieuses orientations, sa disponibilité constante, ses conseils fructueux, son suivi attentif, et ses qualités humaines remarquables.*

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance envers Monsieur Bentrah Hamza, professeur à l'Université de BISKRA, qui a accepté de présider mon jury de mémoire. Je suis très reconnaissant(e) de l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et je lui témoigne toute mon estime. Mes sincères remerciements lui sont adressés.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers Mademoiselle Melik Baya, Maître assistant A à l'Université de BISKRA, pour avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse et d'examiner mon travail. Sa contribution est très appréciée et je lui exprime ici ma profonde gratitude.

NOTATIONS UTILISEES :

NOTATION	SIGNIFICATION	UNITE
C_p	Chaleur spécifique	$\text{j}/(\text{kg } ^\circ\text{c})$
h	Coefficient d'échange par convection	$\text{w}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{c})$
Q	Flux thermique	w
r, x	Abscisses spéciales	m
T	Température	$^\circ\text{c}$
T_f	Température ambiante	$^\circ\text{c}$
t	Abscisse temporel	s
α	diffusivité thermique	m / s^2
λ	Conductivité thermique	$\text{w}/(\text{m } ^\circ\text{c})$
ρ	Masse volumique	kg/m^3
φ, ρ	Densité de flux	w/m^2

OPERATIONS ARITHMETIQUE :

Δ	Laplacien
d	dérivée totale
∂	dérivée partielle
grad	Gradient

Sommaire :

I. INTRODUCTION GENERALE:	1
---------------------------	---

CHAPITRE I : GENERALITES :

I.1. TRANSFERT DE CHALEUR.....	3
I.2. CONDUCTION :	7
I.2.1 CONCEPTS FONDAMENTAUX	7
I.2.1.1 champs de température	8
I.2.1.2 surfaces isothermes.....	8
I.2.1.3 Gradient de température	9
I.2.1.4 Quantité de chaleur, flux et densité de flux thermique	10
I.2.1.5 Loi de Fourier.....	11
I.2.1.6 Equation de la conduction de la chaleur	12
I.2. METHODE (A. D. I.) :	16
I.3. METHODE DES DIFFERENCE FINIS :	17
I.3.1 GENERALITES	17
I.3.2 REPRESENTATION DE DERRIVES PAR LES DIFFERENCE FINIS.....	19
I.3.3 FORMULATION MATHEMATIQUE.....	21
I.4. Méthode de Gauss-Seidel.....	22

CHAPITRE II : MISE EN EQUATION

II. Equation de base	22
II.1 HYPOTHESE DE PART	25
II.2 Equation de base en coordonnées cartésiennes	25
II.3 Transformations en coordonnées cylindriques	26
II.4 CONDITIONS AUX LIMITES DU SYSTEME.....	27

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE

III .Discrétisation de l'équation de base :.....	29
III.1 Discrétisation de temps.....	29
III.2 Discrétisation de condition limites :.....	30
III.3 Formulation numérique :.....	39

CHAPITRE VII : RESULTATS ET ANALYSES

VII.1		
Problématique.....		44
VII.2 Discussion des résultats		45
VII.3	Interprétation	des
résultats		52

CONCLUSION

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

INTRODUCTION GENERALE

Introduction generale :

D'après le second principe de la thermodynamique, toute transformation énergétique entraîne systématiquement une dégradation de l'énergie. La chaleur, forme d'énergie la plus désordonnée, est omniprésente dans les processus naturels et industriels.

Le transfert d'énergie résultant d'une disparité de température entre deux corps est défini comme un transfert de chaleur. Ce processus peut s'effectuer selon trois modes distincts : la conduction, la convection et le rayonnement, chacun obéissant à des lois spécifiques.

Bien que la conduction et le rayonnement soient les modes primaires de transmission de la chaleur, la convection combine la conduction avec le mouvement de matière.

Notre analyse se concentre sur la conduction, qui implique le transfert de chaleur induit par des différences de température à l'intérieur d'un même milieu (solide, liquide ou gazeux), ou entre deux milieux reliés physiquement. Ce mécanisme est le seul responsable du transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et dense.

Ainsi, l'étude de la conduction thermique vise principalement à comprendre la répartition de la chaleur dans les corps.

Une fois la distribution de la température ($T(r,t)$) établie à l'intérieur d'un corps en fonction de la position et du temps, le flux de chaleur à travers le corps peut être calculé en utilisant des lois reliant ce flux au gradient de température.

Dans ce travail, nous explorerons minutieusement la loi fondamentale qui lie le flux de chaleur au gradient de température. Notre exposé débutera par un aperçu de la conduction thermique dans un milieu homogène, en mettant l'accent sur l'étude d'un cas particulier : celui d'un cylindre vertical.

INTRODUCTION GENERALE

Nous commencerons par introduire brièvement l'équation de conduction, ainsi que les méthodes A.D.I. et des différences finies. Ensuite, nous approfondirons le développement de l'équation régissant ce phénomène thermique.

La troisième partie se concentrera sur les méthodes de résolution numérique utilisées pour résoudre cette équation. Enfin, la quatrième et dernière partie sera consacrée à l'analyse et à l'interprétation des résultats obtenus.

CHAPITRE I : GENERALITES

I.1. CONDUCTION

I.1.1. CONCEPTS FONDAMENTAUX

I.1.1.1 Champs de température

I.1.1.2 Surfaces isothermes

I.1.1.3 Gradient de température

I.1.1.4 Quantité de chaleur , flux et densité de flux thermique

I.1.1.5 Loi de Fourier

I.1.1.6 Equation de la conduction de la chaleur

I.2 METHODE (A . D . I .)

I.3 METHODE DES DIFFERENCE FINIS

I.3.1 GENERALITES

I.3.2 REPRESENTATION DE DERRIVES PAR LES DIFFERENCES FINIS

Introduction :

Le transfert de chaleur est un phénomène fondamental omniprésent dans notre univers, jouant un rôle crucial dans de nombreux processus naturels et technologiques. Il se réfère à la transmission d'énergie thermique d'une région à une autre, généralement due à une différence de température. Parmi les mécanismes de transfert de chaleur, la conduction est l'un des plus fondamentaux et des plus étudiés.

La conduction thermique se produit à travers la vibration des particules d'un matériau. Lorsqu'une région d'un matériau est chauffée, les particules de cette région gagnent en énergie cinétique, ce qui les fait vibrer plus rapidement. Ces vibrations se propagent ensuite aux particules voisines, transférant ainsi l'énergie thermique à travers le matériau. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'un équilibre thermique soit atteint, où toutes les régions du matériau ont une température uniforme.

La conduction est un processus essentiel dans de nombreux contextes, de la cuisson des aliments à la dissipation de la chaleur dans les composants électroniques. Comprendre les mécanismes de la conduction thermique est crucial pour concevoir des matériaux et des systèmes efficaces du point de vue énergétique, ainsi que pour résoudre divers problèmes d'ingénierie liés à la dissipation de la chaleur.

I.1 TRANSFERT DE CHALEUR :

Le transfert de chaleur est un processus physique fondamental qui décrit le déplacement de chaleur d'une région à une autre, généralement entre deux systèmes ou substances à des températures différentes. Ce phénomène omniprésent joue un rôle crucial dans de nombreux aspects de notre vie quotidienne, influençant les climats régionaux, la métallurgie, les technologies de chauffage et de refroidissement, ainsi que les processus industriels complexes. En explorant les mécanismes sous-jacents du transfert de chaleur, nous pouvons mieux comprendre les lois de la thermodynamique et développer des solutions innovantes pour optimiser l'efficacité énergétique et répondre aux défis contemporains liés au changement climatique et à la durabilité.

Il existe trois modes principaux de transfert de chaleur :

Conduction :

Conduction thermique est un mode de transfert de chaleur qui se produit lorsque la chaleur est transférée à travers un matériau ou entre deux objets en contact direct. Ce processus repose sur les collisions entre les particules du matériau, telles que les atomes ou les molécules, qui transmettent l'énergie thermique sans que les particules elles-mêmes se déplacent de manière significative. En d'autres termes, la chaleur se propage par l'intermédiaire des vibrations des particules dans la structure cristalline du matériau.

La capacité d'un matériau à conduire la chaleur est déterminée par sa conductivité thermique, qui est une propriété intrinsèque du matériau et dépend de facteurs tels que sa composition chimique, sa densité et sa structure cristalline. Par exemple, les métaux sont généralement de bons conducteurs thermiques en raison de la mobilité élevée des électrons libres dans leur structure cristalline, tandis que les matériaux isolants comme le bois ou le polystyrène ont une conductivité thermique plus faible en raison de la présence de nombreuses liaisons intermoléculaires qui entravent le transfert de chaleur.

La loi de Fourier décrit mathématiquement le flux de chaleur à travers un matériau en fonction du gradient de température et de la conductivité thermique du matériau. Plus précisément, elle établit que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température, avec une constante de proportionnalité égale à la conductivité thermique du matériau.

La conduction thermique est omniprésente dans de nombreux phénomènes naturels et applications technologiques, allant du refroidissement des composants électroniques à la diffusion de la chaleur à travers les parois des bâtiments. Comprendre les mécanismes de la conduction thermique est essentiel pour concevoir des matériaux et des systèmes thermiques efficaces, ainsi que pour résoudre des problèmes liés à la dissipation de la chaleur et au contrôle des températures dans diverses applications industrielles et environnementales.

Rayonnement :

Le transfert de chaleur par rayonnement électromagnétique est un phénomène fascinant et omniprésent dans notre univers. Contrairement à la conduction et à la convection, qui impliquent respectivement le déplacement de molécules dans un milieu matériel et la transmission de chaleur à travers un fluide, le rayonnement thermique peut se propager à travers l'espace vide ou un milieu transparent sans avoir besoin d'un support matériel.

Ce processus repose sur la nature ondulatoire de la lumière et d'autres formes d'électromagnétisme. Tout objet dont la température est supérieure au zéro absolu émet du rayonnement électromagnétique. Ce rayonnement est composé de photons, des particules élémentaires de lumière, qui transportent de l'énergie thermique.

Un exemple bien connu de transfert de chaleur par rayonnement est le rayonnement solaire. Le Soleil, grâce à sa température extrêmement élevée, émet une quantité massive de rayonnement électromagnétique dans toutes les directions. Ce rayonnement traverse l'espace vide jusqu'à atteindre la Terre. Une fois sur Terre, une partie de ce rayonnement est absorbée par la surface terrestre, chauffant ainsi notre planète et alimentant les processus climatiques et météorologiques.

Un autre exemple courant est celui d'un radiateur électrique. Lorsqu'il est allumé, le fil chauffant à l'intérieur du radiateur émet du rayonnement thermique. Ce rayonnement est ensuite absorbé par les objets et les personnes dans la pièce, les réchauffant.

L'importance du rayonnement thermique dans divers domaines est immense. En astronomie, il est essentiel pour comprendre la composition et l'évolution des étoiles. En ingénierie, il est utilisé dans la conception de systèmes de chauffage et de refroidissement efficaces. En physique des matériaux, il est crucial pour étudier les propriétés thermiques des matériaux.

Convection :

La convection est un mécanisme crucial de transfert de chaleur qui se produit à travers le déplacement de fluides tels que les liquides ou les gaz. Ce processus est déclenché par des écarts de température au sein du fluide. Deux formes principales de convection existent : la convection naturelle et la convection forcée.

La convection naturelle se manifeste lorsque les différences de densité au sein du fluide, dues à des variations de température, engendrent un mouvement spontané. Par exemple, lorsqu'une partie d'un liquide ou d'un gaz est chauffée, elle devient moins dense et tend à monter tandis que la partie plus froide, plus dense, descend. Ce cycle de circulation crée un mouvement convectif qui transporte la chaleur.

En revanche, la convection forcée intervient lorsque le mouvement du fluide est induit de manière externe, généralement par l'intermédiaire d'une pompe ou d'un ventilateur. Contrairement à la convection naturelle, où le mouvement découle des variations de densité dues à la chaleur, la convection forcée permet un contrôle plus précis du transfert de chaleur en manipulant activement le mouvement du fluide.

En somme, que ce soit par la convection naturelle, impulsée par les gradients de densité thermique, ou par la convection forcée, générée par des dispositifs externes, ce processus joue un rôle essentiel dans la dissipation de la chaleur et la régulation des températures dans de nombreux systèmes, qu'ils soient naturels ou artificiels.

Ces trois modes de transfert de chaleur sont omniprésents dans de nombreux phénomènes physiques et ont des applications dans divers domaines, de la conception des bâtiments et des systèmes de chauffage à la thermodynamique des processus industriels.

I.2. CONDUCTION :[1,2]

I.2.1 CONCEPTS FONDAMENTAUX :

À une échelle considérable, on observe une uniformisation des températures. Cependant, lorsque certaines régions parviennent à maintenir des températures stables grâce à la présence de sources de chaleur ou de puits de chaleur, une diffusion continue de la chaleur se produit des zones chaudes vers les zones froides environnantes. Cette dynamique de transfert thermique rend crucial le défi de définir un système matériel de manière précise.

Pour cela, il est essentiel de considérer plusieurs aspects :

Configuration géométrique : La forme et la structure du système influencent la manière dont la chaleur se distribue et se transfère. Les caractéristiques géométriques déterminent les chemins de conduction thermique et affectent la répartition spatiale de la température.

Propriétés thermophysiques : Les propriétés des matériaux, telles que la conductivité thermique, la capacité calorifique et la densité, jouent un rôle central dans le comportement thermique du système. Ces propriétés déterminent la vitesse à laquelle la chaleur peut se propager à travers le matériau.

Sources potentielles de chaleur : Il est nécessaire d'identifier toutes les sources de chaleur internes et externes qui peuvent influencer le système. Cela inclut les sources internes, comme les réactions chimiques ou les dispositifs électroniques, ainsi que les sources externes, comme l'énergie solaire ou les échanges avec l'air ambiant.

Interactions avec l'environnement externe : Le système n'existe pas en isolation, et ses échanges thermiques avec l'environnement externe, tels que la convection avec l'air environnant ou le rayonnement thermique, doivent être pris en compte. Ces interactions peuvent significativement modifier la distribution de la chaleur au sein du système.

En combinant ces différents éléments, on peut établir une modélisation précise du comportement thermique du système matériel, permettant ainsi de prévoir et de contrôler les variations de température et d'optimiser l'efficacité thermique pour diverses applications.

I.2.1.1 Champs de température :

À chaque point d'un objet, indépendamment de sa composition, il est possible d'attribuer une température, représentée par une fonction scalaire des coordonnées spatiales du point et du temps : $T(P, t)$. Cette température peut varier ou rester constante au cours du temps. Si la température change en fonction du temps, on parle de régime thermique variable. Dans ce cas, la température à un point donné P à un instant t est influencée par les conditions thermiques antérieures ainsi que par les éventuelles sources ou puits de chaleur présents dans l'objet.

En revanche, si la température reste constante dans le temps, on parle de régime thermique permanent. Dans cette situation, pour chaque point P de l'objet, la température ne dépend que de la position spatiale et reste stable, quelles que soient les fluctuations externes éventuelles. Cela signifie que le transfert de chaleur à l'intérieur de l'objet s'est équilibré, et il n'y a plus de variation temporelle de la température.

Ces concepts sont essentiels pour comprendre et analyser les phénomènes de transfert de chaleur dans divers matériaux et structures, qu'il s'agisse de dispositifs électroniques, de bâtiments, de moteurs ou d'autres systèmes thermiques.

I.2.1.2 Surfaces isothermes :

En métallurgie, une surface isotherme est une surface où tous les points partagent la même température à un moment donné. Ces surfaces sont essentielles pour comprendre et contrôler les processus de traitement thermique des métaux.

Dans un régime thermique variable, les températures à l'intérieur du métal changent au fil du temps, entraînant le mouvement et la déformation des surfaces isothermes. Par exemple, lors du chauffage ou du refroidissement d'une pièce métallique, les surfaces isothermes se déplacent à mesure que la chaleur se diffuse à travers le matériau. Ces déplacements peuvent affecter des propriétés critiques telles que la dureté, la ductilité et la résistance mécanique du métal. La

gestion précise de ce processus permet d'obtenir des propriétés mécaniques spécifiques par des traitements thermiques tels que la trempe, la revenu, ou l'annealing.

En revanche, dans un régime thermique permanent, où la température est maintenue constante dans le temps, les surfaces isothermes restent fixes. Cela se produit généralement dans des conditions de traitement thermique où la température du métal est maintenue constante pendant une période prolongée, permettant des transformations de phase uniformes et prévisibles. Par exemple, durant un traitement d'annealing, maintenir une température constante permet aux grains métalliques de se réarranger de manière optimale, améliorant ainsi les propriétés mécaniques globales du métal.

Les surfaces isothermes sont particulièrement importantes dans les simulations et les modélisations des processus de traitement thermique. En utilisant des logiciels spécialisés, les ingénieurs peuvent prédire le comportement des surfaces isothermes et ainsi optimiser les cycles thermiques pour obtenir les propriétés désirées du métal. De plus, la compréhension des mouvements et des transformations des surfaces isothermes permet de concevoir des processus plus efficaces et de minimiser les défauts tels que les contraintes résiduelles ou la déformation.

Ainsi, les surfaces isothermes jouent un rôle crucial dans le traitement thermique en métallurgie, permettant de contrôler et d'optimiser les propriétés des métaux pour diverses applications industrielles.

Une surface isotherme. En instant t. satisfait à une fonction $f(P, t)=T$

Où:

T: Température commune à tous les points de la surface isotherme

I.2.1.3 Gradients de la température :

Le gradient en un point P de l'espace est représenté par un vecteur dont les trois composantes

cartésiennes sont: $\frac{\partial T}{\partial X}, \frac{\partial T}{\partial Y}, \frac{\partial T}{\partial Z} \dots\dots\dots(I.1)$

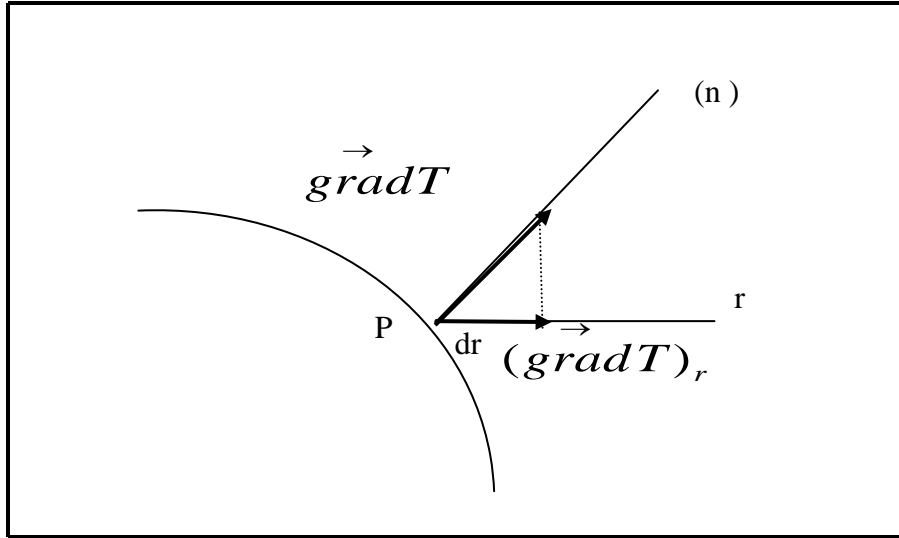


Fig I-01-Gradients de la température

On représente ce vecteur par la notation $\vec{\text{grad}}T$. on a donc :

$$\vec{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \dots\dots\dots(\text{I.2})$$

I.2.1.4 Quantité de chaleur: FLUX THERMIQUE ET DENSITE DE FLUX THERMIQUE.

Prenons en compte une surface S qui est chauffée de manière uniforme. Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre cette surface et l'environnement pendant un intervalle de temps dt . On désigne par :

- **Flux thermique** : puissance échangé par la surface S.

$$\phi = \frac{dq}{dt} \dots\dots\dots(\text{I.3})$$

- **Densité de flux thermique** la puissance échangée par une surface unité de S

$$d\Phi = \varphi \cdot n dS \dots\dots\dots(I.4)$$

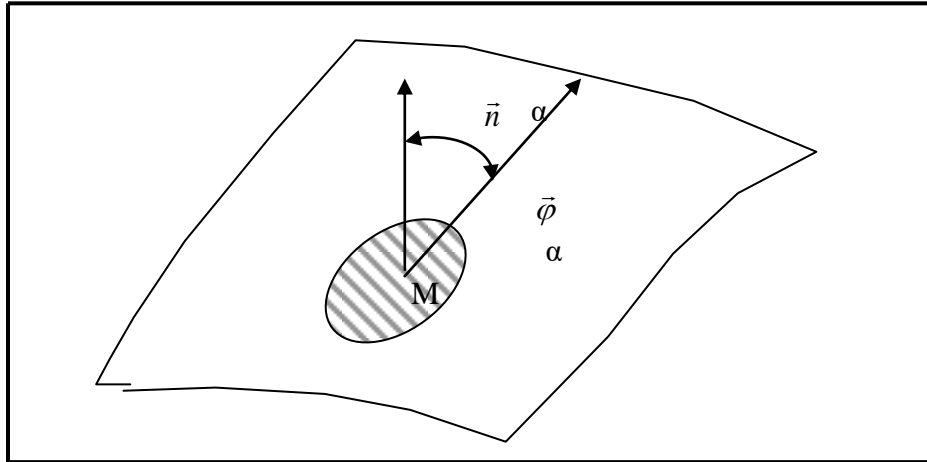


Fig.I-02. Densité de flux thermique

I.2.1.5 Loi de Fourier [4]:

ENONCE:Dans un milieu isotrope, la loi de Fourier décrit une relation linéaire entre la densité de flux thermique (quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps) et le gradient de température (variation de la température par unité de distance). En chaque point du milieu, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle à la conductivité thermique du matériau et au gradient de température. Cette relation peut être exprimée par la formule :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{grad}T \dots\dots\dots (1.1)$$

Par convention $\vec{\varphi}$ est le compte positive dans le sens d'économiquement de la chaleur. C a d, vers les températures décroissantes.

Le vecteur \vec{grad} est porté par le même axe, mais de sens contraire à $\vec{\Psi}$, d'où le signe moins de la loi de FOURIER (fig.1.1)

λ est la conductivité thermique du matériau (une mesure de la capacité du matériau à conduire la chaleur),

$\vec{grad}T$ est le gradient de température (un vecteur indiquant la direction et le taux de changement de température).

La conductivité thermique λ est une propriété matérielle qui indique la facilité avec laquelle la chaleur peut se propager à travers le matériau. Dans un milieu isotrope, cette conductivité est uniforme dans toutes les directions.

L'expression $-\lambda \vec{grad}T$ signifie que la chaleur se déplace toujours du point de température plus élevée vers le point de température plus basse, suivant la direction opposée au gradient de température. Le signe négatif indique cette direction du flux thermique.

La loi de Fourier est fondamentale en thermodynamique et en transfert de chaleur, car elle permet de modéliser et de prévoir la distribution de température dans divers matériaux sous différentes conditions. Elle est utilisée pour analyser les performances thermiques dans des applications telles que l'isolation des bâtiments, le refroidissement des composants électroniques, le traitement thermique des métaux, et bien d'autres domaines où la gestion de la chaleur est cruciale.

I.2.1.6 Equation de la conduction de la chaleur :

Imaginons un petit parallélépipède à l'intérieur d'un milieu homogène, avec des dimensions dx , dy , et dz (voir Fig. 1). Supposons que ce parallélépipède élémentaire soit uniquement soumis au processus de conduction thermique, c'est-à-dire qu'il n'absorbe ni ne libère de chaleur par convection ou rayonnement, et qu'il ne soit pas le site d'une réaction chimique endothermique ou exothermique.

Avec ces hypothèses fondamentales en place, examinons maintenant le bilan thermique de cet élément de volume $dx dy dz$.

Les côtés latéraux du parallélépipède ont généralement des températures différentes. Ainsi, nous pouvons exprimer la différence entre la quantité totale de chaleur entrant et sortant du parallélépipède comme étant utilisée pour chauffer la masse de matière de l'élément considéré.

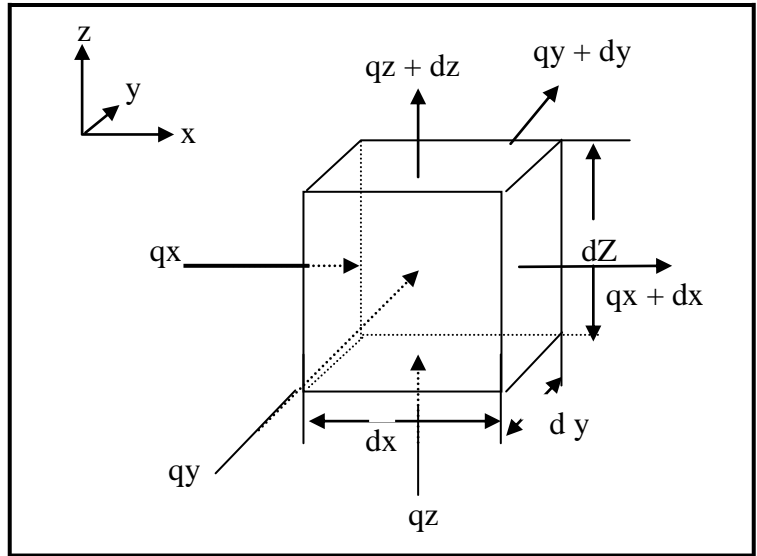


Fig.I-03. Parallélépipède d'étude

A travers la face dy, dz , où la température est T , il est rentré pendant le temps dt la quantité de chaleur :

$$dq_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy.dz.dt \dots\dots\dots(I.7)$$

De l'autre côté du parallélépipède, à une distance dx de la face précédente, la température a pour valeur $(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx)$ est telle que la quantité de chaleur sortant pendant le temps dt par cette face est égale à :

$$dq_{x+dx} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) dy.dz.dt = -\lambda (\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx) dy.dz.dt \dots\dots\dots(I.8)$$

La quantité de chaleur restée dans le parallélépipède est donc :

$$dq_A = dq_x - dq_{x+dx} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx.dy.dz.dt \dots\dots\dots(I.9)$$

En procédant de manière tout à fait similaire, on déterminerait que la quantité de chaleur acquise finalement par le parallélépipède en raison des flux de chaleur à travers les faces dx dz est donnée par :

$$dq_B = dq_y - dq_{y+dy} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx.dy.dz.dt \dots\dots\dots(\mathbf{I.10})$$

Et de même pour les face dx dy :

$$dq_c = dq_z - dq_{z+dz} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx.dy.dz.dt \dots\dots\dots(\mathbf{I.11})$$

En définitive, la quantité de chaleur gagnée au total par le Parallélépipède est égale à :

$$dq = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] dx.dy.dz.dt \dots\dots\dots(\mathbf{I.12})$$

Notons que cette quantité de chaleur a été utilisée pour augmenter de dT la température de l'élément.

Désignons par ρ .La densité de la substance et par cpsa chaleur massique. Le poids du parallélépipède élémentaire considéré est $\rho.cp.dx.dy.dz$. et l'on peut écrire :

$$dq = \rho.cp.dx.dy.dz.dT \dots\dots\dots(\mathbf{I.13})$$

Mais dt désignant l'échauffement de l'élément de volume pendant le temps dt , on a :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt \dots\dots\dots(\mathbf{I.14})$$

d'ou :

$$dq = \rho.cp.dx.dy.dz.\frac{\partial T}{\partial t} dt \dots\dots\dots(\mathbf{I.15})$$

En égalant les équations (I.12) et (I.15) , nous obtenons :

$$\frac{\lambda}{\rho.cp} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots(\mathbf{I.16})$$

Equation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots(\mathbf{I.17})$$

Désignons par ΔT le laplacien de T , qui est égal à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

et en posant : $\alpha = \frac{\lambda}{\rho.cp}$

α : porte le nom de diffusivité thermique .

Si à l'intérieur du volume élémentaire se situe une source d'énergie fournissant q unités de chaleur par unité de volume et par unité de temps, nous devons substituer le second terme de l'équation (I.12) par : $(\alpha \Delta T + q)dx.dy.dz.dt$ de sorte que la relation (I.17) deviendra :

$$\left(\Delta T + \frac{q}{\lambda} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{1}{\alpha} \dots\dots\dots(\mathbf{I.18})$$

Cette équation représente de manière générale la diffusion de la chaleur, et à partir de là, nous pouvons facilement déduire les cas particuliers qui se présentent fréquemment.

- ✓ Milieu avec source interne, en régime permanent.

$$\Delta T + \frac{q}{\lambda} = 0 \text{ (Équation de POISSON).....(I.19)}$$

- ✓ Milieu sans source interne, en régime permanent.

$$\Delta T = 0 \text{ (Équation de LAPLACE)(I.20)}$$

- ✓ Milieu sans source interne, en régime variable.

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{1}{\alpha} \text{ (Équation de la chaleur).....(I.21)}$$

I.2 METHODE DE A .D. I[9] : (méthode des Directions Implicites Alternées)

La méthode A.D.I ou D.I.A est une approche relativement récente, tirant son intérêt de la simplification qu'elle apporte au système.

Cette technique implique de traiter de manière implicite seulement une partie du deuxième terme discrétisé (selon l'une des deux directions r ou z) pour un pas de temps donné, en alternant le choix de cette direction à chaque itération temporelle.

Ainssi les équations de la chaleur et de la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{P_1(T_{i,j-1}; T_{i,j+1}; T_{i,j})}_{\text{suivant } r} + \underbrace{P_2(T_{i-1,j}; T_{i+1,j}; T_{i,j})}_{\text{suivant } z} \text{.....(I.22)}$$

deviennent:

- Aux temps t+1 : (implicite suivant r)

$$\frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta t} = \underbrace{P_1(T_{i,j-1}^{t+1}; T_{i,j+1}^{t+1}; T_{i,j}^{t+1})}_{\text{suivant } r} + P_2(T_{i-1,j}^t; T_{i+1,j}^t; T_{i,j}^t) \dots \dots \dots \text{(I.23)}$$

- Aux temps t+2 : (implicite suivant x)

$$\frac{T_{i,j}^{t+2} - T_{i,j}^{t+1}}{\Delta t} = P_1(T_{i,j-1}^{t+1}; T_{i,j+1}^{t+1}; T_{i,j}^{t+1}) + \underbrace{P_2(T_{i-1,j}^{t+2}; T_{i+1,j}^{t+2}; T_{i,j}^{t+2})}_{\text{suivant } z} \text{(I.24)}$$

On se ramène donc bien à un système de MxN équations ,à MxN inconnues:

- Les $T_{i,j}^{t+1}$ dans la résolution implicite suivant r
- Les $T_{i,j}^{t+2}$ dans la résolution implicite suivant x .

avec seulement 3 inconnues par équation :

$$T_{i,j-1}^{t+1}; T_{i,j+1}^{t+1}; T_{i,j}^{t+1}; \text{ dans le 1}^{\text{er}} \text{ cas}$$

$$T_{i-1,j}^{t+2}; T_{i+1,j}^{t+2}; T_{i,j}^{t+2}; \text{ dans le 2}^{\text{ème}} \text{ cas}$$

La méthode reste stable sans aucun problème tant que le pas de temps Δt reste constant pendant toute la résolution, indépendamment des valeurs de Δr et Δx .

De plus, on démontre qu'elle est du second ordre en Δr , Δx et Δt , limitant ainsi les erreurs de troncature.

I.3 METHODE DES DIFFERENCE FINIS:[4, 5,6]

I.3.1. GENERALITES :

Dans le domaine du transfert de chaleur, la méthode des différences finies est largement utilisée pour résoudre efficacement les nombreuses difficultés formulées à travers des équations aux dérivées partielles (EDP). Cette approche repose sur l'estimation des dérivées spatiales en chaque point de l'espace en utilisant les valeurs de la fonction sur les points adjacents, basées sur le développement de Taylor. La précision de cette méthode est étroitement liée au nombre de points considérés pour approximer une dérivée donnée, ainsi qu'à la densité du maillage utilisé. En général, un maillage régulier et structuré est préféré pour garantir des résultats précis et stables.

Pour résoudre numériquement des problèmes de transfert de chaleur via la méthode des différences finies en utilisant Fortran, plusieurs ressources sont disponibles. Le livre "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" de Suhas V. Patankar est une référence solide pour comprendre les fondements du transfert de chaleur et de la mécanique des fluides, ainsi que pour appréhender les algorithmes et les approches théoriques pouvant être implémentés en Fortran. De même, "Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations" de Randall J. Le Veque explore en profondeur les méthodes des différences finies pour résoudre diverses équations aux dérivées partielles, fournissant des concepts et des techniques numériques directement applicables à des programmes Fortran. En outre, "Numerical Methods in Engineering with Fortran" de William E. Schiesser et Graham W. Griffiths se concentre spécifiquement sur l'utilisation de Fortran pour résoudre numériquement des problèmes d'ingénierie, y compris les différences finies. Enfin, des articles de revues spécialisées telles que "International Journal of Heat and Mass Transfer" et "Numerical Heat Transfer" peuvent également fournir des exemples d'applications de la méthode des différences finies avec Fortran dans des contextes spécifiques de transfert de chaleur. En consultant ces ressources, les ingénieurs et les chercheurs peuvent acquérir une compréhension approfondie des principes théoriques et des meilleures pratiques

pour l'utilisation de Fortran dans la résolution numérique de problèmes de transfert de chaleur via la méthode des différences finies.

I.3.2.REPRESENTATION DES DERIVEES PAR LES DIFFERENCES FINIS :

La méthode des différences finies, largement reconnue pour sa simplicité d'application, est couramment utilisée dans la résolution de divers problèmes en physique mathématique. Cette technique nécessite des calculs sur une grille composée d'un double réseau de lignes parallèles aux axes, agencées de manière uniforme.

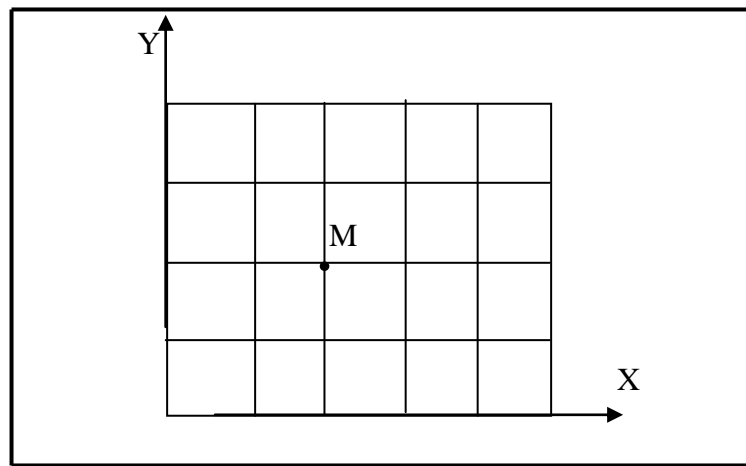


Fig (I.04)

L'intersection de deux droites du maillage définit un neoud de coordonnées (XM , YM) , si les parallèles à l'axe O y sont espacées de $\Delta X = h$ et les parallèle à l'axe O X de $\Delta y = K$, le neoud a comme coordonné : $XM =ih$, $YM =j K$ ou d'une manière condensée i,j .

Ainsi , la fonction $Z = Z (X , y)$ prend au point $M(XM , YM)$ la valeur $Z (ih , j K$ ou bien Z_{ij} .

À partir de la formule de Taylor, on détermine des schémas de calcul qui permettent d'approximer les dérivées :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots$$

et :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots$$

En effectuant la somme on obtient

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + O(h^4) \dots \dots \dots (I.25)$$

où $O(h^4)$ signifié la partie principale de reste en h^4 .

$$\text{D'ou : } f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \dots \dots \dots (I.26)$$

avec une erreur de l'ordre de h^2 .

En soustrayant on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] \dots \dots \dots (I.27)$$

avec une erreur de l'ordre h^2

On introduise souvent des approximations avec des erreurs de l'ordre h :

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \rightarrow \text{différence en avant}$$

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x) - f(x-h)] \rightarrow \text{différence en arrière}$$

En se penchant sur le problème des équations aux dérivées partielles et en adoptant une notation différente, on obtient :

$$z''(x_M, y_M) = (z''_{xx})_{i,j} = \frac{1}{h^2} [z_{(i+1),j} - 2z_{i,j} + z_{(i-1),j}] \dots\dots\dots(\mathbf{I.28})$$

et :

$$z'(x_M, y_M) = (z'_x)_{i,j} = \frac{1}{2h} [z_{(i+1),j} - z_{(i-1),j}] \dots\dots\dots(\mathbf{I.29})$$

Ces schémas constituent les outils fondamentaux de la méthode des différences finies, qui sera ensuite appliquée à l'équation de la chaleur.

I.3-3 FORMULATION MATHEMATIQUE [3]

I-3-3-1 EQUATION DE BASE

En pratique, une multitude de scénarios impliquant des flux de fluides, de chaleur, de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, de composition chimique, et bien d'autres phénomènes peuvent être décrits à travers des équations différentielles. L'avantage majeur de cette approche numérique réside dans le fait que ces divers principes physiques peuvent être unifiés sous une forme commune lorsqu'ils sont exprimés mathématiquement. Cette unification simplifie considérablement l'analyse et la résolution des problèmes, offrant ainsi une méthodologie plus cohérente et efficace pour explorer une large gamme de phénomènes physiques et chimiques.

Si ϕ est la variable dépendante, l'équation différentielle générale correspondante, pour un milieu continue indéformable, prend la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + s \dots\dots\dots(\mathbf{I. 30})$$

- (1) (2) (3)

Avec :

(1) : terme instationnaire

(2) : terme de diffusion

(3) : terme source

Où Γ est le coefficient de diffusion, et s le terme source Γ et s sont spécifique à la définition particulière de ϕ .

I-3-3-2. CONDITIONS AUX LIMITES :

Elles sont en général de deux sortes :

1. des conditions où l'on connait la valeur de ϕ à la paroi
2. des conditions de contact avec une paroi, dans ce cas on connaît soit la valeur du flux à cette limite soit une relation faisant intervenir la diffusion de ce flux

I.4 La Méthode de Gauss-Seidel:[9,10]

La méthode de Gauss-Seidel est une technique itérative utilisée pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, souvent rencontrée en analyse numérique et en résolution de problèmes d'ingénierie. Elle est particulièrement efficace pour les systèmes de grande taille.

L'idée fondamentale de la méthode de Gauss-Seidel est d'itérer à travers chaque équation du système et de résoudre chaque équation pour une inconnue à la fois, en utilisant les valeurs courantes (ou les valeurs mises à jour au cours de l'itération actuelle) des autres inconnues. Cette approche permet une convergence progressive vers la solution du système.

Voici les étapes générales de la méthode de Gauss-Seidel :

Initialisation : Commencez par une estimation initiale des inconnues du système.

Itération : Répétez les étapes suivantes jusqu'à ce qu'une condition de convergence soit satisfaite :

- Parcourez chaque équation du système.
- Pour chaque équation, utilisez les valeurs actuelles (ou les valeurs mises à jour) des autres inconnues pour résoudre l'équation pour l'inconnue en cours.
- Mettez à jour la valeur de cette inconnue avec la nouvelle valeur calculée.

Condition de convergence : La méthode converge lorsque les changements dans les valeurs des inconnues deviennent suffisamment petits, c'est-à-dire lorsque la différence entre les valeurs actuelles et précédentes est inférieure à une certaine tolérance prédéfinie.

Solution : Une fois que la condition de convergence est atteinte, les valeurs des inconnues sont considérées comme la solution du système.

La méthode de Gauss-Seidel peut converger rapidement pour certains types de systèmes, mais elle peut également être sujette à des problèmes de divergence ou de convergence lente pour d'autres types de systèmes. Des techniques telles que le choix judicieux des conditions initiales et la manipulation de l'ordre des équations peuvent être nécessaires pour améliorer la convergence dans certains cas.

La technique itérative bien établie de Gauss-Seidel est fréquemment employée pour résoudre efficacement des systèmes d'équations linéaires.

$Ax=b$ où A est une matrice $n \times n$ et x, b sont des vecteurs de R^n Elle implique la manipulation suivante :

On décompose A comme $A = D - E - F$, où D est une matrice diagonale, $-E$ est une matrice triangulaire inférieure,

et $-F$ est une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

On peut alors transformer le système en :

$$Ax = b \iff (D-E)x - Fx = b \iff X = (D - E)^{-1}Fx + (D - E)^{-1}b$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) par la formule :

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b$$

d'où :

$$X_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_j \right) \quad 1 \leq j \leq n$$

et on espère que la suite $(x^{(k)})$ converge vers une solution de $Ax=b$

Conclusion :

Dans cette étude sur l'obtention du champ de température conductif dans un cylindre métallique par la méthode des différences finies, nous pouvons conclure que cette approche offre une solution précise et efficace pour modéliser les phénomènes thermiques dans des structures cylindriques. En utilisant cette méthode, nous sommes en mesure de capturer avec précision les variations de température à travers le cylindre, ce qui est essentiel pour comprendre son comportement thermique dans différentes conditions de fonctionnement. L'application des différences finies permet de résoudre les équations de transfert de chaleur de manière numérique, offrant ainsi une solution pratique pour les ingénieurs et les chercheurs travaillant dans le domaine de la thermodynamique des matériaux. En conclusion, la méthode des différences finies s'avère être un outil précieux pour l'analyse et la conception de systèmes thermiques, offrant des résultats fiables et applicables dans une variété de contextes industriels.

CHAPITRE II : MISE EN EQUATION

II. Equation de base :

II.1 Hypothèse de départ.

II.2 Equation de base en coordonnées cartésiennes.

II.3 Transformation de l'équation en coordonnées cylindrique.

II.4 Conditions aux limites du système.

Introduction :

La résolution des équations différentielles pour déterminer le champ de température conductif dans un cylindre métallique est un problème fondamental en ingénierie thermique. Pour obtenir des résultats précis et fiables, diverses méthodes numériques ont été développées, parmi lesquelles la méthode des différences finies occupe une place centrale. Cette méthode, basée sur la discrétisation de l'espace et du temps, permet de transformer les équations différentielles en un système d'équations algébriques. Dans cette étude, nous explorerons l'application de la méthode des différences finies pour résoudre les équations de la chaleur dans un cylindre métallique, en mettant en évidence ses avantages et ses limitations.

II. EQUATION DE BASE :

II.1 HYPOTHESES DE DEPART :

Pour établir l'équation fondamentale, nous postulons que le milieu sous étude est homogène et isotrope. Cette hypothèse n'entraîne que les propriétés thermocinétiques telles que λ , ρ et c_p demeurent constantes.

II.2–EQUATION DE BASE EN COORDONNES CARTESIENNES :

En intégrant les suppositions mentionnées précédemment, l'équation de conductivité se formule comme suit :

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

$$\text{Avec : } \alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}.$$

Et Δ : le Laplacien, en le développant en coordonnées cartésiennes on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

d' où :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

II.3- TRANSFORMATION EN COORDONNES CYLINDRIQUE:

Comme notre modèle mathématique décrit un cylindre vertical, l'utilisation des équations en coordonnées cartésiennes n'est plus nécessaire. Par conséquent, nous procédons à une conversion vers les coordonnées cylindriques (x, r, θ). Après cette transformation, nous obtenons :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{(II.1)}$$

Étant donné la symétrie du modèle examiné, la diffusion de la chaleur se produit selon :
 (x, r) ; $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

l'équation (II.1) devient , après multiplication par " r " :

$$\frac{r}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

II.4- CONDITIONS AUX LIMITES DU SYSTEME :

Une fois que la configuration du système est établie, il devient impératif de définir les conditions limites. Ces dernières sont cruciales pour obtenir des solutions spécifiques à l'équation précédente dans le cadre de notre problème.

1- Condition initiale :

à $t = 0$ en tout point , on a :

$$T(x, r, 0) = T_0$$

2- Condition à la limite pariétale :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(x, r, t) \Big|_{r=R} = q(t)$$

avec :

$q(t)$: flux de chaleur imposé à la paroi .

3- Condition à l'axe de symétrie :

Au plan médian , définie par : $r = 0$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(x, r, t) \Big|_{r=0} = 0$$

4- Conditions à la limite supérieure : (échange convectif)

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, r, t) \Big|_{x=H} = h_s(T(H, r, t) - T_f)$$

Où :

h_s : Coefficient d'échange superficiel relatif à la base supérieure.

T_f : Température du milieu ambiant .

5- Conditions à la limite inférieure : (échange convectif)

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, r, t) \Big|_{x=0} = h_i(T(0, r, t) - T_f)$$

avec :

h_i : Coefficient d'échange superficiel relatif à la base inférieure

Conclusion :

La méthode des différences finies se révèle être une approche efficace pour résoudre les équations de la chaleur dans un cylindre métallique et obtenir le champ de température conductif. En discrétisant l'espace et le temps, cette méthode permet de transformer un problème continu en un système d'équations discrètes, qui peuvent être résolues numériquement avec une précision satisfaisante. Cependant, il est important de noter que la précision des résultats dépend de la taille des intervalles de discrétisation et du schéma numérique utilisé. En outre, l'application de la méthode des différences finies peut nécessiter des ressources informatiques importantes pour résoudre efficacement de grands systèmes d'équations. En fin de compte, malgré ses limitations, la méthode des différences finies reste un outil puissant et largement utilisé dans la modélisation et la simulation des phénomènes thermiques dans les cylindres métalliques et d'autres structures.

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE

III - Discrétisation de l'équation de base :

III.1 – Discrétisation de l'équation de base.

III.2– Discrétisation de temps.

III.3 – Discrétisation de condition limites.

III.4 – Formulation numérique.

Introduction :

La résolution numérique des problèmes de transfert de chaleur constitue un domaine crucial de l'ingénierie et de la recherche scientifique. L'obtention du champ de température conductif dans un cylindre métallique par la méthode des différences finies représente une approche fondamentale pour analyser les phénomènes thermiques dans diverses applications industrielles. Cette méthode, basée sur la discrétisation de l'équation de la chaleur, permet de modéliser efficacement la propagation de la chaleur à travers un milieu donné. Dans cette étude, nous explorerons le processus de résolution numérique appliqué à un cylindre métallique, mettant en lumière les principes sous-jacents de la méthode des différences finies et ses implications pratiques dans l'analyse thermique.

III.1- Discrétisation de l'équation de base :

L'équation de la chaleur sous forme différentielle est :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots\dots\dots(\text{III.1})$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots\dots\dots(\text{III.2})$$

· Pour un maillage régulier :

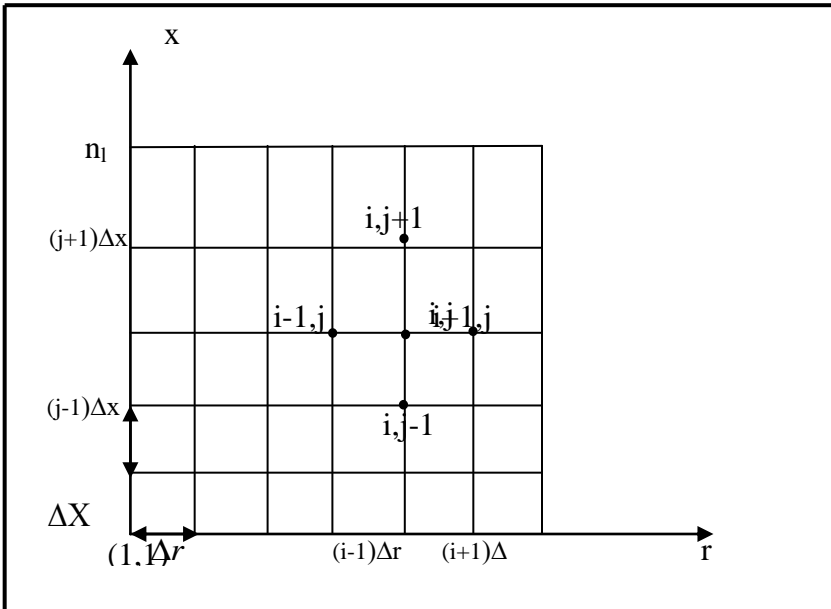


Fig (III.01)

$$r = (i-1) \Delta r$$

$$x = (j-1) \Delta x$$

D'après la représentation des dérivées par les différences finis on obtient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} \dots\dots\dots(\text{III.3})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta r^2} \dots\dots\dots(\text{III.4})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 r \Delta r} \dots\dots\dots(\text{III.5})$$

➤ En remplaçant les équation (III.3) ,(III.4) et (III.5) dans l'équation de base :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots\dots\dots(\text{III.6})$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 r \Delta r} \dots\dots\dots(\text{III.7})$$

III.2- Discrétisation de temps :

➤ Au temps t+1

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta t} \right) = \frac{T_{i+1,j}^{t+1} - T_{i-1,j}^{t+1}}{2r\Delta r} + \frac{T_{i+1,j}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1} + T_{i-1,j}^{t+1}}{\Delta r^2} + \frac{T_{i,j+1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j-1}^t}{\Delta x^2} \dots\dots\dots(\text{III.8})$$

Donc :

$$-\left(\frac{1}{2r\Delta r} + \frac{1}{\Delta r^2}\right)T_{i+1,j}^{t+1} + \left(\frac{1}{\alpha\Delta t} + \frac{2}{\Delta r^2}\right)T_{i,j}^{t+1} + \left(\frac{1}{2r\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right)T_{i-1,j}^{t+1} = \frac{1}{\Delta x^2}T_{i,j+1}^t + \left(\frac{1}{\alpha\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2}\right)T_{i,j}^t + \frac{1}{\Delta x^2}T_{i,j-1}^t$$

.....(III.9)

L'équation sera :

$$\alpha_{i,j} T_{i+1,j}^{t+1} + \beta_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + \gamma_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} = A_{i,j} T_{i,j+1}^t + B_{i,j} T_{i,j}^t + C_{i,j} T_{i,j-1}^t \dots\dots\dots(III.10)$$

Tel que :

$$\alpha_{i,j} = -\left(\frac{1}{2r\Delta r} + \frac{1}{\Delta r^2}\right) \text{ tel que } r=(i-1)\Delta r$$

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{\alpha\Delta t} + \frac{2}{\Delta r^2}$$

$$\gamma_{i,j} = \left(\frac{1}{2r\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2}\right) \text{ tel que } r=(i-1)\Delta r$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{\alpha\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2}$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}$$

➤ Au temps $t = t + 2$: implicite suivant x

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{T_{i,j}^{t+2} - T_{i,j}^{t+1}}{\Delta t} \right) = \frac{T_{i+1,j}^{t+1} - 2T_{i,j}^{t+1} + T_{i-1,j}^{t+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} (T_{i+1,j}^{t+1} - T_{i-1,j}^{t+1}) + \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i,j+1}^{t+2} - 2T_{i,j}^{t+2} + T_{i,j-1}^{t+2})$$

.....(III.11)

Donc :

$$-\frac{1}{\Delta x^2} T_{i,j+1}^{t+2} + \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \right) T_{i,j}^{t+2} - \frac{1}{\Delta x^2} T_{i,j-1}^{t+2} = \left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i-1,j}^{t+1} - \frac{2}{\Delta r^2} T_{i,j}^{t+1} + \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) T_{i+1,j}^{t+1}$$

....(III.12)

L'équation sera :

$$\alpha_{i,j} T_{i,j+1}^{t+2} + \beta_{i,j} T_{i,j}^{t+2} + \gamma_{i,j} T_{i,j-1}^{t+2} = A_{i,j} T_{i+1,j}^{t+1} + B_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + C_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} \dots\dots\dots(III.13)$$

Tel que :

$$\alpha_{i,j} = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\gamma_{i,j} = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

III.3- Discretisation des conditions aux limites :

III.3.1- Les conditions initiales :

Au temps $t = 0$:

$$T_{i,j} = T_0 \quad \forall i, j$$

III.3.2- Conditions à la limite pariétale :

On à :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{x=R} = q(t)$$

On utilise la différent droite en arrière :

$$-\lambda \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta r} = q(t) \Rightarrow T_{i,j} = -\frac{\Delta r}{\lambda} q(t) + T_{i-1,j}$$

Sur l'axe $i = n_c \Rightarrow T_{n_c,j} = -\frac{\Delta r}{\lambda} q(t) + T_{n_c-1,j}$

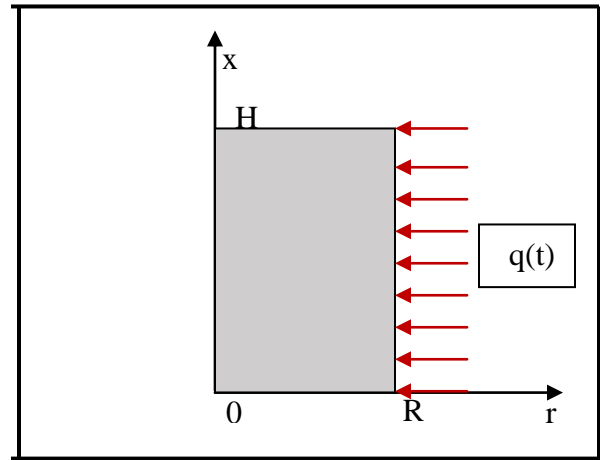


Fig (III.02) MODELE PHYSIQUE

III.3.3- Condition à l'axe de symétrie :

On à : $-\lambda \frac{\partial T(x,rt)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta r} = 0$$

$$\Rightarrow T_{i+1,j} = T_{i,j}$$

Sur l'axe $i=1 \Rightarrow T_{2,j} = T_{1,j}$

III.3.4- Condition a la limite supérieur :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=4} = h_s (T - T_f)$$

$$\Rightarrow -\lambda \frac{(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta x} = h_s (T_{i,j} - T_f)$$

$$\Rightarrow T_{i,j} - T_{i,j-1} = -\frac{h_s \Delta x}{\lambda} (T_{i,j} - T_f)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{h_s \Delta x}{\lambda}\right) T_{i,j} = T_{i,j-1} + T_f \left(\frac{h_s \Delta x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow T_{i,j} = \frac{T_{i,j-1} + \frac{h_s \Delta x}{\lambda} T_f}{1 + \frac{h_s \Delta x}{\lambda}}$$

Pour $j = n_L$:

$$T_{i,n_L} = \frac{T_{i,n_L-1} + \frac{\Delta x h_s T_f}{\lambda}}{1 + \frac{\Delta x h_s}{\lambda}}$$

III.3.5- Condition a la limite inférieure :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = (T - T_f) h_l$$

$$\Rightarrow -\lambda \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta x} \right) = h_l (T_{i,j} - T_f)$$

$$\Rightarrow T_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} + \frac{h_l \Delta x T_f}{\lambda}}{1 + h_l \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

Pour $j = 1$:

$$T_{i,1} = \frac{T_{i,2} + \frac{h_l \Delta x T_f}{\lambda}}{1 + h_l \frac{\Delta x}{\lambda}}$$

III.4- Formulation numérique :

- Au temps $t = 0$,

$$T_{i,j} = T_0, \quad \forall i,j$$

- Au temps $t = t+1$

➤ On a pour: $j=2 \longrightarrow n_L - 1$
 et pour $i=3 \qquad n_c-2 \longrightarrow$

A partir de l'équation (III.10) on a

$$\alpha_{i,j} T_{i+1,j}^{t+1} + \beta_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + \gamma_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} = A_{i,j} T_{i,j+1}^t + B_{i,j} T_{i,j}^t + C_{i,j} T_{i,j-1}^t = \theta_{i,j} \dots \dots \dots \text{(III.14)}$$

Tel que :

$$\alpha_{i,j} = - \left(\frac{1}{2r\Delta r} + \frac{1}{\Delta r^2} \right) \text{ avec } r=(i-1)\Delta r$$

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{\alpha \Delta t} + \frac{2}{\Delta r^2}$$

$$\gamma_{i,j} = \left(\frac{1}{2r\Delta r} - \frac{1}{\Delta r^2} \right) \text{ avec } r=(i-1)\Delta r$$

$$\theta_{i,j} = A_{i,j} T_{i,j+1}^t + B_{i,j} T_{i,j}^t + C_{i,j} T_{i,j-1}^t \dots \dots \dots \text{(III.15)}$$

avec

$$A_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2} ;$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{\alpha \Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2}$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2}$$

➤ pour $j=2 \longrightarrow n_L - 1$

et pour $i=2$

D'après la 2^{ème} condition à la limite pariétale :

$$T_{2,j} = T_{1,j} \text{ on a:}$$

➤ pour $j=2 \longrightarrow n_L - 1$

et pour $i= n_c - 1$

D'après la 3^{ème} condition à l'axe de symétrie :

$$T_{n_c,j} = -\frac{\Delta r}{\lambda} q(t) + T_{n_c-1,j} \text{ on a :}$$

- Au temps $t = t+2$

➤ On a pour: $i=2 \longrightarrow n_c - 1$

et pour $j=3 \longrightarrow n_L - 2$

Et à partir de l'équation(III.13) on a :

$$\alpha_{i,j} T_{i,j+1}^{t+2} + \beta_{i,j} T_{i,j}^{t+2} + \gamma_{i,j} T_{i,j-1}^{t+2} = A_{i,j} T_{1+1,j}^{t+1} + B_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + C_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} = \theta_{i,j}$$

.....(III.16)

Tel que :

$$\alpha_{i,j} = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\beta_{i,j} = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$\gamma_{i,j} = -\frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\theta_{i,j} = A_{i,j} T_{1+1,j}^{t+1} + B_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + C_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} \dots \dots \dots \text{(III.17)}$$

avec:

$$A_{i,j} = \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r \Delta r} \text{ tel que } r=(i-1)\Delta r$$

$$B_{i,j} = \frac{-2}{\Delta r^2}$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r \Delta r} \text{ tel que } r=(i-1)\Delta r$$

➤ pour: j= 1

et pour i= 2 → n_c

D'après la 5^{eme} condition à la limite inférieure :

$$\Rightarrow T_{i,1} = \frac{T_{i,2} + \frac{h_f \Delta x T_f}{\lambda}}{1 + h_f \frac{\Delta x}{\lambda}} \Rightarrow (1 + h_f \frac{\Delta x}{\lambda}) T_{i,1} - T_{i,2} = \frac{h_f \Delta x T_f}{\lambda} \text{ on a :}$$

➤ pour: j= n_L-1

et pour $i=2 \longrightarrow n_c$

D'après la 4^{eme} condition à la limite supérieur :

$$\beta_{nl-1,j} = \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{\alpha \Delta t} - \frac{1}{(1+h_s \frac{\Delta x}{\lambda}) \Delta x^2}$$

$$\theta_{i,nl-1} = A_{i,j} T_{1+1,j}^{t+1} + B_{i,j} T_{i,j}^{t+1} + C_{i,j} T_{i-1,j}^{t+1} - \frac{t_f \times h_s \frac{\Delta x}{\lambda}}{(1+h_s \frac{\Delta x}{\lambda})} \dots \dots \dots \text{(III.17)}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{t+1} - T^t}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i-1,j} - T_{i+1,j}}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left(\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j}}{2\Delta r} \right) + \frac{T_{i+1,j}}{\Delta r^2} - \frac{T_{i,j}}{\Delta r^2} + \frac{T_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{T_{i,j}}{\Delta x^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\Delta r} + \frac{1}{\Delta r^2} \right) T_{i+1,j} - T_{i,j} \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{\Delta x^2} \right) - \frac{T_{i-1,j}}{2r\Delta r} + \frac{T_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}}{\Delta x^2} \\ &= \left(\frac{1}{2r^2\Delta r} + \frac{1}{\Delta r^2} \right) T_{i+1,j} - 2T_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) - \frac{T_{i-1,j}}{2r\Delta r} + \frac{T_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

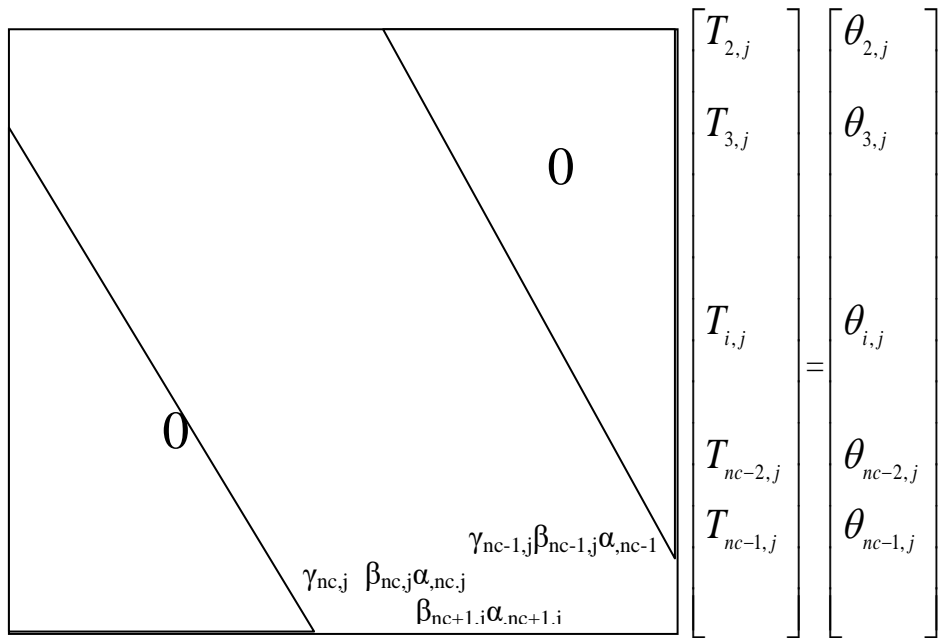
$$= \frac{1}{r} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta r} \right) + \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta r^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j} - T_{i,j}^0}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r}\right) T_{i+1,j} + \left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r}\right) T_{i-1,j} - 2\left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{\Delta x^2}\right) T_{i,j} + \frac{T_{i,j+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$

III 3 ECRITURE MATRICIELLE :

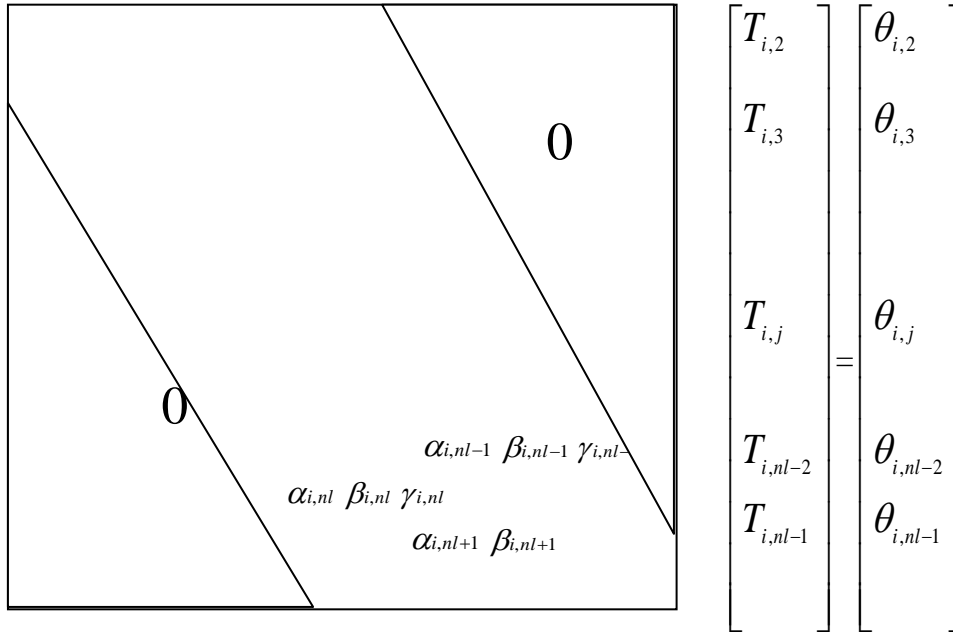
Une fois que toute l'équation, ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites, ont été discrétisées de manière appropriée, nous passons à la résolution numérique de notre problème en utilisant la méthode des directions alternées (ADI). Cela nous conduit finalement à des systèmes qui peuvent être exprimés sous la forme suivante :

Au temps $t = t+1$



The diagram shows a square matrix with a main diagonal and two off-diagonal bands. The matrix is partitioned into four quadrants by two diagonal lines meeting at the center. The top-left and bottom-right quadrants are labeled '0'. The bottom-left and top-right quadrants contain coefficients: $\gamma_{nc,j}$ and $\beta_{nc,j}$ in the bottom-left; $\gamma_{nc-1,j}$ and $\beta_{nc-1,j}$ in the bottom-right; and α_{nc-1} in the top-right. To the right of the matrix is an equals sign followed by two vertical vectors: the first vector contains $T_{2,j}$, $T_{3,j}$, $T_{i,j}$, $T_{nc-2,j}$, and $T_{nc-1,j}$; the second vector contains $\theta_{2,j}$, $\theta_{3,j}$, $\theta_{i,j}$, $\theta_{nc-2,j}$, and $\theta_{nc-1,j}$.

Au temps $t = t+2$



$$\begin{bmatrix} T_{i,2} \\ T_{i,3} \\ T_{i,j} \\ T_{i,nl-2} \\ T_{i,nl-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{i,2} \\ \theta_{i,3} \\ \theta_{i,j} \\ \theta_{i,nl-2} \\ \theta_{i,nl-1} \end{bmatrix}$$

III 4 ALGORIHME DE RESOLUTION :

Comme précédemment mentionné, la méthode employée pour résoudre notre problème est familièrement appelée méthode A.D.I. Une de ses caractéristiques réside dans l'implication de la logique de GAUSS-SEIDEL. Cela signifie qu'à chaque étape de calcul, les valeurs du niveau précédent sont introduites, tout comme dans le processus de tridiagonalisation des systèmes, où ces calculs sont effectués.

ALGORITHME :

1. Introduire les données du programme .
2. Calculer Dx , DR , Dt .
3. donner un champs initial de température
4. poser $tmax=0$; temps = 0, $J=24*3600$
5. poser $tmax = tmax + dch$: $N= 0$; $Qc = qch$ et aller à étape7.

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE

6. poser $t_{max} = t_{max} + DE.dch$; $Q_c=0$; $N=1$
7. poser $temps = temps + pca$
8. poser $I= 2$
9. Poser $J =2$
10. calculer $AI(J)$, $AS(J)$, $AP(J)$, $AD(J)$
11. si $J \leq NC-1$, poser $J = J+1$ et aller à étape 10
sinon continuer
12. calculer en introduisant les conditions aux limites gauche et droite
 $AI(2)$, $AR(2)$, $AD(2)$
 $AS(NC-1)$, $AP(NC-1)$, $AD(NC-1)$
13. résolution du système tri-diagonal
Obtention de $TC(K)$, $K=(I-1).NC + J$
14. Si $I \leq NL-1$, poser $I=I+1$ et aller à étape 9
si non continuer
15. En utilisant les conditions aux limites calculer $TC(K)$:
$$K = (I-1).NC + J \quad I=1, I= NI$$
$$J=1, NC$$

$$K= (I-1).NC+J \quad J=1, J=NC$$
$$I= 1, NL$$
16. poser $J=2$
17. poser $I=2$
18. calculer $AI(I)$, $AS(I)$, $AP(I)$, $AD(I)$
19. Si $I \leq NI-1$, poser $I= I+1$ et aller à étape 17
Si non continuer
20. calculer en introduisant les conditions aux limites supérieures et inférieure.
 $A(2)$, $AS(2)$, $AD(2)$
 $As (NI-1)$, $AP(NL-1)$, $AD(NL-1)$
21. résolution du système tri-diagonal

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE

obtention de $TC(k)$, $K=(I-1).NC +J$

22. si $J \leq Nc-1$, poser $J=J+1$, et aller à étape 16

si non continuer

23. en utilisant les conditions aux limites calculer $TC(k)$

$K= (I-1).NC+J$ $I=1, I= NL$

$J=1, NC$

$K= (I-1).NC+J$ $J=1, I= NC$

$J=1, NL$

24. TEST1. de convergence : si le champ de température a convergé, aller à étape 27 sinon continuer.

25. affectation d'un nouveau champs de température

$V = \text{fonction}(TC)$, $TC=V$

26. aller à étape 8

27. si $tr \leq f_j$ aller à étape 7 sinon continuer

28. TEST2 s de stationarisation : si le champs de température est stationnarisé aller à étape 31

sinon continuer

si temps $\leq t_{max}$ aller à étape 7 sinon continuer

29. Si $N=0$ aller à étape 6

sinon continuer

30. aller à étape 5

31. FIN.

Conclusion :

En conclusion, la résolution numérique pour l'obtention du champ de température conductif dans un cylindre métallique par la méthode des différences finies offre une approche puissante et précise pour étudier les phénomènes thermiques complexes. En appliquant cette méthode, les ingénieurs et les chercheurs peuvent simuler avec précision la distribution de la température à

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE

l'intérieur du cylindre, ce qui permet une optimisation efficace des processus industriels et une conception plus sûre des systèmes thermiques. Cependant, il convient de noter que la précision des résultats dépend de la résolution spatiale et temporelle choisie ainsi que des conditions aux limites et des propriétés matérielles considérées. Ainsi, une analyse approfondie et une validation expérimentale sont essentielles pour garantir la fiabilité des simulations et leur pertinence dans un contexte donné. En continuant à développer et à affiner les techniques de résolution numérique, nous pourrons mieux comprendre et maîtriser les phénomènes thermiques, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles avancées dans divers domaines de l'ingénierie et de la science des matériaux.

: RESULTATS ET ANALYSES31CHAPITRE

31.1 Problématique

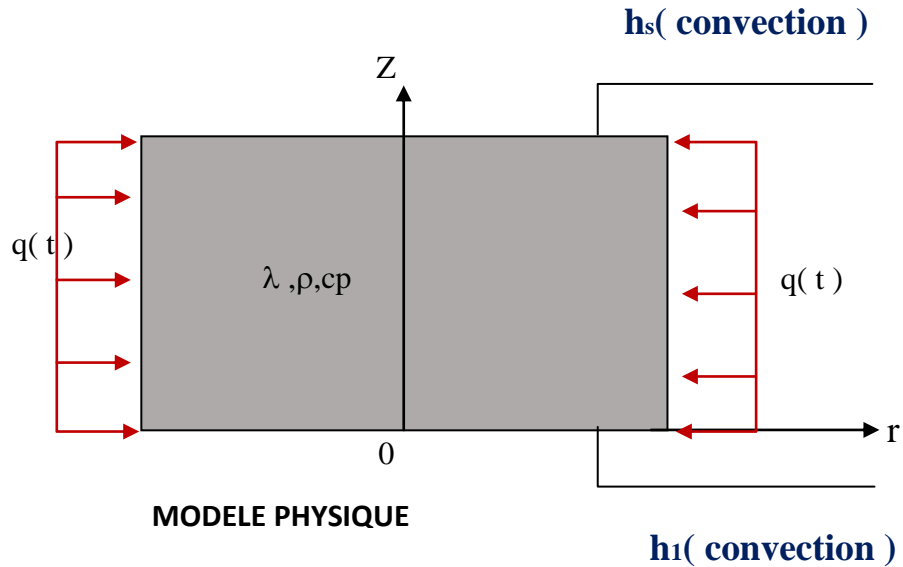
31.2 Discussion des résultats

31.3 Interprétation des résultats

44.1 Problématique:

Considérons un cylindre vertical plein, caractérisé par sa hauteur (H) et son rayon (R), ainsi que par ses propriétés thermocinétiques telles que la conductivité thermique (λ), la densité (ρ) et la capacité thermique massique (c_p).

Ce cylindre échange de la chaleur avec son environnement par convection à travers ses deux extrémités, supérieure et inférieure, avec des coefficients d'échange de chaleur h_s et h_I respectivement.



Pour simplifier, nous supposons que la structure du cylindre est indéformable. Sa paroi verticale est soumise à un chauffage cyclique par un flux de chaleur $q(t)$ pendant une période de temps définie comme $a.t$, où a représente le rapport de la période de chauffage sur celle de repos.

Notre objectif est de simuler l'évolution du champ thermique à l'intérieur du cylindre et de déterminer les isothermes de température au fil du temps.

45.2 Discussion des résultats:

Pour mener notre étude sur l'obtention du champ de températures conductif dans un cylindre vertical soumis à un flux de chaleur pariétal périodique, nous avons alterné les périodes de chauffage et de repos appliquées au cylindre.

Les résultats obtenus par la méthode des volumes finis sont présentés sous forme de courbes. Nous avons utilisé un cylindre de hauteur $H = 6$ m et de rayon $R = 2$ m. Le cylindre métallique a été subdivisé en plusieurs mailles, et la température a été mesurée à chaque nœud de maille pendant les phases de repos, c'est-à-dire lorsque la température atteint son état stationnaire.

Les températures ont été relevées sur trois points suivant le rayon R (verticalement) : sur l'axe, sur le demi-rayon et sur la paroi du cylindre ; nous avons obtenu les courbes $T = f(H)$. De la même manière, les températures ont été relevées sur trois points suivant H (horizontalement) : Près de la limite inférieure ($1/8$ de H), au quart de la hauteur ($1/4$ de H) et à mi-hauteur ($1/2$ de H), nous avons obtenu les courbes $T = f(R)$.

Nous avons également identifié les lignes isothermes du cylindre et obtenu les courbes $H = f(R)$.

La Figure 1 représente la relation entre la température (T) et la hauteur (H) le long de la paroi à $R = 0.0$ m, obtenue à l'aide de la méthode des différences finies. La température culmine à $T \approx 420,41$ K K lorsque $H = 3$ m, puis diminue graduellement pour atteindre $T=420,41$ K près de la limite inférieure à $H = 0,0$ m, et $T = 411.97$ K près de la limite supérieure. Il est remarquable que la température demeure constante entre $H = 1,65$ m et $H = 4,05$ m, indiquant une stabilité thermique à ces hauteurs et suggérant un équilibre dans les échanges de chaleur à ces niveaux. Cette observation est conforme à nos attentes basées sur la physique des transferts thermiques dans un cylindre vertical. L'équation $T = -0,159H^4 + 1,7241H^3 - 6,9355H^2 + 12,463H + 411,74$, avec un coefficient de détermination $R^2 = 0,9993$, modélise précisément la variation de la température en fonction de la hauteur du cylindre, offrant un outil utile pour prédire les températures à différentes hauteurs.

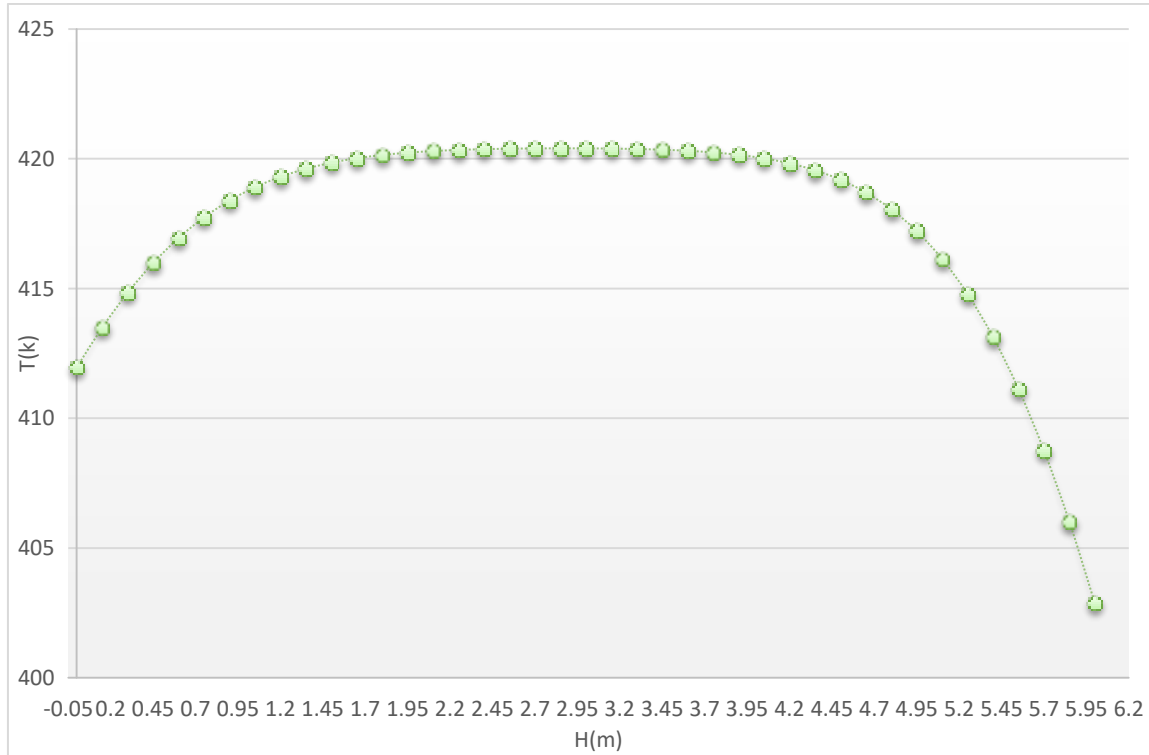


Figure 1 : représentation graphique de la Courbe : $T = f(H)$ sur la paroi $R=0m$.

De même, la Figure 2 illustre la relation entre la température (T) et la hauteur (H) le long de la paroi à $R = 0.5m$, obtenue également par la méthode des différences finies. La température atteint son maximum à $T \approx 446,30$ K pour $H = 3.0$ m, puis diminue progressivement jusqu'à un minimum de $T = 425.44$ K près de la limite inférieure à $H = 0,0$ m, et $T = 436.26$ près de la limite supérieure. Il est notable que la température se stabilise entre $H = 1.8m$ et $H = 3.9$ m. L'équation $T = -0,1943H^4 + 2,1105H^3 - 8,4612H^2 + 15,051H + 435,99$, avec un coefficient de détermination $R^2 = 0,9992$, représente de manière précise la variation de la température en fonction de la hauteur du cylindre, montrant une excellente adéquation avec les résultats obtenus par la méthode numérique.

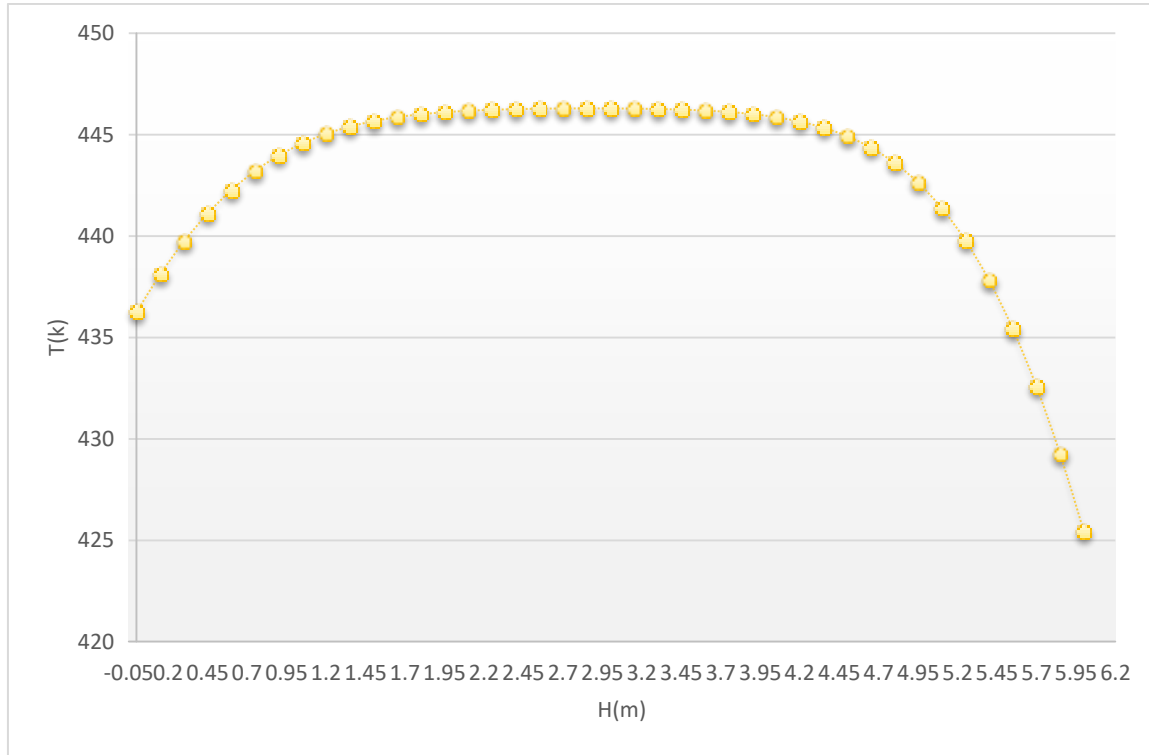


Figure 2 : représentation graphique de la Courbe : T= f(H) sur la paroi R=0.5m.

La Figure 3 montre la courbe $T = f(H)$ le long de la paroi à $R = 1.0$ m, calculée à l'aide de la méthode des différences finies. La température atteint son maximum à $T \approx 544.219$ K lorsque $H = 3.0$ m ; elle décroît jusqu'à un minimum de $T = 511.41$ K près de la limite inférieure à $H = 0,0$ m, et $T = 528.45$ K près de la limite supérieure. Un état stationnaire de la température est observé entre $H = 1.8$ m et $H = 3,9$ m. L'équation $T = -0,3275H^4 + 3,5761H^3 - 14,212H^2 + 24,608H + 528,05$, avec un coefficient de détermination $R^2 = 0,9986$, révèle une relation complexe entre la température et la hauteur du cylindre, mettant en évidence une évolution non linéaire de la température en fonction de la hauteur. Ces résultats soulignent l'importance de considérer les variations de température dans la conception et l'analyse des systèmes thermiques, en particulier lorsqu'ils sont évalués à l'aide de méthodes numériques telles que la méthode des différences finies.

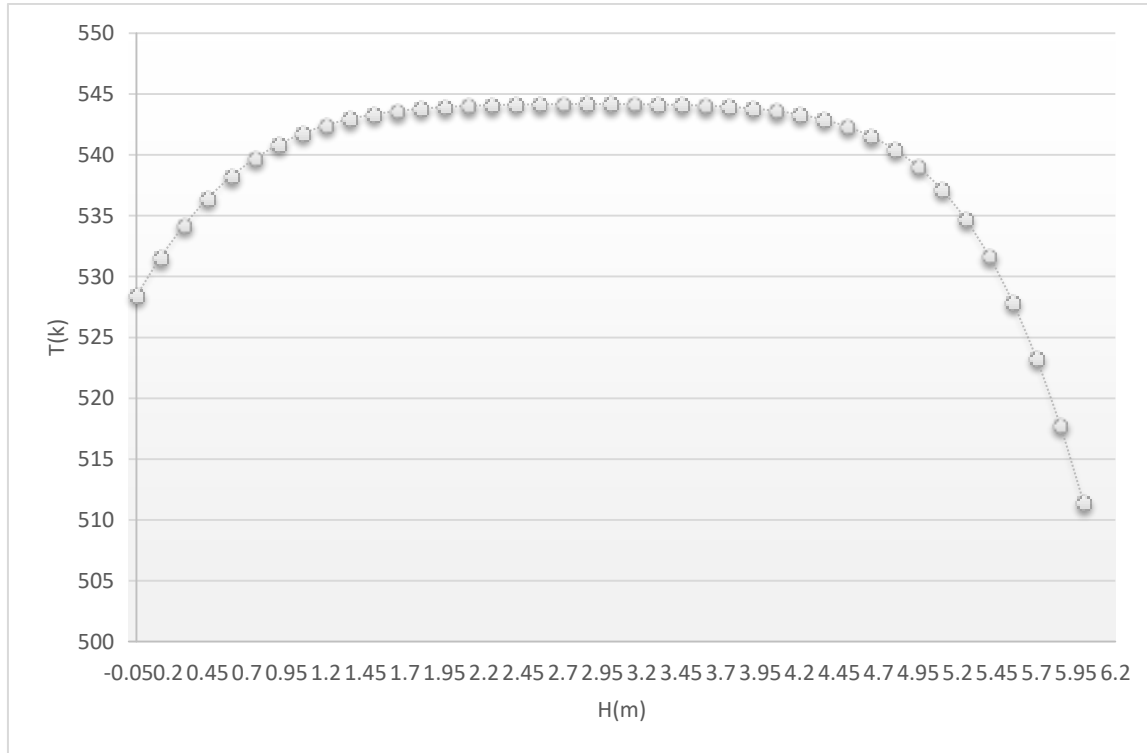


Figure 3 : représentation graphique de la Courbe : $T = f(H)$ sur la paroi $R=1m$.

Enfin, la Figure 4 montre la courbe $T = f(H)$ le long de la paroi à $R = 1.5 m$, calculée à l'aide de la méthode des différences finies. La température atteint son maximum à $T \approx 730.16K$ lorsque $H = 3.0 m$; elle décroît jusqu'à un minimum de $T = 677.85K$ près de la limite inférieure à $H = 0,0 m$, et $T = 705.15K$ près de la limite supérieure. Un état stationnaire de la température est observé entre $H = 2.25 m$ et $H = 3,45 m$. L'équation $T = -0,5694x^4 + 6,2611H^3 - 24,628H^2 + 41,215H + 704,71$, avec un coefficient de détermination $R^2=0,9966$, révèle une relation complexe entre la température et la hauteur du cylindre, mettant en évidence une évolution non linéaire de la température en fonction de la hauteur. Ces résultats soulignent l'importance de considérer les variations de température dans la conception et l'analyse des systèmes thermiques, en particulier lorsqu'ils sont évalués à l'aide de méthodes numériques telles que la méthode des différences finies.

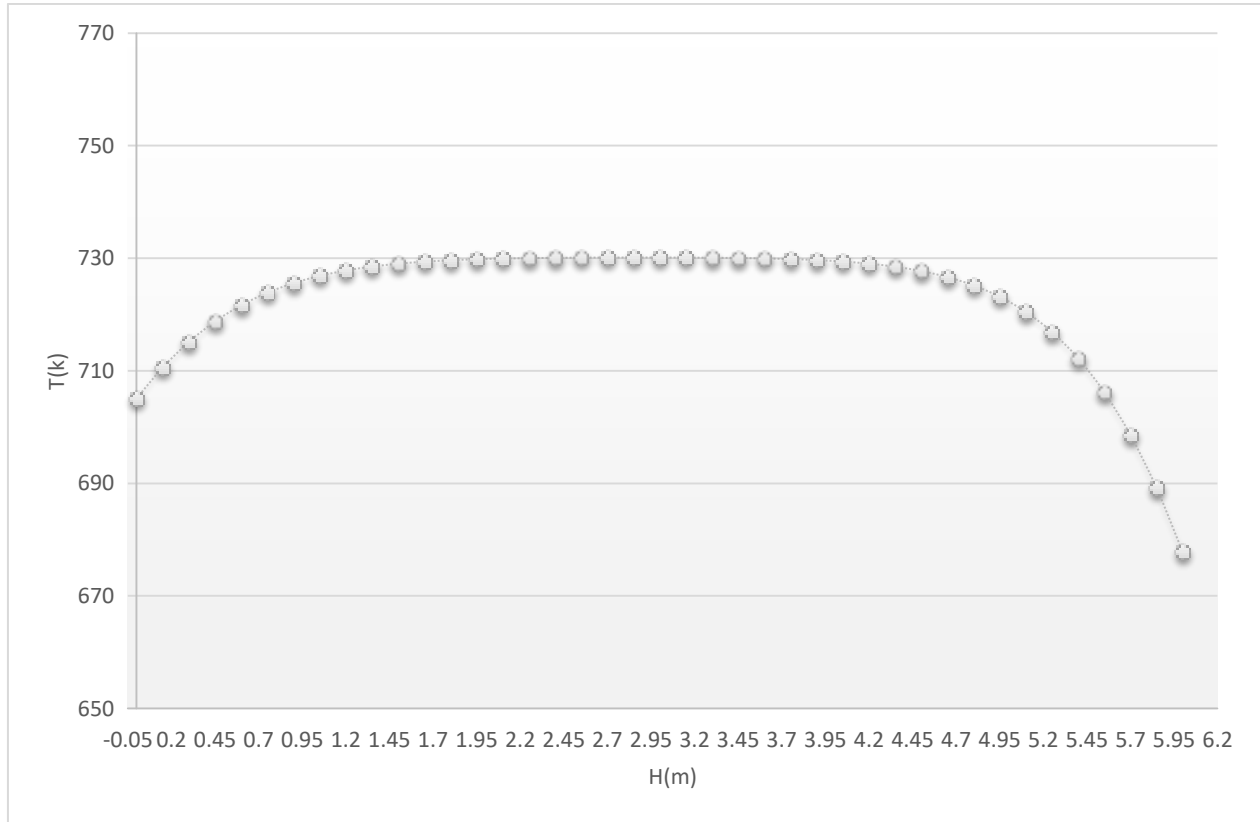


Figure 4 : représentation graphique de la Courbe : $T = f(H)$ sur la paroi $R=1.5m$.

Dans la figure (5), nous observons la variation de la température le long de la paroi du cylindre à une hauteur H de 0.0 m. La courbe $T = f(R)$ illustre comment la température évolue en fonction du rayon R . Initialement, la température est maximale sur la paroi externe du cylindre, atteignant environ $T \approx 1044.32K$ à $R = 2$ m. En se déplaçant vers l'intérieur du cylindre, la température diminue progressivement pour atteindre son minimum, $T = 416,95k$, près de l'axe de symétrie à $R \approx 0.0$ m. Cette baisse de température est généralement due à la dissipation de la chaleur à travers la paroi du cylindre.

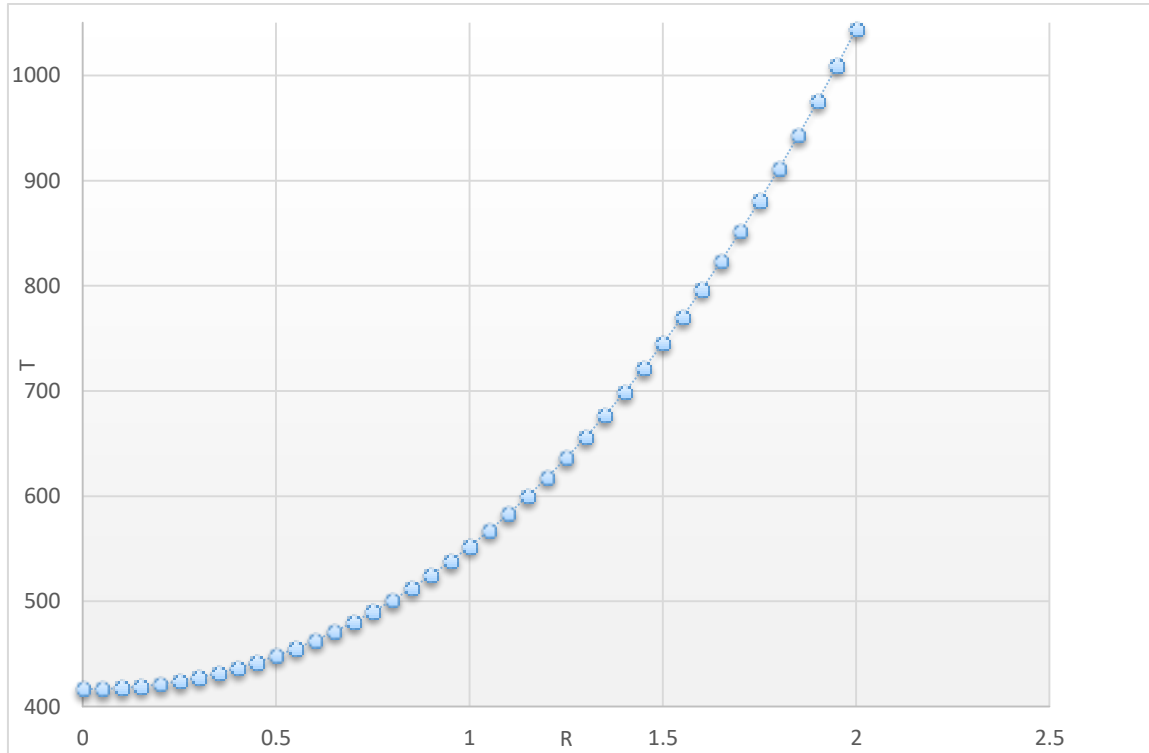


Figure 5 : représentation graphique de la Courbe : T= f(R) pour H=0m

La zone dite d'état stationnaire, située entre $R \approx 0.0$ m (près de l'axe de symétrie) et $R = 0.1$ m, indique une région où la température semble rester relativement constante. Cela peut être le résultat d'un équilibre entre la chaleur générée à l'intérieur du cylindre et la chaleur dissipée à travers sa paroi.

L'équation qui décrit cette corrélation entre la température et le rayon du cylindre est

$$T = 178.28R^2 - 50.792R + 424.91$$

avec $R^2 = 1$

Dans la figure (6), nous étudions la variation de la température le long de la paroi du cylindre à une hauteur H de 1.5 m. Les variations de température suivent un schéma similaire à celui de la Figure 1, mais avec des valeurs différentes en raison de la hauteur modifiée du point d'observation. La température maximale, $T \approx 1052.43K$, est enregistrée sur la paroi externe du cylindre à $R = 2$ m. En se déplaçant vers l'intérieur du cylindre, la température diminue pour atteindre son minimum, $T \approx 419,62k$, près de l'axe de symétrie à $R \approx 0.0$ m.

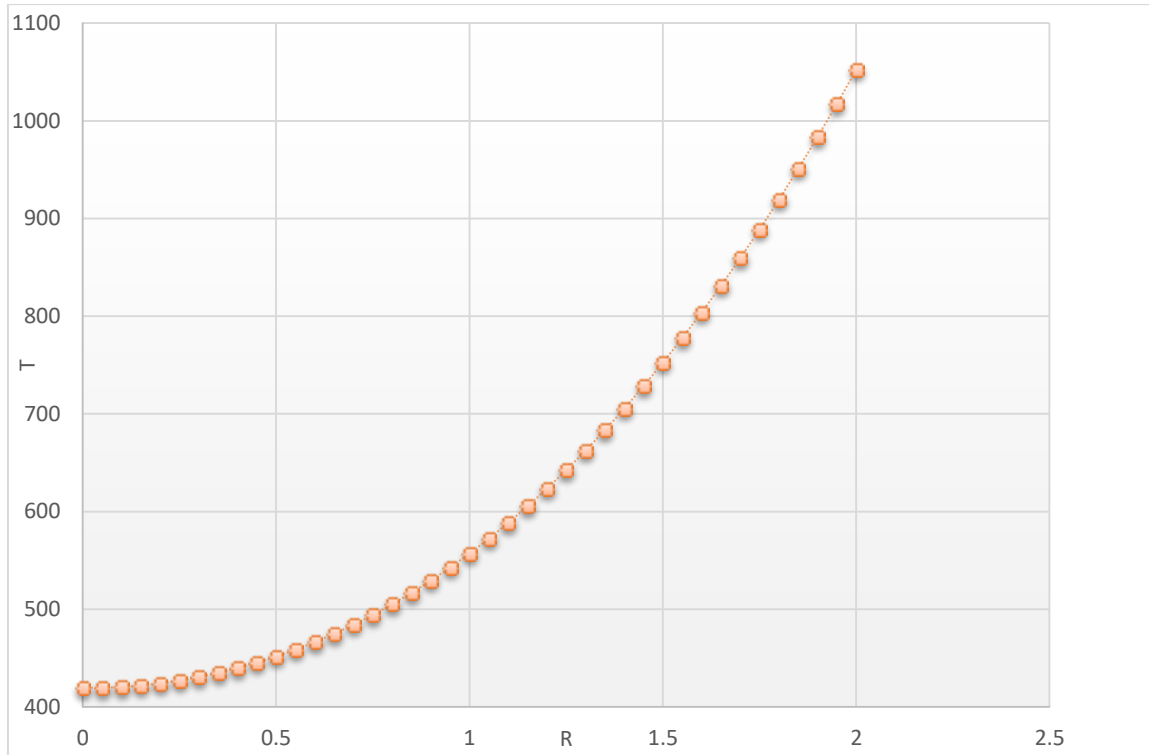


Figure 6 : représentation graphique de la Courbe : $T = f(R)$ pour $H = 1.5m$

Comme dans la Figure 1, une zone d'état stationnaire est présente entre $R \approx 0.0$ m (près de l'axe de symétrie) et $R = 0.05$ m. Cette zone indique à nouveau un équilibre thermique dans cette région du cylindre.

L'équation qui modélise cette corrélation entre la température et le rayon du cylindre est

$$T = 178.8R^2 - 48.582R + 427.14$$

Avec $R^2 = 0.9997$

Enfin, dans la figure (7), nous examinons la variation de la température le long de la paroi du cylindre à une hauteur H de 3.0 m. Encore une fois, les variations de température suivent un schéma similaire, mais avec des valeurs différentes en raison de la hauteur supplémentaire du point d'observation. La température maximale, $T \approx 1054.01k$, est enregistrée sur la paroi externe du cylindre à $R = 2$ m. En se déplaçant vers l'intérieur du cylindre, la température diminue pour atteindre son minimum, $T \approx 420,30k$, près de l'axe de symétrie à $R \approx 0.0$ m.

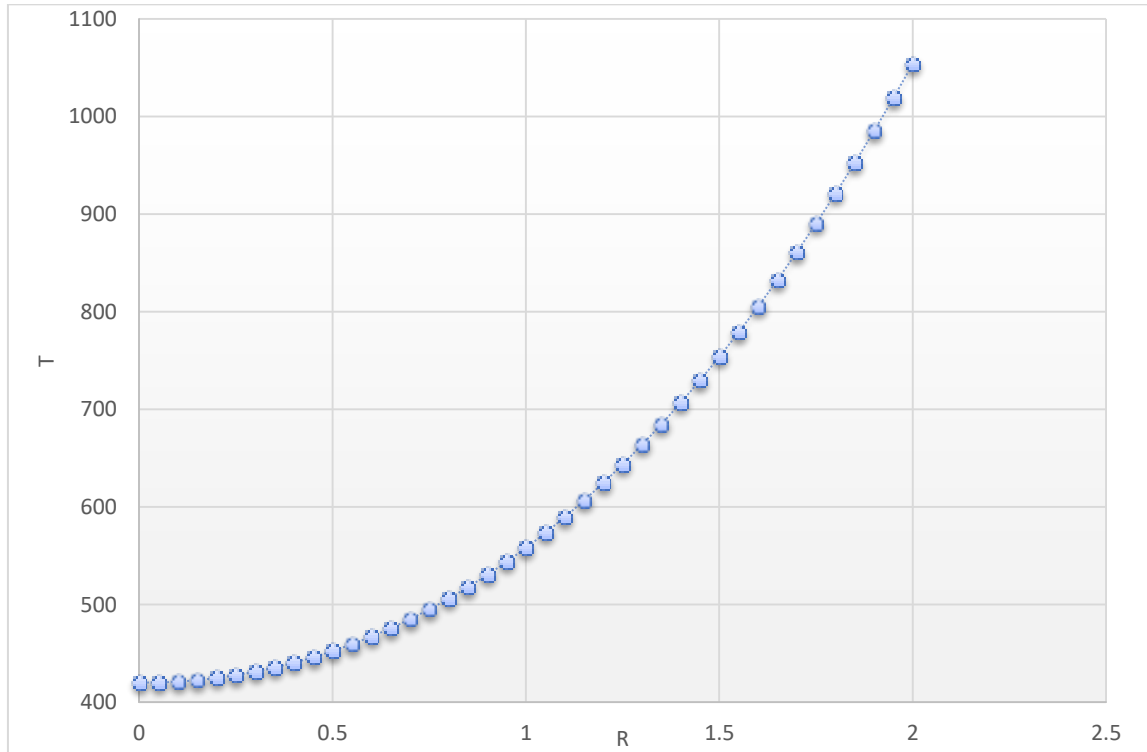


Figure 7 : représentation graphique de la Courbe : $T = f(R)$ pour $H=3m$

Une zone d'état stationnaire est également présente ici, entre $R \approx 0.0$ m (près de l'axe de symétrie) et $R = 0.05$ m. Cette zone indique une fois de plus un équilibre thermique dans cette région du cylindre.

L'équation correspondante pour cette situation est

$$T = 178.83R^2 - 48.083R + 427.74$$

Avec $R^2 = 0,9997$

52.3 Interprétation des résultats :

Lorsque nous examinons les variations de température le long de la hauteur du cylindre (représentées par les courbes $T = f(H)$), nous observons les effets de la convection de chaleur. La convection est un processus de transfert de chaleur qui se produit lorsque le fluide ou le milieu environnant se déplace, transportant ainsi la chaleur. Dans le cas d'un cylindre, cela peut être dû à

CHAPITRE IV RESULTATS ET ANALYSES

des différences de température entre la surface du cylindre et son environnement, ce qui entraîne un flux de chaleur à travers la paroi du cylindre.

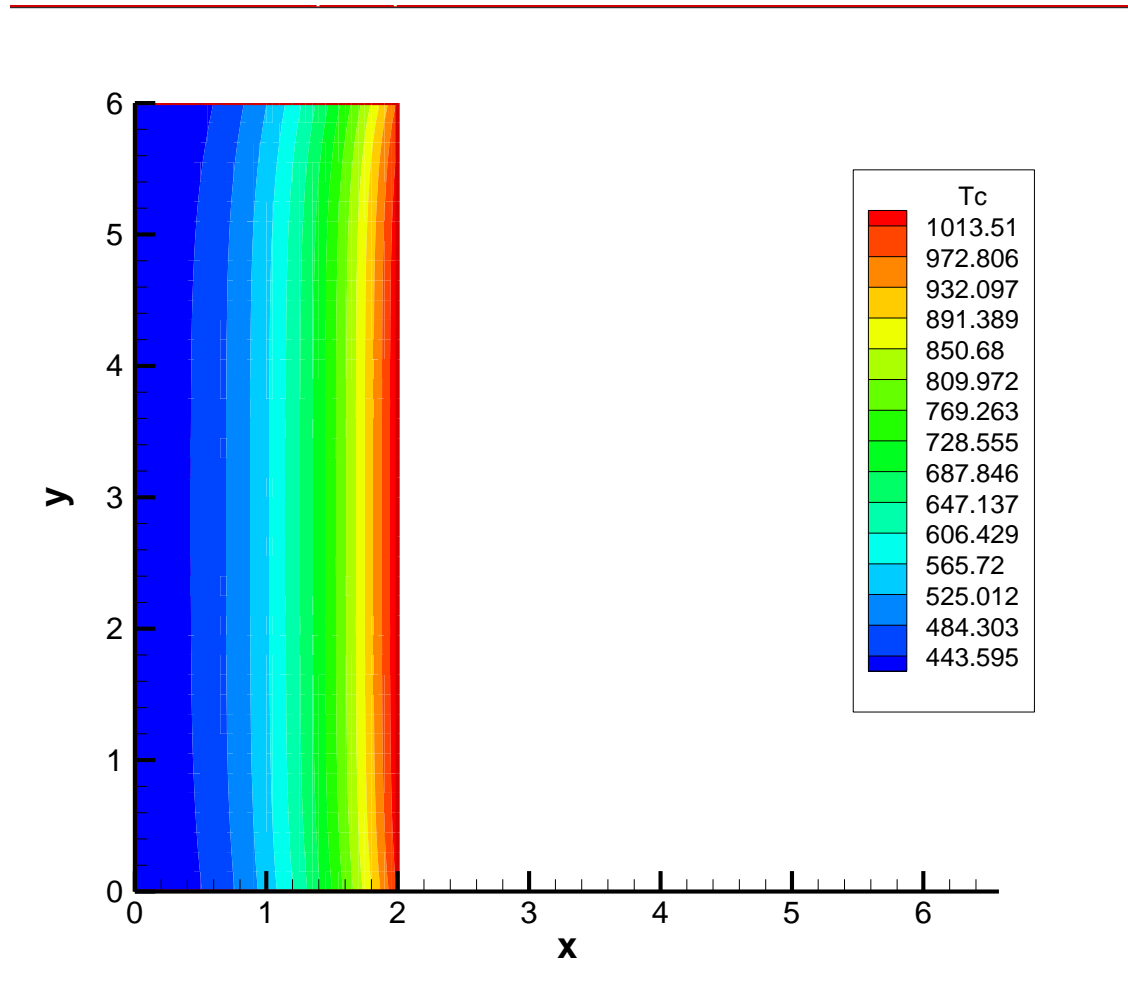


Figure N°7 : représentation graphique de la Courbe : $H= f(R)$ pour déférant température

Conclusion

Notre étude sur l'obtention du champ de températures conductif dans un cylindre vertical soumis à un flux de chaleur pariétal périodique a révélé des résultats significatifs grâce à l'application de la méthode des différences finies. À travers l'analyse des courbes représentant les variations de température en fonction de la hauteur ($T = f(H)$) et du rayon ($T = f(R)$) du cylindre, nous avons pu approfondir notre compréhension des phénomènes de transfert de chaleur à l'intérieur de la structure.

Les courbes $T = f(H)$ ont mis en évidence l'influence de la convection de chaleur sur la distribution verticale des températures à l'intérieur du cylindre. Les observations de ces courbes ont souligné des zones d'équilibre thermique et ont permis de modéliser avec précision les variations de température en fonction de la hauteur. De même, les courbes $T = f(R)$ ont permis de comprendre comment la distance physique par rapport à la source de chaleur affecte la répartition de la température le long du rayon du cylindre.

Ces résultats ont des implications importantes pour la conception et l'analyse des systèmes thermiques, en mettant en évidence l'importance de considérer à la fois les variations de température verticales et radiales pour une évaluation complète des performances d'un système. En outre, nos conclusions soulignent la valeur des méthodes numériques telles que la méthode des différences finies dans l'étude des phénomènes de transfert de chaleur, offrant ainsi des outils précieux pour l'optimisation des systèmes thermiques dans divers domaines d'application.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

Référence bibliographique :

- [1] : M.BAILY.-Thermodynamique technique 2a.production et transfert de la chaleur écoulement.Paris , Bordas 1971
- [2] J.F.SAKADIRA ,Initiation aux transferts thermiques , Lavoisier, Paris, 2015,
- [3] ANDRE.B DE VRIEDT :-Transmission de la chaleur volume I, tome1 Généralités-conduction. (Québec) : Gaëtan Morin éditeur, DL 1984
- [4]Patankar, S. V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Taylor & Francis.
- [5] LeVeque, R. J. (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. SIAM.
- [6]Schiesser, W. E., & Griffiths, G. W. (2009). Numerical Methods in Engineering with Fortran. Cambridge University Press.
- [7] I. Chtcherbatski, Analyse Numérique cours et problèmes, Office des publications universitaires, Algérie.
- [8] S. V. Patankar and D. B. Spalding, A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum transfer in three-dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1787– 1790 (1972).
- [9] ALIOUAT ANIS — SAOUD ABDELAZIZ,Méthode de Gauss-Seidel appliquée aux réseaux électriques, Mémoire Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira 2021
- [10] Christian Guilpin B. POLYNÔMES ORTHOGONAUX RELATIVEMENT À UNE FONCTION POIDS. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE GAUSS, the book Manuel de calcul numérique appliqué, EDP Sciences 1999

Annexe

DONNEES :

Les données relatives au phénomène sont :

Hauteur du cylindre $HC = 6m$

Rayon du cylindre $RC=2 m$

Masse volumique $\rho = 7860 \text{ Kg/ m}^3$

Capacité calorifique $Cp = 444 \text{ J/Kg.K}$

Conductivité thermique $\lambda = 50.2 \text{ W/m.K}$

Intensité du flux de chaleur $Qt = 145 \text{ W/ m}^2 .K$

Coefficient d'échange convectif relatif à la base supérieure $H2= 10 \text{ W/ m}^2 .K$

Coefficient d'échange convectif relatif à la base inférieure $H1= 4.5 \text{ W/ m}^2 .K$

Durée de chauffage $PC= 900 \text{ s}$

Nombre de périodes de repos $DE= 7$