République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : probabilité

Par

Khaoula Boukhenissa

Titre :

Equations intégrales stochastiques de Volterra

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Khalfallah Nabil	UMKB	Président
Dr.	Yakhlef Samia	UMKB	Encadreur
Dr.	Bougherara Saliha	UMKB	Examinatrice

10/06/2024

Dédicace

À *ma mère et mon père ; pour l'éductaion qu'il mon prodigué avec tous les moyens et au prix de toutes les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard, pour le sens du devoir qu'ils mon enseigné depuis mon enfance*

À *mon mari, qui m'a accompagnée et m'a soutenue tout au long de la rédaction de ce mémoire*

À *mes frères et sœurs : Amar, Saif, Yassine, Zaki, Marame, Rania et Rofaida*

À mes enseignants

À tous mes amis

À ma famille

À tous ceux qui mont encourager a poursuivre mes études.

~Khaoula Boukhenissa~

REMERCIEMENTS

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu "**Allah**" qui ma donné le courage pour faire ce travail.*

Tout d'abord je tiens à exprimer mes remerciement et ma profonde reconnaissance en vers mon encadreur madame **Yakhlef Samia**, pour son exigence de clarté et de rigueur qui m'a beaucoup apporté, pour la confiance qu'elle m'a témoignée lors des moments décisifs ainsi que pour son soutien tout au long temps de ce projet.

Ma gratitude va tout autant aux membres du jury : **Pr. Khalfellah. N** et **Dr. Bougherara. S,** pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire.

Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

J'adresse mes remerciements aux enseignants, bibliothécaires et administrateurs de la faculté des science exactes et des sciences de la nature et de la vie.

Table des matières

Introduction

Au cour de ces derniers siècles l'être humain a connu un grand développement dans tous les domaines de science : physique, chimie, biologique, électronique et autre, et tous développements n'a jamais été possible si ce n'est la matière la plus importante celle des mathématiques, cela est dû à leur importance et à leur utilisation comme un outil de calcul dans tous ces domaines. D'ailleurs la plupart de ces phénomènes pourraient êtres modélisés par des équations différentielles ordinaires. Dernièrement, un nouveau type d'équation connu sous le nom : équations différentielles stochastiques (EDS), est apparu, par rapport aux équations différentielles ordinaires, les équations différentielles stochastiques prennent en considération le terme de bruit. Ce type d'équation joue un rôle très important en raison de ses larges applications [[1] ;[2] ;[3] ;[4]] dans la modélisation des problèmes physiques, biologies, chimies, écologies, traitement du signal, mouvement de particules dans la mécanique quantique, phénomènes de diffusion, mathématique financières et les théories de commande. Pour cela, on a choisi dans ce mémoire l'étude des équations intégrales stochastiques de Volterra (EISV). Ils sont un type spécial d'équations intégrales. Ils représentent des modèles intéressantes de dynamique stochastique avec mémoire, qui ont des applications par exemple en ingénierie, biologie et finance.

Dans un espace de probabilité filtré complet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ sur lequel on définit un mouvement Brownien standard d dimensionnel B_t et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelles i.e : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma(B_s, s \leq t)$, l'équation différentielles stochastique de type d'Itô, on parle du problème de la valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t \\ X_0 = x \end{cases}, \forall t \in [0, T]. \tag{1}$$

Les résultats standard concernant l'équation (1) peuvent être trouvés dans de nombreux livres. On sait que l'équation (1) a la forme intégrale suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s, \forall t \in [0, T]. \tag{2}$$

Cela nous suggère naturellement que l'on peut considérer la forme intégrale suivante :

$$X_t = \psi\left(t\right) + \int_0^t b\left(t, s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(t, s, X_s\right) dB_s, \forall t \in [0, T]. \tag{3}$$

Ce qui précède est référé à nous comme une équation intégrale stochastique de Volterra, pour certaines études systématiques (même pour des cas plus généraux) ont était effectuées dans la littérature (voir ([9]) et ([11]) par exemple). Il est claire qu'en général on ne peut pas transformer (3) en EDS de la forme (1), même si les coefficients b et σ sont lisses.

Ce travail se décompose de trois chapitres :

- Le premier chapitre, est un rappel sur le calcule stochastique : martingale, mouvement Brownien et formule d'Itô et quelques inégalités.
- Le deuxième chapitre consiste à étudier les équations différentielles stochastique : existence et unicité de la solution, en utilisant la méthode d'itération de Picard et aussi on donne quelques example dans le cas linéaire où on a une solution explicite.
- Le troisième chapitre est consacré a l'étude des équations intégrales stochastiques de Volterra, dans la section 1 de ce chapitre nous étudions la transformation intégrale de l'intégrale stochastique, nous avons donner les inégalités maximales pour

ce type d'intégrale qui sont nécessaires dans la suite. Dans la section 2, nous avons établer l'existence et l'unicité des solutions pour ce type d'équation dans le cas lipschitzien où nous avons utilisé la méthode d'itération de Picard.

Chapitre 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Filtration et processus stochastiques

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, une famille de sous $\sigma-$algèbre (tribus) $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ de $\mathcal{F}$ est une filtration si c'est une famille croissante, au sens où*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \forall\ 0 \leq s \leq t \in I.$$

Le quadruplet $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in I}\right)$ est appelé la base stochastique (ou espace de probabilité filtré)

- *Il faut comprendre $\mathcal{F}_t$ comme "l'information au temps t" plus le temps croit $(s \leq t)$, plus on a d'information $(\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t)$.*
- *Un filtration $\{G_t, t \in I\}$ est dite plus grosse que $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ si $\mathcal{F}_t \subset G_t, t \in I$.*
- *Une filtration est dite normale si elle vérifie les propriétés supplémentaires.*
- *Les négligeables au sens large sont dans tout $\mathcal{F}_t$:*

$$P(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{F}_{0.}$$

– *La filtration est continue a droite :*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t + = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{s.}$$

1.1.2 Processus stochastiques

Définition 1.1.2 *Soit $I = [0, T]$ pour $T \in [0, +\infty]$ ou $I = [0, +\infty[$. une famille de variable aléatoires $X = (X_t)_{t \in I}$ avec $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée un processus stochastique avec indice l'ensemble I.*

Remarque 1.1.1 *Il y'a deux différents aspects dans le processus stochastique X :*

– *La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrit des fonctions aléatoires par*

$$w \to g(w) = X(w) = (X_t(w))_{t \in I},$$

la fonction $g(w)$ est appellée la trajectoire de X.

– *La famille $X = (X_t)_{t \in I}$ décrit un processus qui est par rapport au temps t une famille de variable aléatoire donée $t \to X_t$.*

Définition 1.1.3 *Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, les processus X et Y sont dit indistinguables si et seulement si*

$$P(X_t = Y_t, t \in I) = 1.$$

cette définition exige que l'ensemble $\{w \in \Omega : X_t(w) = Y_t(w), t \in I\}$ est mesurable. Ce n'est pas le cas en général.

Définition 1.1.4 *Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, les processus X et Y sont modification l'un de l'autre si*

$$P(X_t = Y_t) = 1, t \in I$$

Définition 1.1.5 *Deux processus X et Y sont dit equivalents s'ils ont la même loi, on écrira*

$$X \overset{loi}{=} Y.$$

Définition 1.1.6 *Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ un processus stochastique.*

1. *Le processus X est continue si $t \to X_t(w)$ est continue $\forall w \in \Omega$.*
2. *Le processus X est càdlàg (continue à droite, limité à gauche) si $t \to X_t(w)$ est continue a droite et a des limites a gauches $\forall w \in \Omega$.*
3. *Le processus X est càglàd (continue à gauche, limité à a droite) si $t \to X_t(w)$ est continue a gauche et a des limites a droite $\forall w \in \Omega$.*

Définition 1.1.7 *Soit $X = (X_t)_{t \in I}$ et $Y = (Y_t)_{t \in I}$ des processus stochastique dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ respectivement, alors X et Y ont la même distributions (loi) fini-dimensionnelle si*

$$P\left(\left(X_{t_1}, ..., X_{t_n}\right) \in B\right) = P'\left(\left(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}\right) \in B\right),$$

$$\forall\ 0 \leq t_1 < ... < t_n,\ n = 1, 2, ...\ ,\text{et } B \in B\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Proposition 1.1.1

1. *Si X et Y sont indistinguables alors ils sont modification l'un de l'autre, la réciproque n'est pas vraie en générale.*
2. *Si X et Y sont modification l'un de l'autre. alors ils ont la même distribution (loi) fini dimensionnelle. La réciproque et fausse.*

Proposition 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est adapté. (tout les autres implications entre prog-mesurable, mesurable et adapté ne sont pas vraies en générale).*

Proposition 1.1.3 *Un processus adapté tel que toutes les trajectoires sont continues a gauche (où a droite) est progressivement mesurable.*

Proposition 1.1.4 *Supposons que X et Y sont modification l'un de l'autre et que les trajectoires de X et Y sont continue a gauche (ou continues a droite) alors les processus X et Y sont distinguables.*

Définition 1.1.8 *Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :*

1. $X_0 = 0, P.s$
2. $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+,$ *tel que* $\forall 0 \leq t_1 < ... < t_n,$ *les variables aléatoires*

$$X_{t_1}, (X_{t_2} - X_{t_1}), ..., \left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

sont indépendantes.

1.2 Exemples de processus stochastique

1.2.1 Mouvement Brownien

En 1828, des scientifiques ont observé un mouvement brownien bidimensionnelle Robert Brown disperse le pollen dans l'eau. Plus tard, Bachelier a utilisé la fonction brownienne unidimensionnelle, en 1900 Albert Einstein a modélisé les marchés financiers en 1905. La première preuve rigoureuse (mathématiquement) de son existence est introduit par Norbert Winer en 1921.

Proposition 1.2.1 *Il existe un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un processus* $M = (M_t)_{t \geq 0}$ *avec* $M_0 = 0$ *tq*

i) $(M_t)_{t\geq 0}$ *est continue.*

ii) *Pour tout* $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n < s < t < \infty$ *la variable aléatoire* $M_t - M_s$ *est indépendante de* $(M_{s_1}, ..., M_{s_n})$ *(accroissements indépendantes).*

iii) *Pour tout* $0 \leq s < t < \infty$, *on a* $M_t - M_s \rightsquigarrow N(0, t-s)$ *(accroissements stationnaires).*

Définition 1.2.1 *Un processus satisfaisant les propriétés de la proposition précédente est appelé mouvement brownien standard.*

Proposition 1.2.2 *Soit* B *un mouvement brownien alors presque sûrement on a :*

a) $t \rightarrow B_t(w)$ *n'est pas différentiable en aucun point* t.

b) $t \rightarrow B_t(w)$ *n'est pas à variation finie en aucun point* t.

Théorème 1.2.1 *Un processus* B *est un mouvement brownien ssi, c'est un processus Gaussien continue centré de fonction de covariance*

$$cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = s \wedge t.$$

1.2.2 Martingale et temps d'arrêt

Définition 1.2.2 (Martingale à temps continue) *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si :*

1. X_t *est intégrable , i.e :*

$$\forall t \geq 0, E|X_t| < \infty.$$

2. X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable, i.e :adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

3. $\forall s \leq t$

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s.$$

Définition 1.2.3 *Soit* $(X_t)_{t\in I}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}-$*adapté et tel que* $E|X_t| < \infty, \forall t \geq 0$

1. *X est appelé sous-martingale si* $\forall\ 0 \leq s \leq t \in I$ *on a*

$$E\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] \geq X_s.\ p.s.$$

2. *X est appelé sur-martingale si* $\forall\ 0 \leq s \leq t \in I$ *on a*

$$E\left[X_t/\mathcal{F}_s\right] \leq X_s.\ p.s.$$

Définition 1.2.4 *Soit* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *une* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *−martingale a trajectoires continues. Alors, pour tout* $p \in [1, +\infty[$:

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) \leq \frac{p}{p-1} E\left(|X_t|^p\right).$$

Définition 1.2.5 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt* τ *par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *est une application* $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \{\tau \leq t\} = \{w \in \Omega/\tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.2.6 (Martingale locale) *Un processus càdlag adapté* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissant vers l'infinie telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *le processus arrêté* X^{T_n} *soit une martingale nulle en 0, e.i*

$$X_0 = 0.$$

1.3 Intégrale stochastique

On cherche maintenant à définir la variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique, le caractère aléatoire de θ (variable aléatoire) exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener.

On note $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0}$, la filtration naturelle du mouvement brownien B.

Définition 1.3.1 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ −adapté, càglàd et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

1.3.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

1) Linéarité

Pour $t \geq 0, a, b \in \mathbb{R}$ et θ^1, θ^2 bon processus on a :

$$\int_0^t \left(a\theta_s^1 + b\theta_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 dB_s.$$

2) Additivité

Pour $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\int_s^t \theta_u dB_u = \int_s^u \theta_u dB_u + \int_u^t \theta_u dB_u.$$

3) Propriétés de martingale

Pour tout bon processus θ, les processus

$$t \to I_t(\theta),$$

et

$$t \to I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds,$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$ −martingale continues.

On a donc, $\forall s \leq t$

$$E\left[I_t(\theta)/\mathcal{F}_s^B\right] = I_s(\theta),$$

et

$$E\left[I_t(\theta) - I_s(\theta)/\mathcal{F}_s^B\right] = 0.$$

On montre également que

$$\begin{aligned} E\left[I_t(\theta) - I_s(\theta)^2/\mathcal{F}_s^B\right] &= E\left[(I_t(\theta))^2 - (I_s(\theta))^2/\mathcal{F}_s^B\right] \\ &= E\left[\int_0^t \theta_u^2 du/\mathcal{F}_s^B\right]. \end{aligned}$$

4)

Si $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$−adapté et

$$E\left[\int_0^t |\theta_s|^2 ds\right] < +\infty,$$

on a l'inégalité

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t |\theta_s|^2 dB_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^t |\theta_s|^2 ds\right].$$

5) Isométrie

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.3.2 (Processus d'Itô) *Un Processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$\forall\ 0 \leq t \leq T : X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s\ P - p.s,$$

où x est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant :

$$\int_0^t |b_s|^2\, ds < +\infty,$$

et

$$\int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < +\infty, P - p.s.$$

On écrirt généralement le processus dItô en utilisant la forme différentielle suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t. \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

Le coefficient b s'appelle dérive (drift) et σ s'appelle le coefficient de diffusion (ou volatilité).

Remarque 1.3.1 **i**) *La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

ii) *Le processus*

$$t \to \int_0^t b_s d\sigma s,$$

est la partie a variation finie de X, et le processus

$$t \to \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

est la partie martingale de X (martingale locale).

1.3.3 Formule d'Itô

Théorème 1.3.1 (Première formule d'Itô) *On suppose f de classe C^2. Alors*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(x_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soient X un processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à X, on a*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, x_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s \\ &= f(0, x_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)\, dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds. \end{aligned}$$

on peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \left[f_t'(t, X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}''(t, X_t)\, \sigma_t^2\right] dt + f_x'(t, X_t)\, dX_t.$$

1.4 Résultats utiles

1.4.1 Inégalités maximals

On a souvent besoin de majouration d'intégral stochastique. L'inégalité de Doob conduit à :

Proposition 1.4.1 *Soit θ un bon processus alors*

$$E\left[\sup_{t\leq T}\int_0^t \theta_s dB_s\right]^2 \leq 4E\left[\int_0^T \theta_s dB_s\right]^2 = 4E\left[\int_0^T \theta_s^2 ds\right].$$

1.4.2 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (BDG)

On a

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \sigma\left(s,x_s\right)dB_s\right|^2\right] \leq CE\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s,x_s\right)\right|^2 ds\right].$$

où C est constante positive.

1.4.3 Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in [1,+\infty[$ des exposante conjugués i.e

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Si f, g sont des applications mesurables, alors :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q\,,$$

quand $p = q = 2$ l'inégalité de Hölder donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz, i.e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2\,.$$

1.4.4 Lemme de Gronwall

Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue tell que, pour tout t :

$$g\left(t\right) \leq a + b\int_0^t g\left(s\right)ds, a\in\mathbb{R}, b\geq 0,$$

alors pour tout t :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

1.4.5 Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable

En se plaçant sur $E : C([a,b], \mathbb{R})$ avec $a, b \in \mathbb{R}^2$ muni de produit scalaire

$$(f,g) \to \langle f,g \rangle = \int_a^b f(t).g(t)\,dt,$$

on obtient : $\forall f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$

$$\int_a^b |f(t).g(t)|\,dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

1.4.6 Lemme de Fatou

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive, alors :

$$\int_x \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu\right) \leq \left(\liminf_{n\to+\infty} \int_x f_n d\mu\right).$$

1.4.7 Inégalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire positive définit sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, alors pour tout $\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha}.$$

1.4.8 Inégalité de Kolomogorov

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carrée intégrable et $\lambda > 0$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$P\left(\sup_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 E\left(X_n^2\right)}.$$

Lemme 1.4.1 (Borel Cantelli) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évenement aléatoires, on définit :*

$$\limsup_n A_n = \bigcap_p \bigcup_{n\geq p} A_n.$$

1. *Si la série $\sum_n P(A_n) < \infty$, alors*

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

2. *Si la suite est indépendante, alors*

$$\sum_n P(A_n) = \infty \Rightarrow P\left(\limsup_n A_n\right) = 1.$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

2.1 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS), ils sont des généralisation d'équations différentielles qui sont gouverner de plusieurs phénomènes déterministes en physique, biologie d'évolution perturbée par un terme aléatoire.
On étudie l'existence et l'unicité d'une équation différentielle stochastique a coefficients Lipschitziens on donne quelque propriétés sur les solutions des EDS, avec quelque example où a une solution explicite dans le cas linéaire.

Notations et définitions

Définition 2.1.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où sous forme intégrale

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s, \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.1 *:*

- $b = [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *(la dérive) et* $\sigma = [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ *(la coefficient de diffusion) sont deux fonctions mesurables bornées où* T *un réel strictement positive et* $d, m \in \mathbb{N}$.
- $x \in \mathbb{R}^d$ *une condition initiale.*

Définition 2.1.2 (Solution d'une EDS) *On appelle solution de l'EDS (2.1) la donnée de*

a) *un espace de probabilité filtré complet* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, P\right)$ *satisfaisant les conditions habituelles.*

b) *un* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ *mouvement brownien* $B = \left(B^1 ... B^m\right)$ *a valeur dans* $\mathbb{R}^m$.

c) *un processus* $X = \left(X^1, ..., X^d\right)$ *continue* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ *adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que (2.1)soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout* $1 \leq i \leq d$ *on a :*

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b^i\left(s, X_s\right) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}\left(s, X_s\right) dB_s^j.$$

Lorsque de plus $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$, *on dira que le processus* X *est solution de (2.1).*

2.2 Existence et unicité de solution

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considère l'EDS (2.1).

Définition 2.2.1 (Existence, unicité des EDS) *Pour l'équation (2.1), on dit qu'il y a*

1. *existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution de (2.1).*
2. *existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de (2.1) ont même loi.*
3. *unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité fitré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' de 2.1 telles que X_t et X'_t sont indistinguables.*

On dit de plus qu'une solution X de (2.1) est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B. Il y a unicité forte pour (2.1) si pour tout mouvement brownien B deux solutions fortes associées à B sont indistinguables.

Remarque 2.2.1 *Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle. Pour voir cela, on considère un mouvement brownien*
$(B_t)_{t\geq 0}$ a partir de $M_0 = y$ on pose :

$$M_t = \int_0^t sign\left(B_s\right) dB_s,$$

où

$$sign\left(x\right) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \geq 0 \\ -1 & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

puisque

$$sign^2\left(x\right) = 1$$

alors (M_t) *est bien défini et* (M_t) *est une martingale local a trajectoire continue et que*

$$\begin{aligned}\langle M, M\rangle_t &= \int_0^t sign\,(B_S)^2\, d\,\langle B, B\rangle_s \\ &= \int_0^t ds = t,\end{aligned}$$

Par le théorème de Lévy, (M_t) *est un mouvement brownien. On voit alors que* M_t *est unesolution de l' EDS*

$$\begin{cases} dX_t = sign\,(X_t)\, dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(M_t) *est solution de cette équation. on voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements browniens et soit égaux en loi (on a existence et unicité faibles), mais (3) n'est pas vérifiée. Le processus* $(-M_t)$ *est une aussi solution de l'équation(2.3)*

on a

$$\begin{aligned} P\,[M_t \neq -M_t] &= P\,[2M_t \neq 0] \\ &= 1 - P\,(2M_t \neq 0) \\ &= 1 - P\,(M_t = 0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

alor (M_t) *et* $(-M_t)$ *ne sont pas indistinguable.*

Théorème 2.2.1 (Yamada-Watanabe) *Existence faible et unicité trajectorielles impliquent unicité faible. De plus, dans ce cas, Pour tout espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ *et tout* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *mouvement brownien* B*, Il existe pour chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *une unique solution fort de (2.1).*

2.2.1 Cas Lipschitzien

Dans tout la suite, on suppose remplies les conditions suivantes :

Hypothèses lipschitziennes Les fonctions b et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x, i.e il existe une constante $k \in]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq k|x-y|,$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x-y|,$$

et

$$\int_0^t \left(|b(t\ ,0)|^2 + |\sigma(t\ ,0)|^2\right) dt < +\infty,$$

pout tout T où $|b|$ et $|\sigma|$ représentent la norme du vecteur b et de matrice σ : on a alors

Théorème 2.2.2 (Cauchy_Lipschitz pour EDS) *Sous les hypothèses lipschitziennes, on a 2.2 a une unicité trajectorielle. De plus, pour tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien B et tout espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ une unique solution forte.*

Remarque 2.2.2 *On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en t, qui n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{t\in[0,T]} |\sigma(t,x)|$ et $\sup_{t\in[0,T]} |\sigma(t,x)|$ pour x fixé : on peut" localiser" l'hypothèse lipschitzienne sur b et σ, ensuite on doit maintenir la condition de croissance sous-linéare :*

$$|b(t,X_t)| \leq k(1+|X_t|) \qquad |\sigma(t,x)| \leq k(1+|X_t|).$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Preuve. (Unicité trajectorielle et existence forte)

Unicité trajectorielle : On considère deux solutions X et X' de (2.2) avec $X_0 = X_0'$, qui sont dans le même espace et ont le même mouvement brownienne B. Pour $M > 0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\left(t \geq 0 : |X_t| \geq M, \quad \left|X_t'\right| \geq M\right).$$

D'après 2, on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma\left(s, X_s\right) dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b\left(s, X_s\right) ds,$$

$$X_{t\wedge\tau}' = X_0' + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma\left(s, X_s'\right) dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b\left(s, X_s'\right) ds,$$

on considère $t \in [0, T]$, Par différence, comme $X_0 = X_0'$ et comme X_t, X_t' sont bornées par M sur $]0, \tau]$, on a

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}' = & \int_0^{t\wedge\tau} \sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(s, X_s'\right) dB_s \\ & + \int_0^{t\wedge\tau} b\left(s, X_s\right) - b\left(s, X_s'\right) ds, \end{aligned}$$

on utilisant la majoration

$$(x+y)^2 \leq 2\left(x^2+y^2\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & E\left[\left(X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}'\right)^2\right] \leq 2\left(E\left[\int_0^{t\wedge\tau} \sigma\left(s, Xs\right) - \sigma\left(s, X_s'\right) dB_s,\right]\right)^2 \\ & + E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau} b\left(s, Xs\right) - b\left(s, X_s'\right) ds,\right)^2\right], \end{aligned}$$

et par l'isométrie et l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\begin{aligned}E\left[\left(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\right)^2\right] &\leq 2\left(E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau}\sigma\left(s,X_s\right)-\sigma\left(s,X'_s\right)^2ds\right)\right]\right)\\ &\quad+2T\left(E\left[\int_0^{t\wedge\tau}b\left(s,Xs\right)-b\left(s,X'_s\right)^2ds\right]\right)\end{aligned}$$

Les hypothèses lipschitzienne

$$\begin{aligned}E\left[\left(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\right)^2\right] &\leq 2k^2\left(1+T\right)E\left[\int_0^{t\wedge\tau}\left(X_s-X'_s\right)^2\right]ds\\ &\leq 2k^2\left(1+T\right)E\left[\int_0^{t}\left(X_{r\wedge\tau}-X'_{r\wedge\tau}\right)^2\right]ds.\end{aligned}$$

Si on pose

$$h\left(t\right)=E\left[\int_0^t\left(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau}\right)^2\right]\quad\text{et}\quad C=2k^2\left(1+T\right)$$

alors on a établi que h vérifie pour $t\in[0,T]$:

$$h\left(t\right)\leq C\int_0^t h\left(s\right)ds.$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall (lemme Gronwall), S'applique avec $\alpha=0$ et $b=C$, on obtient $h=0$, C'est à dire

$$X_{t\wedge\tau}=X'_{t\wedge\tau}\qquad p.s.$$

Enfin, en faisant $M\to+\infty$, on a $\tau\to+\infty$ et donc

$$X_t=X'_t\qquad p.s.$$

Les processus X et X' sont des modification a trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle, X existence fort : Nous utilisons une méthode d'approximation de Picard pour traiter les équations différentielles pour cela, on pose

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x, \\
X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma(s, x)\, dB_s + \int_0^t b(s, x)\, ds, \\
X_t^2 &= x + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^1\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s^1\right) ds, \\
\vdots &= \vdots \\
X_t^n &= x + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

l'intégrale stochastique ci dessus sont bien définie puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n, X_t^n est continue et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(s, X_s^n)$, l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie.

On fixe maintenant $T > 0$. et on raisonne sur $[0, T]$, on prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$E\left[\left(X_t^n\right)^2\right] \leq C_n. \tag{2.5}$$

Premièrement, (2.5) est immédaite si $n = 0$ avec $C_0 = x^2$, puis on suppose que (2.5) est vraie au $rang\ n - 1$

$$|\sigma(s, y)| \leq C + k|y|, \qquad s \in [0, T], y \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

$$|b(s, y)| \leq C + k|y|, \qquad s \in [0, T], y \in \mathbb{R}$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (2.5), on a

$$E\left[\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)^2 ds\right] < +\infty$$

on a donc

$$E\left[\left(\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)^2 ds\right].$$

on a

$$X_t^n = \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right)^2 ds$$

en utilisons l'inégalité majore

$$(x+y+z)^2 \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

on obtient

$$E\left[(X_t^n)^2\right] \leq 3\left(|x|^2 + E\left[\left(\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right)^2\right]\right) + E\left[\left(\int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds\right)^2\right],$$

par l'inégalité de Cauchy Schwarz, l'isométrie dans L^2

$$E\left[(X_t^n)^2\right] \leq 3\left(|x|^2 + E\left[\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)^2 dB_s\right]\right) + E\left[\int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right)^2 ds\right]$$

$$
\begin{aligned}
&(\textit{hypothèses \ lipschitzienne}) \\
&\leq 3\left(|x|^2 + 2\left(1+T\right).E\left[\int_0^t \left(k'\right)^2 + k^2\left(X_s^{n-1}\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left|x\right|^2 + 2T\left(1+T\right).\left(\left(k'\right)^2 + k^2 C_{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

ce qui établit 2.5 pare récurrence.

La borne 2.5 et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n, la martingale local

$$\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right)^2 dB_s.$$

est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n. on utilisera ce ci pour majorer par récurrence.

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right].$$

On a

$$
\begin{aligned}
X_t^{n+1} - X_t^n = &\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) dB_s \\
&+ \int_0^t \left(b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right) ds,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq 2E &\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^t \left(\sigma\left(r, X_s^n\right) - \sigma\left(r, X_s^{n-1}\right)\right) dB_r\right|^2\right. \\
&\left.+ \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \left(b\left(r, X_s^n\right) - b\left(r, X_s^{n-1}\right)\right) dr\right|^2\right].
\end{aligned}
$$

$$\textit{inégalité de Doob}$$

$$\leq 8E\left[\int_0^t \left(\sigma\left(r,X_r^n\right)-\sigma\left(r,X_r^{n-1}\right)\right)^2 dr\right]$$
$$+\,2E\left[\left(\int_0^t b\left(r,X_r^n\right)-b\left(r,X_r^{n-1}\right)dr\right)^2\right]$$

$$Inégalité\ de\ Cauchy-Schwartz$$

$$\leq 8E\left[\int_0^t \left(\sigma\left(r,X_r^n\right)-\sigma\left(r,X_r^{n-1}\right)\right)^2 dr\right]$$
$$+\,2tE\left[\int_0^t \left(b\left(r,X_r^n\right)-b\left(r,X_r^{n-1}\right)\right)^2 dr\right]$$

$$\leq 8E\left[\int_0^t \left(\sigma\left(r,X_r^n\right)-\sigma\left(r,X_r^{n-1}\right)\right)^2 dr\right]$$
$$+\,2TE\left[\int_0^t \left(b\left(r,X_r^n\right)-b\left(r,X_r^{n-1}\right)\right)^2 dr\right]$$

$$hypothèses\ lipschitziennes$$

$$\leq 2\left(4+T\right)k^2 E\left[\int_0^t \left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2 dr\right]$$

$$\leq C_T.E\left[\int_0^t \sup_{0\leq u\leq r}\left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2 dr\right],$$

avec

$$C_T=2\left(4+T\right)k^2,$$

posons

$$g_n\left(r\right):=E\left[\int_0^t \sup_{0\leq u\leq r}\left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2\right]. \tag{2.7}$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}\left(t\right)\leq C_T\int_0^t g_n\left(r\right)dr. \tag{2.8}$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur $[0, T]$.

En effet, en utilisons (2.5) pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} g_n(r) &\leq E\left[\sup_{0\leq u\leq r}\left|X_u^n - X_u^{n-1}\right|^2\right] \\ &\leq E\left[\sup_{0\leq u\leq r}\left(2\left(X_u^n\right)^2 + 2\left(X_u^{n-1}\right)^2\right)\right] \\ &\leq 2\left(C_n + C_{n-1}\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

d'après (2.9) on a

$$g_1(t) \leq 2\left(C_1 + C_0\right) = C_T'.$$

une récurrence simple sur (2.8) donne :

$$g_n(t) \leq C_T'\left(C_T\right)^{n-1}\frac{t^n}{n!}.$$

Et, en vertu du critère de D'alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

comme

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty, \end{aligned}$$

cela entraîne que $p.s$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| < \infty,$$

et donc $p.s$ la suite $\left(X_t^n\right)_{t\in[0,T]}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $\left(X_t\right)_{t\in[0,T]}$ qui est continue. Comme par récurrence , chaque X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B , X l'est aussi. Les estimations (2.7) établissent aussi que pour $m > n$

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - X_t^n|^2\right] \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \sigma(s, X_s^n)\, dB_s \quad \text{dans } L^2,$$

finalement,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\, dB_s\right)^2\right] &= E\left[\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))^2\, ds\right] \\ &\leq E\left(k^2\int_0^t |X_s - X_s^n|^2\, ds\right) \\ &\leq Tk^2 E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t - X_t^n|^2\right] \to 0 \end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour b.

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X^n 2.7, on trouve que X est une solutions (forte) de 2.2 sur $[0, T]$. ■

2.3 Exemples sur les EDS

Exemple 2.3.1 ***(Equations Black et Scholes)***

Il s'agit d'un cas particulier : $b(t,x) = bx$ *et* $\sigma(t,x) = \sigma x$ *i.e*

$$\begin{cases} dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 = x_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

cette EDS modélise l'évolution du cours X soumis à un taux d'intérêt b et σ une perturbation stochastique $\sigma X_t dB_t$.

Dans un contexte financier, le coefficient de diffusion σ et appelé volatilité, noter que la partie déterministe de l'accroissement de X_t (bX_t) et sa partie aléatoire (σX_t) sont tout les deux proportionnelles à la valeur courante, X_t la solution. $X(.)$ est un cas particulier de (2.10)

$$X_t = x_0 \exp\left(bt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right),$$

on retrouve le mouvement brownier géométrique.

Exemple 2.3.2 (Equation de Langevin) *L'équation de Langevin qui est sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.11}$$

pour X_0 donné l'équation de Langevin possède une unique solution appelé processus Ornstein-Uhlenbeck est donné par

$$X_t = x \exp(-b_t) + \sigma \int_0^t \exp(B_s)\, dB$$

sans le terme σdB_t, l'équation (2.11) devient

$$dX_t = -bX_t dt$$

$$dX_t = -bX_t dt \Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} = -bdt$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dX_t}{X_t} = \int_0^t -bdt$$

$$\Rightarrow \ln(X_t) - \ln(X_0) = -bt$$

$$\Rightarrow X_t = C\exp(-bt),$$

d'où sa solution est

$$X_t = C\exp(-bt),$$

pour tenir compte du terme B_t, on fait varier la constant C

$$dC(t)\exp(-bt) - bC(t)\exp(-bt)\,dt = dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t,$$

$$dC(t) = \sigma\exp(bt)\,dB_t$$

$$\int_0^t dC(t) = \int_0^t \sigma\exp(b_s)\,dB_t$$

$$C(t) = x_0 + \int_0^t \sigma\exp(b_s)\,dB_s,$$

alors la solution de l'équation

$$X_t = x_0\exp(-bt) + \int_0^t \sigma\exp(-b(t-s))\,dB_s.$$

2.4 Type d'équations différentielles stochastiques

2.4.1 Equations différentielles inhomogènes en temps

L'équation différentielle stochastique suivante :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(X_s,s)\,ds + \int_0^t g(X_s,s)\,dB_s, t \geq 0 \quad P.s \tag{2.12}$$

est dite équation différentielle stochastique inhomogène en temps, f et g dépendent du temps.

Théorème 2.4.1 *Si f et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont continues (conjointement en t et en x) et lipschitziennes en x, alors il existe un unique processus. $X(t)$ solution de l'équation (2.12), $X(t)$ est un processus d'Itô.*

2.4.2 Equations différentielles homogènes en temps

L'équation différentielles stochastiques suivante :

$$X_t = x + \int_0^t f(X_s)\, ds + \int_0^t g(X_s)\, dB_s \tag{2.13}$$

est dite équation différentielles homogènes en temps, f et g ne dépendent pas du temps.

Théorème 2.4.2 *Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace probabilité filtré, et $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien B_t. $J \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont lipschitziennes. alors il existe un unique processus $(X_t, t \geq 0)$ continu et adapté a $\mathcal{F}_t$ tel que l'équation homogène en temps (2.13) soit vérifié $\forall t \geq 0$. P.p.s*
de plus

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} X_t^2\right) < +\infty.$$

2.4.3 Equations différentielle stochastique linéaire

Soient $X_0 \in \mathbb{R}$ et $b, \sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et bornées l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t)\, X_t dt + \sigma(t)\, dB_t \\ X(0) = x_{0,} \end{cases} \tag{2.14}$$

est dite équation linéaire.

Lemme 2.4.1 *Soit l'équation différentielle ordinaire :*

$$\begin{cases} d\left(\varphi_t\right) = b\left(t\right)\varphi_t dt \\ \varphi_0 = 1, \end{cases}$$

La solution $\left(\varphi_t, t \in \mathbb{R}^+\right)$ *de l'équation ci-dessus est donnée par*

$$\varphi\left(t\right) = \exp\left(\int_0^t b\left(s\right)ds\right).$$

L'équation (2.14) admet une unique solution forte $\left(X_t\right)$ *donnée par*

$$X_t = \varphi_t X_0 + \int_0^t \frac{\varphi_t}{\varphi s}\sigma\left(s\right)dB_s, t \geq 0$$

Preuve.

$$f\left(t,x\right) = b\left(t\right)x \quad \text{et} \quad g\left(t,x\right) = \sigma\left(t\right)x$$

sont continues en (t,x) et lipschitziennes en x, donc (2.14) admet une solution. On écrit tout d'abord $X_t = \varphi_t y_t$ d'où on déduit que :
on a

$$\begin{aligned} dX_t &= b\left(t\right)X_t dt + \sigma\left(t\right)X_t dB_t \\ &= \varphi_t dy_t + dy_t + d\varphi_t + o, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} d\left(\varphi_t y_t\right) &= \varphi_t dy_t + y_t d\varphi_t + o \\ &= \varphi_t dy_t + y_t b\left(t\right)\varphi_t dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
dX_t &= b(t) X_t dt + \sigma_t dB_t \\
&= b(t) \varphi_t y_t dt + \sigma_t dB_t,
\end{aligned}$$

et comme on a

$$dX_t = d(\varphi_t y_t)$$

alors

$$\varphi_t dy_t = \sigma(t) dB_{t,}$$

$$dy_s = \frac{\sigma(s)}{\varphi_s} dB_t$$

$$y_s = x_0 + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\varphi_s} dB_s.$$

donc

$$X_t = \varphi_t x_0 + \int_0^t \frac{\varphi_t}{\varphi_s}(s) dB_s.$$

■

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques intégrale de Volterra

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la forme d'une équation intégral stochastique de Volterra et présenter le résultat d'existence et d'unicité de la solution par la méthode itérative de Picard.

3.1 Préliminaires

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ un espace de probabilité filtré complet, $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien de unidimensionnelle et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle augmentée de MB.

Définition 3.1.1 *L'équation intégrale stochastique de Volterra est donné sous la forme suivante :*

$$X_t = \psi(t) + \int_0^t (b, t, s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(t, s, X_s)\, dB_s, \forall t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

la forme différentielle comme suite :

$$dX_t = d\psi(t) + \int_0^t \frac{db}{dt}(t,s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{d\sigma}{dt}(t,s,X_s)\,dB_s \tag{3.2}$$
$$+ b(t,t,X_t)\,dt + \sigma(t,t,X_t)\,dB_t.$$

tel que :

1. *$\psi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté a trajectoire continu.*
2. *Le processus stochastique X_t est une solution de l'équation (3.2) s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté a trajectoire continu. $\forall t \in [0,T]$.*
3. *$b(t,s,x)$ et $\sigma(t,s,x)$ sont deux fonctions aléatoire définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$.*

3.1.1 Inégalités maximales

A partir de maintenant, on prend des hypothèses importantes dans tout en long de ce chapitre, données par :

Hypothèses

i) $\psi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et c.a.d la h.

ii) $b(t,s,x)$ et $\sigma(t,s,x)$ sont $\mathcal{F}_s-$mesurable pour tout $s \leq t$.

iii) $\exists M \in \mathbb{R} : |\sigma(t,s,x)| \leq M(1+|x|)\,.p.s.$

iv) $\exists M \in \mathbb{R} : |\sigma(t,s,x_1) - \sigma(t,s,x_2)| \leq M|x_1 - x_2|\,, p.s.$

v) $\exists M \in \mathbb{R} : |\sigma(t_1,s,x) - \sigma(t_2,s,x)| \leq M|t_1 - t_2|\,, p.s.$

Premièrement, il suffit d'étudéer le cas ou l'intégrale

$$I_1(t) = \int_0^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s, \forall t \in [0,T], \tag{3.3}$$

est bien définie.

Théorème 3.1.1 *Soit X_t un processus $\mathcal{F}_t-$adapté avec*

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left[X^2(t)\right] < \infty,$$

alors d'après les hypothèses précédentes on a :

$$E\left[\int_0^t |\sigma(t,s,X_s)|^2 ds\right] < \infty,$$

ainsi la transformation (3.3) est bien défini, il est mesurable d'après la définition 3.2.

Lemme 3.1.1 *Si*

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[X^4(t)\right] < \infty,$$

alors l'intégrale (3.3) a version continue.

Preuve. Soit $0 \leq s \leq t \leq T$ en utilisant une estimation des intégrales stochastique et les hypothèses $(\mathbf{iv})$ et $(\mathbf{v})$, on a

$$\begin{aligned} E\left[|I(t)-I(e)|^4\right] &= E\left[\left|\int_0^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s - \int_0^e \sigma(e,s,X_s)\,dB_s\right|^4\right] \\ &= E\left[\left|\int_0^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s - \int_0^e \sigma(e,s,X_s)\,dB_s\right.\right. \\ &\left.\left. + \int_e^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s\right|^4\right] \\ &= E\left[\left|\int_0^e \sigma(t,s,X_s) - \sigma(e,s,X_s)\,dB_s\right.\right. \\ &\left.\left. + \int_e^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s\right|^4\right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

on utilise la majoration

$$(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4,$$

puis passant a l'espérance, et on utilisons l'inégalité de B.D.G :

$$\begin{aligned}
E\left[|I(t)-I(e)|^4\right] &\leq 8E\left[\left|\int_0^e \sigma(t,s,X_s)-\sigma(e,s,X_s)\,dB_s\right|^4\right. \\
&\quad \left.+\left|\int_e^t \sigma(t,s,X_s)\,dB_s\right|^4\right], \\
&\leq 8\times 36E\left[\left|\int_0^e |\sigma(t,s,X_s)-\sigma(e,s,X_s)|^2\,ds\right|^2\right. \\
&\quad \left.+\left|\int_e^t |\sigma(t,s,X_s)|^2\,ds\right|^2\right],
\end{aligned}$$

aussi l'inégalité de Cauchy_Schwartz nous donne :

$$\begin{aligned}
E\left[|I(t)-I(e)|^4\right] &\leq 8\times 36E\left[e\int_0^e |\sigma(t,s,X_s)-\sigma(e,s,X_s)|^4\,ds\right. \\
&\quad \left.+(t-e)\int_e^t |\sigma(t,s,X_s)|^4\,ds\right],
\end{aligned}$$

on utilisé les hypothèses (**iii**) et (**v**) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
E\left[|I(t)-I(e)|^4\right] &\leq 8\times 36E\left[e\int_0^e M^4\,|t-e|^4\,ds\right. \\
&\quad \left.+(t-e)\int_e^t M^4\left(1+|Xs|^4\right)ds\right] \\
&\leq 8\times 36M^4E\left[e\int_0^e |t-e|^4\,ds\right. \\
&\quad \left.+8(t-e)\int_e^t \left(1+|X_s|^4\right)ds\right] \\
&\leq 8\times 36M^4(T^4+8(1+\sup_{0\leq s\leq T}E\left[X_s^4\right]))\,(t-e)^2 \\
&\leq k(1+\sup_{0\leq s\leq T}E\left[X_s^4\right]))\,(t-e)^2,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $I(t)$ a une version continue.

Désormais, la transformation intégrale $I(t)$ est toujours considérée comme une version continue, donc si $X_i(t), (i = 1, 2)$ satisfait

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left[X_i^4(t)\right] < \infty,$$

alors on prend :

$$J(t) = \int_0^t \sigma(t, s, X_1(s)) - \sigma(t, s, X_2(s))\, dB_s, \forall t \in [0, T].$$

On a donc le lemme suivant : ■

Lemme 3.1.2 *Si* $X_i(t), \forall i = 1, 2$ *verifies*

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[X_i^4(t)\right] < \infty,$$

alors

$$P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \sigma(t, s, X_1(s)) - \sigma(t, s, X_2(s))\, dB_s\right| \geq \lambda\right]$$

$$\leq \frac{M_0 T^2 C_2}{\lambda^4}$$

où $M_0 \in \mathbb{R}_+$ *et*
$C_1 = 288M^4\left(16T^2 \sup_{t\in[0,T]} E\left[\left|X_t^1 - X_t^2\right|^2\right] + \sup_{t\in[0,T]} E\left[\left|X_t^1 - X_t^2\right|^4\right]\right).$

Lemme 3.1.3 *Si* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *vérifient*

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[X^4(t)\right] < \infty, \ \ et \ \sup_{t\in[0,T]} E\left[Y^4(t)\right] < \infty,$$

alors

$$p\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T \sigma(t, s, Xs)\, dB_s\right| \geq \lambda\right) \geq \frac{M_0 T^2 C_2}{\lambda^4}$$

où $C_2 = 288M^4\left(T^4 + 8 + 8\sup_{s\in[0,T]} E\left[X^4(s)\right]\right).$

3.1.2 Existence et unicité des solutions

Cas lipschitzien

Théorème 3.1.2 *Supposons que $\sigma(t,s,x)$ satisfait les hypothèses* **i)** $-$ **v)** *et* $b(t,s,x)$ *satisfait les hypothèses* **i)** $-$ **iv)**. *Si $\psi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et continue avec*

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[\psi^4(t)\right] < \infty,$$

alors l'EISV(3.1) admet une unique solution. $X(t)$ satisfait

$$\sup_{t\in[0,T]} E\left[X^2(t)\right] < \infty.$$

Preuve. On démontre l'existence de la solution X_t, en utilisant la suite des approximations successives de Picard, on définit une suite comme suit :

$$\begin{cases} X_t^0 = \psi(t), \\ X_t^{n+1} = \psi(t) + \int_0^t b(t,s,X_s^n)\,ds + \int_0^t \sigma(t,s,X_s^n)\,dB_s, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} X_t^{n+1} - X_t^n = & \int_0^t \left(b(t,s,X_s^n) - b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right) ds \\ & + \int_0^t \left(\sigma(t,s,X_s^n) - \sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right) dB_s. \end{aligned} \tag{3.5}$$

D'aprés la majoration

$$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2 \leq & \, 2\left|\int_0^t \left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^2 \\ & +2\left|\int_0^t \left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

En passant par l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] \leq & \, 2E\left[\int_0^t \left|\left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^2\right] \\ & +2E\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right|^2\right],\end{aligned}$$

en utilisant l'isomètrie et l'inégalité de Cauchy Shwartz, on trouve :

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] \leq & \, 2E\left[\int_0^t \left|\left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^2\right] \\ & +2TE\left[\left|\int_0^t \left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^2\right],\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse $(\mathbf{iv})$, on donne :

$$\begin{aligned}E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] \leq & \, 2M^2E\left[\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\ & +2M^2TE\left[\int_0^t \left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds\right] \\ \leq & \, 2k\int_0^t E\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $k = 2(1+T) M^2$.

on utilise l'hypothèse (**v**) on obtient :

$$\begin{aligned}
E\left[\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2\right] &\leq E\left[\left|\int_0^t \sigma(t,s,\psi(s))\, dB_s + \int_0^t b(t,s,\psi(s))\, ds\right|^2\right] \\
&\leq 2M^2 E\left[\int_0^t |\sigma(t,s,\psi(s))|^2\, ds\right] \\
&+ 2M^2 T E\left[\int_0^t |b(t,s,\psi(s))|^2\, ds\right] \\
&\leq 2M^2 E\left[\int_0^t 2\left(1+|\psi(s)|^2\right) ds\right] \\
&+ 2M^2 T E\left[\int_0^t 2\left(1+|\psi(s)|^2\right) ds\right] \\
&\leq 2K \int_0^t E\left[\left(1+|\psi(s)|^2\right)\right] ds \\
&\leq 2k\alpha \int_0^t ds \\
&\leq 2k\alpha t, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

où

$$\alpha = \sup_{t\in[0,T]} E\left[1+\psi^2(t)\right] < \infty.$$

on utilise le résultat de (3.7), on trouve :

$$E\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq \frac{2\alpha (kt)^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (3.8)$$

Maintenant, on suit la même technique précédente pour majorer

$$E\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^4\right].$$

On commence par

$$(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4,$$

on trouve :

$$\begin{aligned} E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^4\right] &\leq 8E\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right|^4\right] \\ &+8E\left[\left|\int_0^t \left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^4\right]. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (BDG) :

$$\begin{aligned} E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^4\right] &\leq 8\times 36E\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)dB_s\right|^4\right] \\ &+8E\left[\left|\int_0^t \left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)ds\right|^4\right]. \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\begin{aligned} E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^4\right] &\leq 8\times 36E\left[t\int_0^t \left|\left(\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^4 ds\right] \\ &+8E\left[t^3\int_0^t \left|\left(b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right)\right|^4 ds\right], \end{aligned}$$

a l'aide de l'hypothèses (**v**), on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^4\right] &\leq 8\times 36E\left[t\int_0^t \left(M.\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|\right)^4 ds\right] \\ &+8E\left[t^3\int_0^t \left(M.\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|\right)^4 ds\right] \\ &\leq 8M^4T\left(36+T^2\right)\int_0^t E\left[\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|\right)^4 ds\right] \\ &\leq D\int_0^t E\left[\left(\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|\right)^4 ds\right]. \end{aligned}$$

où

$$D=8M^4T\left(36+T^2\right).$$

D'autre part, on utilise l'hypothèses (**iii**) et la même technique précedente pour obtient :

$$E\left[\left|X_1(t)-X_0(t)\right|^4\right] \leq 8D\mu_3 t,$$

où

$$\mu_3=\sup_{t\in[0,T]} E\left[1+\varphi^4(t)\right]<\infty.$$

En fin on déduit :

$$E\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^4\right] \leq 8D\mu_3\frac{(Dt)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.9}$$

Ainsi tout les X_t sont bien définis et de plus, ils sont des processus continues $\mathcal{F}_t-$adaptés grâce a la continuité de $\varphi(t)$.

En prenant maintenant le sup carrés de $(.)$,donc la majoration

$$(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2,$$

l'inégalité de Cauchy_Schwartz et l'hypothèse (**iv**) de la fonction b, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2 &\leq 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]ds\right|^2 \\
&+2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\sup_{t\in[0,T]} t\int_0^t\left|b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds \\
&+2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]dB_s\right|^2 \\
&\leq 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]dB_s\right|^2 \\
&+2TM^2\int_0^T\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2 ds.
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|>\lambda\right]\\
&\leq P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[b\left(t,s,X_s^n\right)-b\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]dB_s\right|^2>\frac{\lambda}{4}\right]\\
&+P\left[\int_0^T\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds>\frac{\lambda}{4TM^2}\right]
\end{aligned}\tag{3.10}$$

D'après le lemme, les intégrales (3.9) et (3.10) :

$$\begin{aligned}
&P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left[\sigma\left(t,s,X_s^n\right)-\sigma\left(t,s,X_s^{n-1}\right)\right]dB_s\right|^2>\frac{\lambda}{4}\right]\\
&\leq\frac{16M_0T^2288M^4}{\lambda^4}\left(16T^2E\sup_{t\in[0,T]}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2\right]\right.\\
&\left.+\sup_{t\in[0,T]}\left[\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^4\right]\right)\\
&\leq\frac{16M_0T^2288M^4}{\lambda^4}\left(\frac{16T^22\mu_1\left(kT\right)^n}{n!}+\frac{8\mu_4\left(DT\right)^n}{n!}\right).
\end{aligned}\tag{3.11}$$

L'application de l'inégalité de Tchebychev au terme :

$$P\left[\int_0^T\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds>\frac{\lambda}{4TM^2}\right]$$

avec (3.10) et (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}
P\left[\int_0^T\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds>\frac{\lambda}{4TM^2}\right]&\leq\frac{4TM^2}{\lambda}E\left[\int_0^T\left|X_s^n-X_s^{n-1}\right|^2ds\right]\\
&\leq\frac{4TM^2}{\lambda}\times2\mu_2\frac{\left(kT\right)^n}{n!}.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Prenant $\lambda=\frac{1}{4^n}$ et utilisant les résultats de (3.12), (3.11) et (3.10), on trouve :

$$P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|>2^{-n}\right]\leq\frac{C\left(16T\right)^n}{n!}+\frac{C\left(16DT\right)^n}{n!}+\frac{C\left(4kT\right)^n}{n!}\tag{3.13}$$

puisque le côté droit de l'inégalité (3.13) est un terme général d'une série convergente, on applique le lemme de Borel-Cantelli, on trouve :

$$P\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|>2^{-n}, n\to\infty\right]=0.$$

Alors les somme partielles suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(X_t^{k+1}-X_t^k\right)+\varphi\left(t\right)=X_n\left(t\right),$$

sont uniformément convergents sur $[0,T]$ avec probabilité égal 1. puisque tout les $X_n\left(t\right)$ sont $\mathcal{F}_t-$adaptés et continues. donc on peut indiquer que $X\left(t\right)$ est la limite uniforme de $X_n\left(t\right)$. On remarque que $X\left(t\right)$ vérifie l'équation (3.1), alors on a prouvé l'existence de la solution de l'équation (3.1).

Pour montrer l'unicité on suppose qu'il existe deux solutions pour l'équation (3.1), X_t et Y_t alors :

$$\begin{aligned}X_t-Y_t=&\int_0^t\left[b\left(t,s,X_s\right)-b\left(t,s,Y_s\right)\right]ds\\&+\int_0^t\left[\sigma\left(t,s,X_s\right)-\sigma\left(t,s,Y_s\right)\right]dB_s.\end{aligned}$$

On utilise la majoration

$$\left(a+b\right)^2\leq 2a^2+2b^2,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse (**v**) puis passant a l'espérance, on obtient :

$$
\begin{aligned}
E\left[|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 2E\left[\left|\int_0^t \left[\sigma(t,s,X_s) - \sigma(t,s,Y_s)\right] dB_s\right|^2\right] \\
&+ 2E\left[\left|\int_0^t \left[b(t,s,X_s) - b(t,s,Y_s)\right] ds\right|^2\right] \\
&\leq 2E\left[\left|\int_0^t \left[\sigma(t,s,X_s) - \sigma(t,s,Y_s)\right]^2 dB_s\right|\right] \\
&+ 2TE\left[\left|\int_0^t \left[b(t,s,X_s) - b(t,s,Y_s)\right]^2 ds\right|\right] \\
&\leq 2M^2 \int_0^t E\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds \\
&+ 2TM^2 \int_0^t E\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds,
\end{aligned}
$$

on applique l'inégalité de Gronwall, on trouve :

$$E\left[|X_t - Y_t|^2\right] = 0,$$

alors

$$P\left[|X_t = Y_t|\right] = 1, \forall t \in [0,T],$$

puisque $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux processus continues, on déduit que :

$$P\left[|X_t = Y_t|, \forall t \in [0,T]\right] = 1,$$

on conclue que X et Y sont indistinguables. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayer d'exposer les deux résultats d'existence et d'unicité de la solution l'un pour l'EDS et l'autre pour l'EIS de Volterra dans le cas lipschitzien, en utilisant la même méthode qu'est l'approximation de Picard. La déférence entre les deux travaux et que pour l'$EISV$, il a fallut prouver la continuité de la transformation intégrale de l'intégrale stochastique ainsi que quelque inégalités maximales pour avoir le résultat d'existence.

Bibliographie

[1] G. Adomian : Non linear stochastic systems theory and applications to physics, (Vol. 46). Springer Science, Business Media, 1988.

[2] P. C. Schmidt and C. W. Gardiner : Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983. 442 Seiten, Preis : DM 115, 1985.

[3] T. Mikosch : Elementary stochastic calculus with finance in view, World scientific, 1998.

[4] F. C. Klebaner : Introduction to stochastic calculus with applications, World Scientific Publishing Company, 2012.

[5] Lebed.B. Cours de mouvement brownien et calcule stochastique. université de Biskra.

[6] Jean-Christophe Breton, Calcul stochastique M2 Mathématiques, Université de Rennes 1 Octobre-décembre 2020

[7] I. Itô : On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type, Kodai Mathematical Journal, 2(2), p. 158-170, 1979.

[8] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. M. Ghaini and C. Cattani : A computational method for solving stochastic ItôVolterra integral equations based

on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions, Journal of Computational Physics, 270, 402-415, 2014.

[9] Aase. K, Oksendal. B, Privault.N and Uboe.J : White noise generalizations of the Clark-Haussmann- Ocone theorem with application to mathematical finance. Finance Stochast. 4 (2000),pages 465-496.

[10] Cochran.W.G, Lee.J-S, Potthoff.J ; 1995. Stochastic volterra equations with singular kernels. Stochastic Process. Appl. 56 (2),pages 337-349.

[11] Jean-Francois Le Gall. Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Spinger, Coll. Mathématiques et Applications, vol. 71, 2013.

[12] Philipp Protter. Stochastic integration and differential equations. Springer, 1995.

[13] Ciprian Tudor. Cours de calcul stochastique. Notes de cours M2 Mathématiques, Université Lille 1, 2011.

[14] Lin.J : Adapted solution of backward stochastic nonlinear Volterra integral equation. Stoch. Anal. Appl. 20 (2002),pp 165-183.

[15] Oksendal.B and Zhang.T : The stochastic Volterra equation. In D. Nulart, M. SanzSolé (eds) : Barcelona Seminar on Stochastic Analysis. Birkhauser 1993, pp.168-202.

[16] Oksendal.B and Zhang.T : Optimal control with partial information for stochastic Volterra equations. Intern. J. Stoch. Anal. 2010, doi :10.1115/2010/329185.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel enclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{d\times m}$	:	Ensemble des matrices réelles $d \times m$.
$\bar{\mathbb{R}}_+$	:	L'intervalle $[0, +\infty]$.
$P.p.s$	:	Presque sûrment pour la mesure de probabilité P.
$E\left(X/\mathcal{F}_t\right)$	:	Espérence conditionnelle de la variable aléatoire X par rapport a $\mathcal{F}_t$.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$EISV$	:	Equation intégrale stochastique de Volterra.
MB	:	Mouvement Brownien.
$v.a$	:	Variable aléatoire.
$i.e$	:	C'est-à-dire.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	:	Filtration naturelle.
ssi	:	Si et seulement si.
$E\left[X\right]$	:	Espérance mathématique du v.a X.
L^2	:	Espace de variable aléatoire.

Résumé

Le but de ce travail est de présenter la théorie des équations intégrales stochastiques de Volterra et leur corrélation avec les équations différentielles stochastiques. Nous avons présenté un théorème d'existence et d'unicité pour ce type d'équations dans le cas lipschitzienne en utilisant la méthode d'approximations successives de Picard.

Mots clés : intégrale stochastique, transformation intégrale de l'intégrale stochastique, équation différentielle stochastique, équation intégrale stochastique de Volterra.

Abstract

The aim of this work is to present the theory of Volterra's stochastic integral equations and their correlation with stochastic differential equations. We presented an existence and uniqueness theorem for this type of equations in the Lipschitz case using Picard's method of successive approximations.

Key words: stochastic integral, integral transformation of stochastic integral, stochastic differential equation, stochastic integral equation of Volterra.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تقديم نظرية معادلات فولتيرا التكاملية العشوائية وارتباطها بالمعادلات التفاضلية العشوائية. لقد قدمنا نظرية الوجود و وحدانية الحل لهذا النوع من المعادلات في حالة ليبشيتز باستخدام طريقة بيكارد للتقريبات المتعاقبة.

الكلمات المفتاحية: التكامل العشوائي، التحويل التكاملي للتكامل العشوائي، المعادلة التفاضلية العشوائية ، معادلة التكامل العشوائي لفولتيرا.