République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

MEHENNI Basma

Titre :

Sur Les Équations de La Chaleur

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	LAIADI Abdelkader	UMKB	Président
Dr.	GUIDAD Derradji	UMKB	Encadreur
Dr.	BENBRAIKA Souad	UMKB	Examinatrice

10 Juin 2024

Dédicace

Je dédie ce humble travail :

·À ma chère mère et à mon cher père,

·À mes chères sœurs et mes chers frères et toute la famille,

·À tous mes amis et collègues,

·À tous les professeurs du département de mathématiques,

·À toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de ce travail.

.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à remercie **"ALLAH"** le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la patience et la volonté pour réaliser ce travail.

La réalisation de ce travail n'aurait pas pu se faire sans l'appui de plusieurs personnes que

je tiens à remercier.

Je remercie mes parents car c'est grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie mon encadreur **Dr GUIDAD Derradji** qui m'a guidé dans mon projet et m'a aidé à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les **Dr LAIADI Abdelkader** et **BENBRAIKA Souad** qui ont accepté de présider les jurys de soutenance.

Sans oublier de remercier tous mes enseignants, de la primaire à l'université.

Enfin, je remercie toutes les personnes, amis, qui ont directement ou indirectement contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

La plupart des problèmes scientifiques et les phénomènes physiques sont formulés sous la forme d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles,

Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent un domaine important des mathématiques et de la physique, concernant les équations qui impliquent des dérivées partielles par rapport à plusieurs variables indépendantes. Elles sont utilisées pour modéliser une grande variété de phénomènes physiques, tels que la propagation des ondes, la diffusion de la chaleur, le mouvement des fluides, et bien d'autres.

L'équation de la chaleur est l'une des EDP les plus fondamentales. Elle décrit comment la température dans un milieu se propage au fil du temps en raison de la diffusion de la chaleur. Cette équation est souvent utilisée dans des domaines tels que la physique, l'ingénierie et les sciences appliquées pour comprendre et prédire le comportement thermique des systèmes.

L'histoire de l'équation de la chaleur remonte à l'Antiquité, avec des efforts pour comprendre la nature de la chaleur et sa propagation. Cependant, le développement mathématique significatif a commencé au cours du 18ème siècle avec des travaux de scientifiques comme Joseph Fourier. En 1822, Fourier a publié son ouvrage "Théorie analytique de la chaleur", où il a introduit la série de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur dans des cas particuliers. Cette avancée a ouvert la voie à une compréhension plus approfondie de la diffusion de la chaleur dans des matériaux différents.

La mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre contient quelques notions préliminaires et propriétés de base sur les équations aux dérivées partielles que nous utiliserons par la suite.

Le deuxième chapitre présente comment trouver les solutions de l'équation de la chaleur par la méthode de séparation des variables.

Le troisième chapitre est constitué de différents exemples pour lesquels nous cherchons les solutions en utilisant la méthode de séparation des variables.

Chapitre 1

Quelques définition et propriétés de base

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation reliant une fonction inconnue de plusieurs variables u à ses dérivées partielles. Les EDP se trouvent dans les applications de la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, etc. En effet, dans ces domaines, Les phénomènes se modélisent souvent par des systèmes mathématiques impliquant des EDP. Les différents processus du phénomène se décrivent en déterminant une relation entre u et ses dérivées partielles.

1.1 Concepts préliminaires

1.1.1 Équation aux dérivées partielles

Définition 1.1.1 *Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variables dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes* $(x_1, x_2, \ldots..$*ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles.*

Cette équation est ainsi de la forme :

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots\ldots\right) = 0 \tag{1.1}$$

où F est une fonction de plusieurs variables. Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le n-tuplet de variables indépendantes $(x_1, x_2, \ldots)$ comme appartenant à un domaine D convenable de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2 *Une solution de l'équation* (1.1) *est une fonction* $u = u(x_1, x_2, \ldots.)$ *des variables indépendantes* $x_1, x_2 \ldots.$*dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de* D *et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation* (1.1)*.*

Équation aux dérivées partielles de premier ordre

Définition 1.1.3 *Une équation aux dérivées partielles du* 1^{er} *ordre d'inconne* u *de deux variables indépendantes* x, y *est une équation de la forme :*

$$F\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où $(x, y) \in D$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Équation aux dérivées partielles de second ordre

Définition 1.1.4 *La forme générale d'une équation aux dérivées partielles du* $2^{éme}$ *ordre est :*

$$\mathrm{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

pour $(x, y) \in D$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1.1.2 Dimension et ordre d'une EDP

Définition 1.1.5 *La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u.*

Définition 1.1.6 *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.*

Exemple 1.1.1 $x\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 = \exp(x+y) \Longrightarrow$ *est de dimension* 2 *et d'ordre* 3.

1.1.3 Quelques équations de la physique mathématique

L'équation de transport : $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

L'équation de Burgers : $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

L'équation des ondes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$

L'équation de la chaleur : $\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0.$

L'équation de Laplace ou du potentiel : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

L'équation d'Euler-Bernoulli : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$

1.1.4 Résolution des EDP

Résoudre une EDP dans un domaine D de $\mathbb{R}^n$, c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans D, telle que la relation (1.1.4) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans D. Si les différentes solutions d'une EDP s'écrivent sous la même forme, cette forme est appelée solution générale de l'équation. Comme la solution générale d'une EDP implique des fonctions arbitraires.

Exemple 1.1.2 *On veut résoudre l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

D'abord, on pose $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, ce qui implique pour tout (x, y) que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ceci signifie que $v(x, y)$ est constante pour tout y fixé. Alors

$$v(x, y) = C(y)$$

où C est une fonction arbitraire de y. On se ramène à trouver u telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C(y)$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$u(x, y) = C(y)\, x + D(y)$$

où D est une fonction arbitraire.

1.2 Classification des équations aux dérivées partielles

Cette classification est illustrée dans le cas d'équation du seconde ordre.

On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **"linéaire"** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses déivées partielles est linéaire :

$$a\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c\,(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\,(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x}+e\,(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}+f\,(x,y)\,u+g\,(x,y)=0$$

L'équation est dit **"homogène"** si la fonction g est identiquement nulle sur D, dans le cas contraire elle est **"non-homogène"**.

Exemple 1.2.1 *L'EDP suivante :*

$$u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1 \tag{1.2}$$

L'équation (1.2) est une EDP linéaire non-homogène sur $\mathbb{R}^2$

On a

$$Lu=u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad f(x,y)=1$$

L : un opérateur linéaire soit α,$\beta \in \mathbb{R}$ et $u,v \in D$, alors

$$\begin{aligned}
L\,(\alpha u+\beta v) &= (\alpha u+\beta v)+y\frac{\partial^2\,(\alpha u+\beta v)}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2\,(\alpha u+\beta v)}{\partial y^2} \\
&= \alpha\left(u+y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta\left(v+y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&= \alpha L\,(u)+\beta L\,(v)
\end{aligned}$$

1.2.1 EDP linéaire d'ordre 1

Définition 1.2.1 *La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du premier ordre est :*

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=d(x,y)$$

où a,b,c et d sont des fonction.

Exemple 1.2.2 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$

Méthode paratique pour résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

soit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$F\left(x,y,z\right)\frac{\partial z}{\partial x}+G\left(x,y,z\right)\frac{\partial z}{\partial y}=H\left(x,y,z\right) \tag{1.3}$$

qui donne le système différentiel :

$$\frac{dx}{F\left(x,y,z\right)}=\frac{dy}{G\left(x,y,z\right)}=\frac{dz}{H\left(x,y,z\right)}$$

pour résoudre (1.3) on cherche deux intégrales premières u,v du ce système caractéristique.

Alors toute solution du problème posé est définie par :

$$F\left[u\left(x,y,z\right),v\left(x,y,z\right)\right]=0$$

on note qu'il faut au moins qu'une des deux fonction u,v déponde de z,F étant une fonction arbitraire.

Exemple 1.2.3 *Donner la solution générale de l'EDP du premier ordre.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = -z$$

ou en déduit le système différentiel :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{-z}$$

des deux premier rapports ou déduit l'intégrale premiere :

$$u(x,y,z) = 2x - y, \quad \left(\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} \Longrightarrow 2dx = dy \Longrightarrow 2x - y = k \text{ caractéristique}\right)$$

puis, par exemple, des rapports extrêmes l'intégrale premiere :

$$v(x,y,z) = z\exp(x), \quad \left(\begin{array}{c} \frac{dx}{1} = \frac{dz}{-z} \Longrightarrow -dx = \frac{dz}{z} \Longrightarrow -x = \ln\frac{z}{c} \\ \Longrightarrow \exp(-x) = \frac{z}{c} \Longrightarrow c = z\exp(x) \end{array}\right)$$

Donc la solution générale de l'équation envisagée sécrit :

$$F\left[(2x - y), z\exp(x)\right] = 0$$

F fonction arbitraire, ou aussi :

$$z\exp(x) = H(2x - y)$$

H fonction arbitraire, que l'on écrit encore

$$z = \exp(-x) H(2x - y).$$

1.2.2 EDP linéaire d'ordre 2

Définition 1.2.2 *Une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre avec n variables indépendantes est de la forme :*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d$$

ou a_{ij}, b_i, c et d sont des fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans cette section on va donner une **classification** des équation aux dérivées partielles linéaires du second ordre. A chaque type d'équation correspond un comportement différent des solution. Notre étude est restreinte au cas ou $n = 2$.

Ainsi les EDP que nous considérerons initialement seront de la forme suivante :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \tag{1.4}$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des fonction de x et de y qui ne s'annulent pas simultanément.

On définit le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1. L'équation (1.4) est dite hyperbolique au point $(x_0, y_0) \in D$ si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
2. L'équation (1.4) est dite parabolique au point $(x_0, y_0) \in D$ si et seulement si

$\Delta = b^2 - 4ac = 0.$

3. L'équation (1.4) est dite elliptique au point $(x_0, y_0) \in D$ si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

Exemple 1.2.4 *pour l'équation :*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.5}$$

on a

$$\Delta = b^2 - 4ac = xy^2(x-4)$$

$1-$ *Léquation* (1.5) *est parabolique dans*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\right\}$$

$2-$ *Léquation* (1.5) *est hyperbolique dans*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ et } y \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y \neq 0\right\}$$

$3-$ Léquation (1.5) est elliptique dans

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 4 \text{ et } y \neq 0\right\}$$

Courbes caractéristiques

Soient

$$\xi = \xi\,(x,y)\,, \quad \eta = \eta\,(x,y)$$

deux nouvelles variables qui sont des fonctions de x et y ayant au moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine D et telles que :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

En utilisant la règles des chaînes, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \\ \qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \\ \qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ \qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x \partial y}\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

substituant (1.6) dans l'équation (1.4), on obtient :

$$a_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_1 u = g_1 \tag{1.7}$$

où

$$\begin{cases} a_1 = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ b_1 = 2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ c_1 = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \\ d_1 = a\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + d\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + e\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \\ e_1 = a\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + e\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ f_1 = f, \text{ et } g_1 = g. \end{cases}$$

· Nous obtenons $\Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = J^2 \times \Delta, (\Delta = b^2 - 4ac)$. Ceci prouve que la classification des équations en EDP est invariante sous des changements de variables.

Formes canoniques

Type hyperbolique : Nous considérons le cas hyperbolique ($i.e\ \Delta = b^2 - 4ac > 0$ sur le domaine D), nous aurons deux coordonnées caractéristiques (ξ, η). Après ce changement de coordonnées, nous aurons une équation (1.7) pour laquelle $a_1 = c_1 = 0$ et nous obtenons après avoir divisé les deux côtés par $b_1 \neq 0$ une EDP de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + d_2 \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + e_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + f_2 u = g_2. \tag{1.8}$$

l'équation (1.8) est la première forme canonique d'une EDP hyperbolique sur un domaine D.

Type parabolique : Si notre EDP est parabolique sur le domaine D

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}.$$

Même en procédant comme pour le cas hyperbolique, nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y)$. Pour obtenir la seconde coordonnée caractéristique

$\eta(x, y)$, il suffit de prendre une fonction $\eta(x, y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine D telles que :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

On a $\Delta(x, y) = 0$ et $a_1 = 0$ donc $b = 2i\sqrt{ac}$ avec $i = \pm 1$

$$a_1 = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} b_1 &= 2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{a}\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\sqrt{c}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a}\frac{\partial \eta}{\partial x} + i\sqrt{c}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Donc après ce changement de coordonnées, l'équation (1.4) sera transformée en une EDP de la forme :

$$c_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_1 u = g_1$$

Après avoir divisé les deux côtés de l'équation (1.4) par $c_1 \neq 0$, nous obtenons la forme canonique d'une EDP parabolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + d_2\frac{\partial u}{\partial \xi} + e_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + f_2 u = g_2.$$

Type elliptique : Si l'équation (1.4) est elliptique sur le domaine D, alors ses deux équations caractéristiques sont à valeurs complexes et les solutions de ces équations sont conjuguées entre elles. Nous avons les courbes suivantes :

$$\xi_1(x,y) = c\xi_2(x,y) = c' \text{ et } \xi_2(x,y) = \overline{\xi_1(x,y)}$$

Si nous posons $\xi(x,y) = \xi_1(x,y)$ et $\eta(x,y) = \xi_2(x,y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles.

Les coordonnées caractéristiques dans le cas elliptique seront :

$$\alpha = \frac{\xi(x,y) + \eta(x,y)}{2} \text{ et } \beta = \frac{\xi(x,y) - \eta(x,y)}{2i}, \quad \text{où } i^2 = -1$$

Ceci signifie que α est la partie réelle de ξ et β est la partie imaginaire de ξ. Aprés ce changement de coordonnées, nous obtenons comme EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + d_4 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + e_4 \frac{\partial u}{\partial \beta} + f_4 u = g_4.$$

Cette équation est la forme canonique de l'équation elliptique.

Chapitre 2

Les équations de la chaleur

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, utilisée pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Elle a été introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier, à la suite d'expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température. Les séries trigonométriques, appelées séries de Fourier, et les transformées de Fourier ont permis une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique. Ces avancées ont également entraîné d'importants travaux mathématiques pour les rendre rigoureux, constituant ainsi une véritable révolution à la fois physique et mathématique sur plus d'un siècle.

Nous examinons une équation aux dérivées partielles linéaire de second ordre, de type parabolique

$$u_t(x,t) - k\Delta u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = 0$$

pour u définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$ et $k > 0$

L'équation de la chaleur est une représentation mathématique des processus évolutifs tels que la diffusion de la chaleur.

2.1 Formulations mathématiques

2.1.1 Équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes :

La forme cartésienne de l'équation de la chaleur s'exprime comme suit :

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} + S$$

Δ étant Laplacien, α la diffusivité, et S est un termé lié a la source de chaleur extérieur.

2.1.2 Équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

La forme cylindriques de l'équation de la chaleur s'exprime comme suit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + S = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

T représente la fonction de température dépendant des variables sphériques (r, θ, z)

2.1.3 Équation de la chaleur en coordonnées Sphériques :

En coordonnées Sphériques, l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + S = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

k, ρ, et c_p sont respectivement la conductivité, la masse volumique, et la chaleur spécifique de la matière étudiées.

2.2 Méthode de résolution de l'équation de la chaleur

2.2.1 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables, également connue sous le nom de méthode de Fourier, est largement utilisée pour résoudre les problèmes aux limites relatifs aux EDP. Elle consiste à chercher des solutions particulières de la forme séparable $u(x, y) = X(x)Y(y)$, où X et Y sont des fonctions. Dans de nombreux cas, l'EDP se réduit à deux équations différentielles ordinaires pour X et Y. Ainsi, on obtient des problèmes aux limites impliquent des EDO. Cependant, la question de la séparabilité d'une EDP en deux équations différentielles ordinaires ou plus n'est pas toujours possible. Dans ce chapitre, nous allons appliquer cette méthode à des problèmes aux limites relatifs aux EDP linéaires.

Situation du problème

On décrit maintenant la méthode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des EDP de second ordre de deux variables indépendantes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnue $u(x, t)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a, b], -\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))\, u(x, t) = h(x, t), (x, t) \in I \times J \\ u(x, 0) = f(x), x \in I \text{ conditions initiale.} \\ \text{où } a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, h(x, t), f(x) \text{ sont des fonctions données.} \end{cases} \tag{2.1}$$

·**Conditions aux limites :** On distingue différents types de conditions aux limites

$(C.L)$

- **Conditions de Dirichlet** : u est fixée sur le bord de I, $u(a,t) = u(b,t) = 0$.
- **Conditions de Neumann** :

  La dérivée normale de u est fixé sur $I, u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0.u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$.
- **Conditions de Robin ou mixtes** : $c_1(x)u(a,t) + c_2(x)u_x(b,t) = 0$.
- **Conditions périodiques :** $u(a,t) = u(b,t)$ et $u_x(a,t) = u_x(b,t)$.

Rapportons les principales étapes de cette méthode.

1. On recherche les solutions séparées de (2.1). Ces solutions sont de la forme spéciale $u(x,t) = X(x)T(t)$ et satisfont les condition aux limites et la condition initiale. Il se trouve que X et T doivent être des solutions des problèmes aux limites linéaires (p_1) et (p_2) relatives aux X et T, respectivement.
2. On résout les problèmes (p_1) et (p_2), les solutions de (p_1) nous permettent de construire une base hilbertienne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On désigne par $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$. les solutions de (P_2) .
3. On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées.
4. Dans la dernière étape, on calcule les coefficients de cette série et étudie sa convergence.

Principe de superposition : Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.

Application :

Équation de la chaleur ;

Considérons le problème sur l'intervalle, $[0, L]$ avec $L > 0$, constitué de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L]\,, \quad t > 0 \tag{2.2}$$

Les conditions aux limites de type Dirichlet :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \geq 0 \tag{2.3}$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \tag{2.4}$$

où f est une fonction donnés et k est une constante positive.

Ce problème modélise la conduction thermique dans un tige de longueur L.

La chaleur est supposée nulle aux deux extrémités du tige et égale à $f(x)$ à l'instant $t = 0$. les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{aligned} f(0) = u(0, 0) = u(L, t) = 0 \\ f(L) = u(L, 0) = u(L, 0) = 0 \end{aligned}$$

Ces deux conditions s'appellent les condutions de compatibilité.

Etape 1 : On commence à chercher des solution (2.2) sous la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{2.5}$$

qui satisfont les conditions (2.3) où X et Y sont des fonction de x et t, respectivement. Dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (2.4) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x, t) = 0$. On cherche donc des fonctions X et Y

qui né s'annulent pas identiquement.

Par différentiation de (2.5) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (2.2), on obtient

$$XT'(t) = KX''(x)T(t),\ x \in [0, L], t > 0$$

on peut écrire

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)},\ x \in [0, L], t > 0$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, x \in [0, L] \quad , t > 0 \tag{2.6}$$

comme on cherche des solutions né s'annulest pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$, conséquennent, on obtient

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X(0)T(t_0) = 0 \\ u(L, t_0) = X(L)T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

L'équation (2.6) conduit au système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda X = 0, x \in [0, L], \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

et

$$\frac{dT}{dt} + \lambda kT = 0, t > 0, \tag{2.8}$$

où λ est une constante.

Etape 2 : On commence d'abord à résoudre le système (2.7). Une solution non triviale de (2.7) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ. On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors :

$$X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0. \end{cases}$$

De la première équation, ona $\alpha = -\beta$. La seconde équation implique donc $\alpha e^{-\mu l} = \alpha e^{\mu l}$, alors si $\alpha \neq 0$ on obtient $e^{2\mu L} = 1$. Ceci n'est pas possible cas μ et L sont différents de 0 et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X = 0$ et $u(x,t) = 0$ por tout $0 \leq x \leq L$ et $t > 0$.

On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.

Cas 2 : si $\lambda = 0$, on obtient :

$$X(x) = \alpha + \beta x$$

où α, β sont des réels orbitraires. Les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta L = 0 \end{cases}$$

comme $L \neq 0$, il est claire que $\alpha = \beta = 0$, Alors, dans ce car$\theta\theta$ $X = 0$ et $u(x,t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$, On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 3 : si $\lambda = \mu^2 > 0$, on obtient

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$$

où α, β sont des réels orbitraires. les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta \sin(\mu l) & = 0 \end{cases}$$

Pour éviter la solution triviale $X = 0$, on suppose que $\beta \neq 0$. Ceci implique que $\sin(\mu L) = 0$.

Conséquemment

$$\mu L = n\pi, \lambda = (n\pi/L)^2, n \in \mathbb{Z}$$

Il en résulte que

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

sont les valeurs propres et les fonctions

$$X_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sont les fonctions caractéristiques du problème (2.7). Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ il suffit donc de considérer

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ X_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$$

Il reste maintenant à résoudre le problème (2.8), sa solution est donnée par

$$T(t) = y_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, n \in \mathbb{N}^*$$

A la fin de cette étap, on peut considérer qu'on a bien construit une base hilbertienne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Etape 3 : On utilise le principe de superpositions générale pour générer à partir de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées. On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées.

$$u_n(x,t) = \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}, n \in \mathbb{N}^*$$

Par le principe de superposition implique que tout combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirchlet.

Considérons maintenant la condition initiale. Supposons qu'il ait la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Cést-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres.

Ensuite , une solution au problème de chaleur (2.2)-(2.4) est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

L'idée brillante de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (2.3) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$.En d'autres termes, il est possible de trouves des constantes ξ_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Une telle série est appelée une série (ou extension) de Fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et ξ_n, $n = 1, 2....$sont appelés coefficients de Fourier (généralisée) de la série. Danc ce cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

est une solution généralisée de problème $(2.2) - (2.4)$.

On explique maintenant comment représenter une fonction ≪arbitraire≫ f sous la forme d'une série de Fourier. En d'autres termes, comment calculer les coefficients ξ_n.

Remarquons

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \int_0^L \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{L}{2}, m = n \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\xi_n = \frac{\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi x}{L}) dx} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx.$$

On obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \\ \text{où, } \xi_n = \frac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x)\, dx. \end{cases}$$

2.2.2 Équation de la chaleur en un dimension

On va maintenant résoudre le problème de diffusion de la température.

Soit une tige homogène de longueur ℓ suffisamment mince de façon à ce que la chaleur soit distribuée également pour toute section transversale. La surface de cette dernière est isolée. Il n'ya donc aucune perte de chaleur à travers la surface de la tige. Si nous notons par $u(x,t)$, la température dans la tige au temps t au point x. alors $u = u(x,t)$ satisfait l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où c est une constante > 0. Précisément nous avons que $c^2 = \frac{k\sigma}{\rho}$ où k est la conductivité thermique, σ est la chaleur spécifique et ρ est la densité. nous avons le problème d'EDP suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } u = u(x,t) \tag{2.9}$$

pour lequel les conditions à la frontiére sont

$$u(0,t) = 0 \text{ et } u(\ell,t) = 0 \quad , t \geq 0 \tag{2.10}$$

et la condition initiale est

$$u(x,0) = f(x) \ \ ,0 \leq x \leq \ell \tag{2.11}$$

On s'intéresse à chercher une solution élémentaire du problème (2.9) , (2.10) , sous la forme à variables séparée :

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

dans l'équation (2.9), nous obtenons

$$X(x)\,T'(t) = c^2 X''(x)\,T(t)$$

donc

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

Le terme de gauche de cette équation est une fonction de x seulement, alors que le terme de droite est une fonction de t seulement. Pour que nous puissions avoir cette égalité, il faut donc que chacun de ces termes soit constant et nous noterons cette constante par λ.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{et} \quad T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0.$$

Et on obtenu deux équation à variable séparées.

La première équation

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $X(x)$avec les conditions aux limites, soit

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell)$$

$$\text{avec } X(0) = X(\ell) = 0$$

Si $\lambda \geq 0$, alors

$$X = 0 \text{ et } u\left(x,t\right) = 0 \text{ pour tout } 0 \leq x \leq \ell \text{ et } t \geq 0.$$

Nous pouvons exclure ces valeurs et ne considérer que le cas où $\lambda = -v^2 < 0$.

Si $\lambda = -v^2 < 0$, alors

$$X\left(x\right) = A\cos\left(vx\right) + B\sin\left(vx\right)$$

$$X\left(0\right) = 0 \Longrightarrow A = 0$$

$$X\left(\ell\right) = 0 \Longrightarrow B\sin\left(v\ell\right) = 0$$

$\Longrightarrow B \neq 0$ on bien $\sin\left(v\ell\right) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, n \in \mathbb{Z}$

Les valeurs $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ sont les valeurs propres et les fonctions $B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ il suffit donc de considérer les valeurs propres λ_n et les fonction caractéristiques X_n pour $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

La deuxième équation

$$T'\left(t\right) - \lambda_n c^2 T\left(t\right) = 0$$

nous pouvons résoudre celle-ci par séparation de variables

$$\frac{dT}{dt} = \lambda_n c^2 T\left(t\right) \Longrightarrow \frac{1}{T}dT = \lambda_n c^2 dt \Longrightarrow \int \frac{1}{T}dT = \int \lambda_n c^2 dt \Longrightarrow \ln\left(\left|T\right|\right) = \lambda_n c^2 t + k$$

où k est une constante. Ainsi nous obtenons que

$$T_n(t) = C_n \exp\left(\lambda_n c^2 t\right) = C_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

où C_n est un nombre réel quelconque, est la solution générale de l'équation

Nous obtenons de ce qui précède que

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

est une solution du problème intermédiaire $(2.9), (2.10)$

Nous avons remplacé λ_n par sa valeur $-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ et B_nC_n par a_n. Comme l'équation est linéaire et homogène et que les conditions aux extrémités sont aussi gomogènes, nous pouvons utiliser le principe de superposition et obtenire que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

est aussi une solution du problème $(2.9), (2.10)$.

Rappelons de nouveau que nous abusons ici du principe de superposition puisque nous sommons non pas sur un nombre fini de termes, mais sur un nombre infini de termes.

Si nous revenons à notre problème $(2.9), (2.10), (2.11)$, alors

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right]$$

est une solution de ce problème si

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = f(x)$$

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \text{ est la série de Fourie impaire de } f(x).$$

Dans ce qui précède, nous avons fait sans les énoncer des hypothèses sur la convergence de certaines séries. De ce fait, tout ce que nous avons obtenu jusqu' à maintenant, ce n'est qu'une solution formelle :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right] \text{ avec } a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad , n \geq 1 \tag{2.12}$$

au problème de la chaleur $(2.9), (2.10), (2.11)$.

Considérons pour déterminer la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{où } u = u(x,t), \ x \in [0,\pi] \ , t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), \ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Parce qui précède, la solution sera

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \exp\left(-n^2 t\right)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\, dx = 4\frac{\left((-1)^{n+1} + 1\right)}{\pi n^3} \quad \text{en intégrant par partie}$$

Donc la solution est

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^{n+1} + 1\right)}{\pi n^3} \sin(n\pi) \exp\left(-n^2 t\right)$$

Chapitre 3

Quelques exemples d'équations de la chaleur

Exemple 1 On considère le problème aux limites suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,t) = 10,\ u(3,t) = 40,\ u(x,0) = 25,\ |u(x,t)| < M$$

$a)$ Montrer, en prenant $u(x,t) = v(x,t) + \Psi(x)$ où $\Psi(x)$ sera une fonction à déterminer, qu'on a :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\Psi''(x), v(0,t) + \Psi(0) = 10, v(3,t) + \Psi(3) = 40, v(x,0) + \Psi(x) = 25, |v(x,t)| < M$$

$b)$ En choisissant $\Psi''(x) = 0, \Psi(0) = 10$ et $\Psi(3) = 40$, montrer que $\Psi(x) = 10x + 10$ et le problème devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, v(0,t) = 0, v(3,t) = 0, v(x,0) = 15 - 10x, |v(x,t)| < M$$

$c)$ Résoudre ce problème par la méthode de séparation de variables.

solution a) En utilisant la substitution proposée $u(x,t) = v(x,t) + \Psi(x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \Psi'(x)\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Psi''(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + 0$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= 2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Psi''(x)\right] = \frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\Psi''(x) \\ u(0,t) &= 10 = v(0,t) + \Psi(0) \\ u(3,t) &= 40 = v(3,t) + \Psi(3) \\ u(x,0) &= 25 = v(x,0) + \Psi(x)\end{aligned}$$

b)

$$\Psi''(x) = 0 \Longrightarrow \Psi'(x) = A \Longrightarrow \Psi(x) = Ax + B$$

On a :

$$\Psi(0) = 10 \Longrightarrow \Psi(0) = A(0) + B = 10 \Longrightarrow B = 10$$

$$\Psi(3) = 40 \Longrightarrow \Psi(3) = A(3) + 10 = 40 \Longrightarrow 3A + 10 = 40 \Longrightarrow 3A = 30 \Longrightarrow A = 10$$

Donc :

$$\Psi(x) = 10x + 10$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\Psi''(x) \\ v(0,t) + \Psi(0) = 10, v(3,t) + \Psi(3) = 40 \\ v(x,0) + \Psi(x) = 25 \\ |v(x,t)| < M \end{cases}$$

doncle problème de devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\Psi''(0) = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) + \Psi(0) = v(0,t) + 10 = 10 \Longrightarrow v(0,t) = 0 \\ v(3,t) + \Psi(3) = v(3,t) + \Psi(3) = 40 \Longrightarrow v(3,t) = 0 \\ v(x,0) + 10x + 10 = 25 \Longrightarrow v(x,0) = 15 - 10x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(3,t) = 0 \\ v(x,0) = 15 - 10x \end{cases}$$

c) Nous avons

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right] \text{ avec } a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad , n \geq 1$$

Il reste dons à calculer les coefficients a_n.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{3}\int_0^3 (15-10x)\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\ dx\ ,\ n\geq 1\\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 15\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) - \frac{2}{3}\int_0^3 10x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\\
&= \frac{30}{3}\int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx - \frac{20}{3}\int_0^3 x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx\\
&= \frac{30}{3}\underbrace{\int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)}dx - \frac{20}{3}\underbrace{\int_0^3 x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx}
\end{aligned}
$$

donc en utilisant intégral par partie

$$
i = \int_0^3 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx \Longrightarrow -\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^3 = -\frac{3}{n\pi}\left[\cos(n\pi)-1\right]
$$

$$
ii = \int_0^3 x\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx \Longrightarrow \begin{cases} x \longrightarrow 1 \\ \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \longrightarrow -\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
ii &= -\frac{3x}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx = -\frac{9}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{9}{(n\pi)^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\Big|_0^3\\
&= -\frac{9}{n\pi}\cos(n\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 10\left(-\frac{3}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right)\right) - \frac{20}{3}\left(-\frac{9}{n\pi}\cos(n\pi)\right)\\
&= -\frac{30}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right) + \frac{60}{n\pi}\cos(n\pi)\\
&= \left(\frac{60}{n\pi}-\frac{30}{n\pi}\right)\cos(n\pi) + \frac{30}{n\pi} = \frac{30}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{30}{n\pi}\\
&= \frac{30}{n\pi}\left(\cos(n\pi)+1\right) = \frac{30}{n\pi}\left((-1)^n+1\right) = \gamma
\end{aligned}
$$

Alors la solution générale

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 2}{9}t\right]$$

$$u\left(x,t\right)=\gamma+10x+10$$

Exemple 2 a) Montrer que l'équation de la chaleur (en trois dimensions)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.1}$$

est égale en coordonnées sphériques : $x=r\sin\left(\phi\right)\cos\left(\theta\right),y=r\sin\left(\phi\right)\sin\left(\theta\right),z=r\cos\left(\phi\right)$ à

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\cot\left(\phi\right)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}+\frac{1}{r^2\sin^2\left(\phi\right)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

b) Si la surface d'une sphère solide homogène de rayon R est gardée à température constante $0°C$, si la température initiale dans la sphère est indépendante de θ et de ϕ est donnée par $u\left(r,0\right)=f\left(r\right)$, alors montrer que les solution $u\left(r,t\right)$ de l'équation (3.1) indépendantes de ϕ et de θ sont des solution du problème :

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\ u\left(R,t\right)=0,\quad \forall t\geq 0\\ u\left(r,0\right)=f\left(r\right),\ \forall r\in\left[0,R\right]\end{cases} \tag{3.2}$$

c) En supposant que $u\left(r,t\right)$ est une fonction bornée et en posant $v\left(r,t\right)=ru\left(r,t\right)$ dans le problème (3.2), montrer que nous obtenons le nouveau problème

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ v(R,t) = v(0,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ v(r,0) = rf(r), \ \forall r \in [0,R]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Déterminer la solution formelle $u(r,t)$ du problème (3.2) en obtenant premièrement la solution formelle $v(r,t)$ de (3.3) au moyen de la méthode de séparation de variables.

Solution : a) Nous avons que

Méthode 1 :

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \text{ et } \quad \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$$

Conséquemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{x^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{2x^2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\ & - \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\ & + \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2z(x^2+y^2+z^2) - 2x^2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{y^2 z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &+ \frac{2xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{2y^2 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \\ &+ \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{(x^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &- \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2 z(x^2+y^2+z^2) - 2y^2 z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\ &+ \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} \\ &+ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Parce que $x^2+y^2+z^2 = r^2$ et $x^2+y^2 = r^2\sin^2(\phi)$, nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

Alors l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques est

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

Méthode 2 :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\cot(\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}+\frac{1}{r^2\sin^2(\phi)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta}\right)$$

$$x=r\sin\phi\cos\theta \quad ,y=r\sin\phi\sin\theta \quad ,z=r\cos\phi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ )+\frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ )\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right]\\
&+ \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right]\\
&+ \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\sin\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial z}(\cos\phi)\right]\\
&= \sin^2\phi\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (\sin\phi\cos\theta\ \ \cos\phi)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\\
&+ \sin^2\phi\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\phi\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin\phi\sin\theta\cos\phi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\
&+ \cos\phi\sin\phi\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos\phi\sin\phi\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\
&= \sin^2\phi\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\phi\cos\phi\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\\
&+ \sin^2\phi\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sin\phi\cos\phi\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\phi\cos\theta\ ) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\phi\sin\theta) - \frac{\partial u}{\partial z}r\sin\phi$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left[\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\phi\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\phi\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial z}r\sin\phi\right]\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi\cos\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}r^2\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta\\
&- 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}r^2\cos\phi\cos\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}(-r\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\phi\sin^2\theta\\
&- 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}r^2\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial z}(-r\cos\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}r^2\sin^2\phi
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\phi\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\sin\phi\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\phi\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\phi\cos\theta\right] \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\phi\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\sin^2\phi\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} r^2\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta \\ &- \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\phi\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\sin^2\phi\cos^2\theta\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\phi\cos^2\theta + 2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\phi\cos\phi\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\ +\sin^2\phi\sin^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \cos^2\phi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{r}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} \\ +\frac{2}{r}\sin\phi\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r}\sin\phi\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2\phi\cos^2\theta\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ +2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\phi\cos\theta\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{r}\sin\phi\sin\theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\phi\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\phi\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\phi \\ +\frac{1}{r}\frac{\cos^2\phi\cos\theta}{\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\cos^2\phi\sin\theta}{\sin\phi}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos\theta}{\sin\phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\phi \\ -2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\sin\theta}{\sin\phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\phi \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2\phi\sin^2\theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta + 2\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right) \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\left(2\sin\phi\cos\phi\cos\theta - 2\cos\phi\cos\phi\sin\phi\right) \\ +\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(2\sin\phi\cos\phi\sin\theta - 2\cos\phi\sin\theta\sin\phi\right) \\ +\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\sin\phi\cos\theta + \frac{\cos\theta\left(\cos^2\phi-1\right)}{\sin\phi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\sin\phi\sin\theta + \frac{\sin\theta\left(\cos^2\phi-1\right)}{\sin\phi}\right) \end{array}\right)$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

b) Dans ce cas, $u(r, \theta, \phi, t)$ est indépendant de θ et ϕ. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Conséquemment l'équation de la chaleur se simplifie à la nouvelle équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

De plus nous avons les conditions $u(R, t) = 0$, $t \geq 0$ et $u(r, 0) = f(r)$, $r \in [0, R]$.

c) Nous devons donc résoudre le problème de (3.2), et u est une fonction bornée

si nous utilisons la nouvelle fonction v définie par $v = ru$, alors $u = r^{-1}v$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r^{-1}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -r^{-2}v + r^{-1}\frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2r^{-3}v - 2r^{-2}\frac{\partial v}{\partial r} + r^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

En substituant dans l'EDP de (3.2), nous obtenons

$$r^{-1}\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \left(r^{-1}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2r^{-2}\frac{\partial v}{\partial r} + 2r^{-3}v + 2r^{-2}\frac{\partial v}{\partial r} - 2r^{-3}v \right) .$$

Après simplification, nous obtenons le problème (3.3) à résoudre

Cette dernière condition vient du fait que la fonction u est bornée.

Nous allons maintenant résoudre le problème (3.3) par la méthode de séparation de variables. Pour ce faire, nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \text{ avec les conditions} \\ v(R,t) = v(0,t) = 0 \quad , t \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Posons $v(r,t) = F(r)G(t)$. Alors en substituant dans l'équation de la chaleur et en divisant ensuite par les deux côtés de l'équation par c^2FG, nous obtenons

$$FG' = c^2GF'' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F} \text{ où } G' = \frac{dG}{dt} \text{ et } F'' = \frac{d^2F}{dr^2}.$$

Le côté droit de cette dernière équation est une fonction de r, alors que le côté gauche est une fonction de t. Pour que ceci soit possible, il faut que chacune de ces expressions soient une constante. Donc

$$\frac{1}{c^2}\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F} = \lambda \text{ où est une constante .}$$

Nous devons aussi tenir compte des conditions du problème. Nous obtenons ainsi

$$v(R,t) = 0 \quad \Rightarrow F(R)G(t) = 0, \forall\, t \geq 0 \quad \Rightarrow F(R) = 0 \text{ et}$$
$$v(0,t) = 0 \quad \Rightarrow F(0)G(t) = 0, \forall\, t \geq 0 \quad \Rightarrow F(0) = 0.$$

En résumé, nous devons déterminer les fonction $F(r)$ et $G(t)$ telles que

$$\frac{d^2F}{dr^2} - \lambda F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dG}{dt} - c^2\lambda G = 0 \text{ avec } F(0) = F(R) = 0.$$

Si $\lambda > 0$, disons $\lambda = v^2$ avec $v > 0$, alors la solution générale de $F'' - \lambda F = 0$ est $F(r) = Ae^{vr} + Be^{-vr}$.

Parce que $v > 0$, $R > 0$, $F(0) = A + B = 0$ et $F(R) = Ae^{vR} + Be^{-vR} = 0$, nous obtenons $A = B = 0$. Il nous faut donc exclure le cas $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de $F'' = 0$ est $F(r) = A + Br$. Parce que $F(0) = A = 0$ et $F(R) = A + BR = 0$, nous obtenons que $A = B = 0$. La aussi nous devons exclure le cas $\lambda = 0$. ll nous reste à considérer le cas $\lambda < 0$, disons $\lambda = -v^2$ avec $v > 0$, alors la solution générale de $F'' - \lambda F = 0$ est $F(r) = A\cos(vr) + B\sin(vr)$. Parce que $F(0) = A = 0$ et $F(R) = A\cos(vR) + B\sin(vR) = 0$, alors $A = 0$ et $B\sin(vR) = 0$. Comme nous cherchons à déterminer des solutions non-triviales et que $A = 0$, nous pouvons supposer que $B \neq 0$. Ainsi $\sin(vR) = 0$. Conséquemment $v = n\pi/R$ et $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/R)^2$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, De plus pour ce $\lambda = \lambda_n, F(r) = B_n \sin(n\pi r/R)$. Nous pouvons aussi déterminer la solution générale de $G' - c^2\lambda G = 0$ lorsque $\lambda = \lambda_n$. Nous obtenons que $G(t) = D_n \exp\left(-(cn\pi/R)^2 t\right)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$v_n(r,t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right) \quad \text{est une solution du problème } (3.4) .$$

Conséquemment

$$u_n(r,t) = a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right)$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) & \text{avec les condition} \\ u(R,t) = 0 \quad, t \geq 0 \qquad \text{et} & u \text{ est une fonction bornée .} \end{cases} \tag{3.5}$$

Comme cette dernière équation est linéaire, nous pouvons additionner ces solution. Nous obtenons ainsi que

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^2 t\right)$$

est une solution formelle du problème (3.5) , Si maintenant nous ajoutons la condition

$$u\left(r,0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}r^{-1}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)=f\left(r\right)\ \ ,$$

nous obtenons que

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)$$

est la série de Fourier impaire de la fonction $r\ f\left(r\right)$. Ainsi

$$a_{n}=\frac{2}{R}\int_{0}^{R}rf\left(r\right)\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)dr.$$

En conclusion, la solution formelle du problème est

$$u\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}r^{-1}\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)\exp\left(-\left[\frac{cn\pi}{R}\right]^{2}t\right)\quad\text{avec}\ \ a_{n}=\frac{2}{R}\int_{0}^{R}rf\left(r\right)\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)dr.$$

Bibliographie

[1] Baddari, K., & Abbassov, A. (2009). Equations de la physique mathématique appliquées.

[2] Bezard, M. (1996). Equations aux dérivées partielles. Ecole nationale supérieure des techniques avancées.

[3] David, C., & Gosselet, P. (2012). Équations aux dérivées partielles. Edition Dunod.

[4] GUIDAD, D. (2022), cour Équations de la physique mathématique. Université Biskra, Algérie.

[5] KELLECHE, A. (2020). Équations de la physique mathématique. Université Djilali Bounâama, Khemis Miliana, Ain defla, Algérie.

[6] Lesfari, A. (2015). Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles : cours et exercices corrigés. Ellipses, Paris.

[7] Mergui, S. (2010). Transferts thermiques. Licence de mécanique 2éme année. Module 2A101. Université de Sorbonne.

[8] Sabit, S. Notions sur les équation aux dérivées patilles de lUniversité du Ibn Khaldoun, Tiaret.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

EDP	:	Équation aux dérivées partielles
D	:	Désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$
t	:	temps a dimensionnel
$\frac{\partial}{\partial t}$	:	Dérivées partielle
Δ	:	Le discriminant
T	:	température $[^\circ K]$
L	:	longeur
C_p	:	Coefficient calorifique

Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est de trouver des solutions à l'équation de la chaleur par la méthode de séparation des variables.

Mots clés :

L’equation de la chaleur -- séparation de variables.

Abstract :

The main objective of this memory is to find solutions to the heat equation using the method of separation of variables.

Key words :

Heat equation –separation of variables.

الملخص :

الهدف الرئيسي من هذا المذكرة هو إيجاد حلول لمعادلة الحرارة بطريقة فصل المتغيرات.

الكلمات المفتاحية:

معادلات الحرارة -- فصل المتغيرات