République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES

de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par :

Douba Oumhani

Titre :

Équations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien

Devant le Jury :

Mr.	Khalfallah Nabil	Pr.	U. Biskra	Président
Mme.	Bougherara Saliha	Dr.	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Gatt Rafika	Dr.	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 10/06/2024.

Dédicace

Avec la grâce et la générosité de Dieu, et avec l'amour de la famille et des proches, ainsi qu'avec le soutien des amis et de la chère enseignante, cette aventure éducative a été couronnée de succès.

Merci à mon cher père ***Hani*** *qui a sacrifié tout ce qu'il avait pour moi, et à ma chère mère* ***Fatima*** *qui m'a soutenu par ses prières qui ont été un stimulant pour le succès.*

Merci à mes frères et sœurs qui ont toujours été à mes côtés avec amour et soutien.

Et merci à ma chère enseignante et tutrice, Madame ***Bougherara Saliha****, qui a été un pilier pour moi tout au long de cette période par ses conseils et son encouragement.*

Je remercie également mes amis qui m'ont soutenu, que ce soit de près ou de loin."

Remerciements

Je tiens à remercier ma mère et mon père qui m'ont soutenue moralement et financièrement.

Je tiens à remercier **Dr. Bougherara Saliha** pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Pour son bon traitement, elle m'a traitée comme une mère traite sa fille. C'est ce qui m'a incitée à m'efforcer davantage. Je me considère chanceuse de l'avoir.

Je tiens à remercier également les membres du jury : **Pr. Khalfallah Nabil** et **Dr. Gatt Rafika** pour avoir accepté de discuter mon mémoire.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenue et encouragée durant mes études de près ou de loin.

Table des matières

Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, $T > 0$ un temps fini fixé et $W_t = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien $d-$dimensionnel. On considéré les équations différentielles stochastiques rétrogrades :

$$dy_t = -f(t, y_t, z_t, u_t)dt + z_t dW_t,$$

où :

- $y_T = \xi$: La condition terminale, et $\mathcal{F}_T-$mesurable et de carré intégrable et $(y(.), z(.))$ la solution d'équation différentielle stochastique rétrograde où $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$.
- f : Le générateur qui est une fonction progressivement mesurable donnée tel que f est localement Lipschitz par rapport aux variables d'état y et z.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades, notées EDSR, ont été introduites pour la première fois en **1973** par J. M. Bismut dans le cas linéaire ([1]). Le premier résultat dans le cas général a été publié en **1990** par S. Peng et E. Pardoux ([8]). En **1996**, S. Hamadene ([4]) est étudié des EDSR dont le générateur est seulement localement Lipschitzien.

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

◁ Dans le premier chapitre, on présente des généralités sur les processus stochastiques : processus à accroissements indépendants stationnaires (P. A. I. S), mouvement Brownien, martingale, formule d'Itô.

$\triangleleft$ Dans le deuxième chapitre est composé de deux parties :

- *Première partie*, on va expliquer le résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng en 1990 avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable argument d'approximation.
- *Deuxième partie,* on va étudier le résultat d'existence et l'unicité de la solution pour l'EDSR telle que le générateur est localement Lipschitzien en $(y,\ z)$ et la condition terminale est bornée. Ce résultat a été obtenu par S. Hamadène Hamadène en 1996 tel que l'idée de la preuve du résultat principal est basé sur un argument d'approximation.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Un processus stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps. La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'est-à-dire non prévisible avec certitude.

Dans ce premier chapitre, on donne de définition de processus stochastique et leurs concepts comme les martingales et processus à accroissements indépendants stationnaires.

1.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant le temps.

Définition 1.1.1 *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T. Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

i) *Pout $t \in T$ fixe, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.*

ii) *Pour $\omega \in \Omega$ fixe, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *(Mesurabilité) : Un processus stochastique* X *est mesurable si pour tout* $A \in B\left(\mathbb{R}^d\right)$, *l'ensemble* $\{(t,\omega)\,; X_t(\omega) \in A\}$ *appartient à la produit* $B([0,+\infty\ [) \otimes \mathcal{F}$; *l'application :*

$$\begin{aligned} (\ [0,+\infty[\times\Omega, B([0,+\infty\ [\times\mathcal{F})) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (s,\omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 1.1.3 *: Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable.*

Remarque 1.1.1 *: Une filtration est une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$, *c'est-à-dire telle que* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ *pour tout* $t \leq s$.

Proposition 1.1.1 *Soit* X *un processus progressivement mesurable, et soit* T *un temps d'arrêt. Alors la variable aléatoire* X_T, *définie sur* $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$, *est* $\mathcal{F}_T$*-mesurable et le « processus arrêté »* $\{X_{T\wedge t}, t \geq 0\}$ *est progressivement mesurable.*

Définition 1.1.4 *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit progressivement mesurable si,* $\forall T > 0$ *la fonction :*

$$(t,\omega) \in ([0,T], B[0,T]) \times (\Omega, \mathcal{F}_T)) \mapsto X_t(\omega) \in (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$$

est mesurable.

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Définition 1.1.5 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \mapsto X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω.

Proposition 1.1.2 *Si un processus* X *est adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *et si les trajectoires sont continues à droit, alors il est progressivement mesurable.*

Définition 1.1.6 *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd.*

Définition 1.1.7 *On dit que les trajectoires d'un processus sont continues (ou monotones, ou càdlàg) ssi, pour $\mathbb{P}$ presque tout $(\omega, t) \in \Omega \times T \mapsto X_t(\omega)$ est continue (ou monotone, ou càdlàg).*

Définition 1.1.8 *A un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c'est à dire la famille croissante de tribus :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s, s \leq t\right\}.$$

Définition 1.1.9

i) *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est une modification d'un processus $(y_t)_{t\in T}$ ssi,*

$$\forall t \in T, \quad X_t = y_t, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

ii) *Deux processus $(X_T)_{t\in T}$ et $(y_t)_{t\in T}$ sont dits indistinguables ssi,*

$$\mathbb{P}(\{\omega : \forall t \in T, X_t\left(\omega\right) = y_t\left(\omega\right)\}) = 1.$$

iii) *Deux processus $(X_t)_{t\in T}$ et $(y_t)_{t\in T}$ sont dits équivalents ssi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, ..., t_n) \in T^n$*

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (y_{t_1}, ..., y_{t_n}).$$

Proposition 1.1.3 *Si un processus X est mesurable et adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$, alors il admet une modification progressivement mesurable.*

Processus à accroissements indépendants stationnaires

Définition 1.1.10 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$:*

i) *le processus est dit à accroissements indépendantes si pour tout $s \leq t$ dans T, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendantes de la tribu $\mathcal{F}_s$.*

ii) *le processus est dit à accroissements stationnaires si la loi de $X_t - X_s$, pour $s < t$ dans T, ne dépend que de $t - s$.*

Définition 1.1.11 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est un processus à accroissements indépendants stationnaires si* $\forall s,t \in \mathbb{R}^+$, *tels que* $0 \leq s < t$, *la variable aléatoire* $X_t - X_s$ *a la même loi que* X_{t-s}. *Autrement dit,* $\forall h \geq 0$,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t-s};$$

$\forall s,t \in \mathbb{R}^+$, *tels que* $0 \leq s < t$. *(Notation :* $X \overset{\mathcal{L}}{=} y$ *ssi* X *et* y *ont même loi).*

Processus Gaussiens

Définition 1.1.12 *Une variable* X *est gaussienne de loi* $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *si elle a pour densité :*

$$\mathcal{N}(m,\sigma^2)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

Définition 1.1.13 *Un vecteur* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ *est gaussien si toute combinaison linéaire* $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *est une variable gaussienne à valeurs réelles.*

Définition 1.1.14 *: Un processus* X *est gaussien si toute combinaison linéaire finie de* $(X_t, t \geq 0)$ *est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si :*

$$\forall n,\ \forall t_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \forall a_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

est une variable aléatoire réelle gaussienne.

1.2 Martingales et Mouvement Browniens

1.2.1 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable.

Définition 1.2.1 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *adapté par rapport une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tel que pour tout* $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ *est appelé :*

i) *Une martingale si pour* $s \leq t$: $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$;

ii) *Une sur-martingale si pour* $s \leq t$: $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$;

iii) *Une sous-martingale si pour* $s \leq t$: $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$.

Proposition 1.2.1 (Décomposition de Doob) *Soit* $(X_t)_t$ *un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale* $(M_t)_t$ *et un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible* $(V_t)_t$, *tels que :*

$$M_0 = V_0 = 0,$$

et

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.2.2 *Un processus* M *adapté, nul en* 0 *est une martingale locale s'il existe une suite croissante* (T_n) *de temps d'arrêts telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$ *et que pour tout* n, *le processus arrêté* $M^{T_n} = (M_{T_n \wedge t})$ *est une martingale.*

Définition 1.2.3 *Un processus adapté et continu* X *est une semi-martingale continue s'il existe une martingale locale* M *et un processus adapté* A, *continu, à variations finies et nul en* 0, *tels que* $X = X_0 + M + A$. *Une telle décomposition est unique.*

Remarque 1.2.1 ***Remarque 1.2.2*** *L'unicité de la composition d'une semi-martingale résulte du fait que toute martingale locale, continue, à variation finie est constante. Si*

$$X = X_0 + M^{(1)} + A^{(1)} = X_0 + M^{(2)} + A^{(2)},$$

on a : $M^{(1)} - M^{(2)} = A^{(1)} - A^{(2)}$ *donc* $M^{(1)} - M^{(2)}$ *est une martingale locale, continue, à variation finie et nulle en* 0 *donc nulle.*

Proposition 1.2.2 *Soit* $(X_t)_{t \geq 0}$ *une martingale (respectivement une sous-martingale) et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction convexe (resp. Une fonction convexe croissante). Supposons aussi que* $\mathbb{E}\left[f(X_t)\right] < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$. *Alors,* $\left(f(X_t)\right)_{t \geq 0}$ *est une sous-martingale.*

Preuve. D'aprés l'intégalité de Jensen. On a pour $s < t$,

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right] \geq f\left(\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right]\right) \geq f(X_s),$$

la dernière inégalité utilisant le caractère croissant de f lorsque (X_t) est une sous-martingale. ■

1.2.2 Mouvement Brownien (MB)

Mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t, t \geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t, t \geq 0)$ en référence à **Brown**. On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t, t \geq 0)$ sur cet espace.

Définition 1.2.4 *: Rappelons qu'un processus $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ à temps continu, a valeur dans $\mathbb{R}$ est un mouvement Brownien de dimension 1 relatif à une filtration $(\mathcal{F}_t)$, si :*

i) *$B_0 = 0$, (standard) et (B_t) est adapté à $(\mathcal{F}_t)$.*

ii) *$\forall \omega$, l'application $t \to B_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall t, h$, $B_{t+h} - B_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$;*

iii) *$\forall t, h$, $B_{t+h} - B_t$ est de loi normale de moyenne nulle et de variance h : $\mathcal{N}(0, h)$.*

Remarque 1.2.3 *Si $B_0 = 0$, on dit que le mouvement Brownien standard.*

Proposition 1.2.3 *Si $B = (B_t)$ est un MB alors B est un processus gaussien centré de fonction de covariance $\Gamma(s, t) = s \wedge t$.*

Preuve. On montre par récurrence que $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k B_{t_k}$ est de loi normale :

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1,n-2} a_k B_{t_k} + (a_n + a_{n-1}) B_{t_{n-1}} + a_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \\ &= X_{n-1} + a_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}). \end{aligned}$$

Les variances X_{n-1} et $a_n(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ sont indépendants et de lois normales la variance X_n est donc de loi normale. Par ailleurs : $\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}(B_s^2) = s$ pour $s < t$. ■

Définition 1.2.5 *: Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :*

$$X_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-}p.s, \quad \mathbb{E}\left[X_t\right] = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left[X_t^2\right] = t.$$

Dans ce cas la loi de X_t est une loi normale.

Proposition 1.2.4 *: Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors : le processus $\hat{B}$ défini par $\hat{B}_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.*

Preuve. $\hat{B}_t = (-B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien car :

i) $\hat{B}_0 = (-B_0) = 0$ et la trajectoire $t \mapsto \hat{B}_t(\omega) = -B_t(\omega)$ est continue puisque $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

ii) Soit $\hat{B}_{t_n} - \hat{B}_{t_{n-1}} = B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$, les variables aléatoires :

$$B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1}, ...,\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes, alors : $\forall 0 \leq t_0 < ... < t_n \in \mathbb{R}_+$ les variables aléatoires :

$$B_{t_0} - B_{t_1},\ B_{t_1} - B_{t_2}, ...,\ B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$$

sont indépendantes, alors :

$$\hat{B}_{t_1} - \hat{B}_{t_0},\ \hat{B}_{t_2} - \hat{B}_{t_1}, ..., \hat{B}_{t_n} - \hat{B}_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

iii) $\forall s, t > 0$, tell que $s < t$, $\hat{B}_t - \hat{B}_s = B_s - B_t \backsim \mathcal{N}(0, s-t)$.

■

Proposition 1.2.5 *Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, alors :*

a) *le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement Brownien.*

b) *le processus* $\tilde{B}$ *défini par* $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0, \bar{B}_0 = 0$ *est un mouvement Brownien.*

Proposition 1.2.6 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement Brownien standard alors* B_t *est une martingale.*

Proposition 1.2.7 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien, alors :* $B_t^2 - t$ *est une martingale.*

Preuve.

- $B_t^2 - t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable car c'est une fonction continue de* B_t *qui est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
- $E[\mid B_t^2 - t \mid] \leq E[\mid B_t^2 \mid] + t = t + t = 2t < \infty$.
- $\forall s \in [0, t]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s + B_s)^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + B_s^2 - t\right) \mid \mathcal{F}_s\right], \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2B_s\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + B_t^2 - t.
\end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = t - s,$$

$$et$$

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) = 0.$$

On trouve : $\mathbb{E}\left[(B_t^2 - t) \mid \mathcal{F}_s\right] = t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$, *alors :* $\{B_t^2 - t : \ t \geq 0\}$ *est une martingale.*

■

Proposition 1.2.8 *: Soit* B *un mouvement Brownien alors presque sûrement on a :*

a) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas différentiable en aucun point* t.

b) $t \longmapsto B_t(\omega)$ *n'est pas à variation finie en aucun point* t.

1.3 Calcul d'Itô

1.3.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô

$$\int_0^t \phi_s dB_s,$$

est définie par la limite en moyenne quadratique de $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, s \leq t\right)$. L'objectif c'est définir l'intégrale

$$\int_0^t \phi_s dB_s,$$

pour des processus ϕ :

◄ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$. Soit

$$\phi_s\left(\omega\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(\omega\right) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}\left(s\right).$$

On définit :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On sais que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

Alors :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

◀ **Cas général**

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2)\, ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$, il existe une variable aléatoire $I_t(\phi) = \displaystyle\int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t(\phi)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{E}\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big) = 0$ cas $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ sont à accroissement indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t\left(\phi\right)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(I_t\left(\phi\right)^2\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\phi_s^2 dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\phi_i\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\phi_i\right)^2\left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^{\infty}\phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.3.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

◀ Linéaire :

$$\int_0^t\left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right)dB_s = a\int_0^t\phi_s^1 dB_s + b\int_0^t\phi_s^2 dB_s.$$

◀ Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq T$

$$\int_s^t\phi_v dB_v = \int_s^u\phi_v dB_v + \int_u^t\phi_v dB_v.$$

◀ Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ les processus :

$$t \mapsto I_t\left(\phi\right) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t\left(\phi\right)^2 - \int_0^t\phi_s^2 ds,$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t\left(\phi\right) - I_s\left(\phi\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t\phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

◀ Si $(X_t)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et $\mathbb{E}\left(\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right) < +\infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid X_s \mid^2 dB_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right].$$

◀ Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.3.3 Processus d'Itô

Définition 1.3.1 (Processus d'Itô) *Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens Lebesgue) $p.s$ pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \quad \text{et} \quad X_0 = x,$$

le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion. L'écriture $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ est unique (sous réserve que les processus b et σ vérifient les conditions d'intégrabilité). Ceci signifie que si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = dX_t = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t,$$

alors $b = \tilde{b}$; $\sigma = \tilde{\sigma}$. En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement. On peut définir processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}.p.s.$$

Mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie. Si un processus A à variation finie est une martingale, il est constant. En effet, si $A_0 = 0 = 0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s dA_s$ et par suite $\mathbb{E}(A_t^2) = 0$.

1.3.4 Lemme d'Itô

Première forme : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 à dérivées. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Fonction dépendant du temps : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^2 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à X, à dérivées, on a :

$$f(t, X) \quad = f(0, X_0) + \int_0^t f_t'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Ce que l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X) \quad &= \left[f_t'\left(t, X_t\right) + \frac{1}{2} f_{xx}''\left(t, X_t\right)\sigma_t^2 \right] dt + f_x'(t, X_t)dX_t \\ &= f_t'\left(t, X_t\right)dt + f_x'(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}''\left(t, X_t\right) d\left\langle X\right\rangle_t . \end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades localement Lipschitziennes

L'objectif de ce mémoire est étudier l'existence et d'unicité de la solution pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades localement Lipschitziennes unidimensionnelle tell que :

- f est localement Lipschitzienne en (y, z) ;
- ξ la condition terminale est bornée.

Ce résultat a été obtenu par S. Hamadène en 1996 ([4]).

2.1 Introduction

On travaillera avec deux espaces de processus :

$\triangleleft$ $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: L'espace vectoriel formé des processus progressifs Y, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 \quad = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

$\triangleleft$ $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$: L'espace vectoriel formé des processus progressifs Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 \quad = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] < \infty.$$

$\triangleleft$ $\mathcal{B}^2$: L'espace vectoriel formé des couples de processus $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times M^2$.

On se donne T un temps déterministe fini fixé. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $W = (W_t, t \leq T)$ un mouvement Brownien, où $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de W.

On voudrait résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou sous forme intégrale :

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

tel que :

- f est une fonction donnée :

$$f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \longrightarrow \mathbb{R},$$

où : f s'appelle le générateur de l'EDSR.

- ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où ξ la condition terminale.

2.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades globalement Lipschitziennes

Introduites par Bismut en 1973 ([1]) dans le cas linéaire et par Pardoux et Peng ([8]) en 1990 dans le cas général, tel que la valeur terminale inconnue et donnée.

Définition 2.2.1 *Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $\{(y_t, z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant :*

i) *y et z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n \times d}$;*

ii) $\mathbb{P}-p.s.\{\int_t^T |f(s,y_s,z_r)| + \|z\|^2\}ds < \infty$;

iii) $\mathbb{P}-p.s$, *on a :*

$$y_t = \xi + \int_t^T f(s,y_s,z_s) - \int_t^T z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

tell que $\int_0^t f(r,y_r,z_r)dr$ *est à variation finie et* $\int_0^t z_r dW_r$ *est une martingale, alors :* y_t *est une semi-martingale continue.*

Remarque 2.2.1 • *Les intégrales de l'équation* (2.1) *étant bien définies.*

• $y_t = y_0 - \int_0^t f(r,y_r,z_r)dr + \int_0^t z_r dW_{r,}\ \ 0 \leq t \leq T$, *et* y_0 *est une quantité déterministe car,* y_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

Nous allons maintenant donner un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour les EDSRs, mais avant de l'énoncer, on a besoin les hypothèses $(\mathbb{H}_1)$ suivantes :

◀ **Condition de Lipschitz en** (y,z) : Il existe une constante K, telle pour tout t, y, $\bar{y}$, z et $\bar{z}$, $\mathbb{P}-p.s$

$$|f(t,y,z) - f(t,\bar{y},\bar{z})| \leq K(|y-\bar{y}| + \|z-\bar{z}\|). \tag{2.2}$$

◀ **Condition d'intégrabilité** :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty. \tag{2.3}$$

On montre que : sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus $y \in S^2$.

Proposition 2.2.1 *On suppose qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive tels que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|). \tag{2.4}$$

Si $(y_t,z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR (2.1) telle que* $z \in M^2$ *alors* y *appartient à* S_c^2.

Preuve. On a, pour tout :

$$y_t = y_0 - \int_0^t f(r, y_r, z_r)dr + \int_0^t z_r dW_r,$$

où y_0 est déterministe et on utilise l'hypothèse (2.4) sur f, on trouve :

$$|y_t| \leq |y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_r dWr \right| + \lambda \int_0^t |y_r|dr.$$

On pose :

$$\alpha = |y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_r dWr \right|.$$

Par hypothèse, $z \in M^2$ et donc, via l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ et y_0 est déterministe donc de carré intégrable ; il s'en suit que α est une variable aléatoire de carré intégrable. Par suite on a : $|y_t| \leq \alpha + \int_0^t |y_r|dr$, y ètant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$\sup_{0\leq t\leq T} |y_t| \leq \alpha \exp{(\lambda T)}\,,$$

et donc :

$$|y_t| \leq \alpha \exp{(\lambda T)}\,.$$

Ceci montre que y appartient S^2.

■

Le théorème suivant est de **Pardoux** et **Peng** (**1990**).

Théor■me 2.2.1 (Existence et unicité de solution) *Sous les hypothèses précédentes* $(\mathbb{H}_1)$ *l'EDSR* (2.1) *possède une unique solution* (y,z) *telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|z_s^2\right\| ds\right] < \infty.$$

De plus le processus y *est continu et vérifie :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |y_t|^2\right] < \infty.$$

Preuve. voir ([8]). ■

On etudier le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

◁ On suppose que $k = 1$ ce qui implique que y est un processus et z est une matrice de taille $1 \times d$.

◁ Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné et soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$;

◁ ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.

On a :

$$y_t = \xi + \int_t^T \{a_r y_r + z_r b_r + c_r\}\, dr - \int_t^T z_r dW r \tag{2.5}$$

est une équation différentielle stochastique rétrograde (2.5) s'appelle EDSR linéaire.

Proposition 2.2.2 *:*

a) *L'EDSR* (2.5) *possède une solution unique qui vérifie :*

$$\forall t \in [0,T]\,,\; y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$;

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 \, dr + \int_0^t a_r dr\right\}.$$

b) *Si* $\xi \geq 0$ *et si* $c_t \geq 0$ *alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie* $y_t \geq 0$.

Ce théorème permet de comparer les solutions de deux EDSR dans $\mathbb{R}$ dès que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.

Théor■me 2.2.2 (Théorème de comparaison) *On Suppose que* $k = 1$ *et que* (ξ, f), $(\bar{\xi}, \bar{f})$ *vérifient* $(\mathbb{H}_1)$. *On note* (y, z) *et* $(\bar{y}, \bar{z})$ *les solutions des EDSR correspondantes. On suppose également que* $\mathbb{P}$*-p.s* $\xi \leq \bar{\xi}$ *et que* $f(t, y_t, z_t) \leq \bar{f}(t, y_t, z_t)$ $m \otimes \mathbb{P}$*-p.p (*m *mesure de Lebesgue). Alors :*

$$\mathbb{P}\text{-}p.s,\ \forall t \in [0,T],\ y_t \leq \bar{y}_t.$$

Preuve. Soient (y, z) et $(\bar{y}, \bar{z})$ deux solutions de (2.1). Par ailleurs pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{cases} y_t &= \xi + \int_t^T f(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r, \\ \bar{y}_t &= \bar{\xi} + \int_t^T \bar{f}(r, \bar{y}_r, \bar{z}_r)dr - \int_t^T \bar{z}_r dW_r, \end{cases}$$

par suite :

$$\bar{y}_t - y_t = (\xi' - \xi) + \int_t^T (\bar{f}(r, \bar{y}_r, \bar{z}_r) - f(r, y_r, z_r))dr - \int_t^T (\bar{z}_r - z_r)\, dW_r.$$

On pose $u = \bar{y} - y$, $v = \bar{z} - z$ et $\gamma = \bar{\xi} - \xi$,

$$u_t = \gamma + \int_t^T (\bar{f}(r, \bar{y}_r, \bar{z}_r) - f(r, y_r, z_r))dr - \int_t^T v_r dW_r.$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\bar{f}(r, y_r, \bar{z}_r)$ et $\bar{f}(r, y_r, z_r)$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_t &= \gamma + \int_t^T (\bar{f}(r, \bar{y}_r, \bar{z}_r) - \bar{f}(r, y_r, \bar{z}_r))dr \\ &+ \int_t^T \left(\bar{f}(r, y_r, \bar{z}_r) - \bar{f}(r, y_r, z_r)\right) dr \\ &+ \int_t^T \left(\bar{f}(r, y_r, z_r) - f(r, y_r, z_r)\right) dr - \int_t^T v_r dW_r. \end{aligned}$$

On introduit deux processus :

- a un valeurs réelles tel que :

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{\bar{f}(r, \bar{y}_r, \bar{z}_r) - \bar{f}(r, y_r, \bar{z}_r)}{u_r}, & \text{si } u_r \neq 0, \\ a_r = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b est un vecteur (colonne) de dimension d. Pour définir b, on doit introduire une autre notation : pour $1 \leq i \leq d$, $z_r^{(i)}$ est la ligne dont les $d - i$ dernières composantes sont celles de z'_r et les i premières celles de z_r. Pour $1 \leq i \leq d$, on pose :

$$\begin{cases} b_r^i = \dfrac{\bar{f}(r, y_r, z_r^{(i-1)}) - f(r, y_r, z_r^{(i)})}{v_r^i}, & \text{si } v_r^i \neq 0, \\ b_r^i = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que, puisque $\bar{f}$ est Lipschitz, ces deux processus sont progressivement mesurables et bornés. Avec $c_r = \bar{f}(r, y_r, z_r) - f(r, y_r, z_r)$, on obtient :

$$u_t = \gamma + \int_t^T (a_r u_r + v_r b_r + c_r)\, dr - \int_t^T v_r dW_r,$$

de plus : $\xi \leq \bar{\xi}$ et que $f(t, y_t, z_t) \leq \bar{f}(t, y_t, z_t)$, on a $\gamma \geq 0$ et $c_r \geq 0$ d'après la proposition (2.2.2), on a, pour $t \in [0, T]$:

$$u_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\gamma \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour $0 \leq r \leq T$:

$$\Gamma_r = \exp\left\{ \int_0^r b_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^r |b_u|^2 \, du + \int_0^r a_u du \right\}.$$

Comme $\gamma \geq 0$ et $c_r \geq 0$, alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $u_t \geq 0$, donc : $\forall t \in [0,T]$, $y_t \leq \bar{y}_t$. ■

2.3 Equations différentielles stochastiques rétrogrades localement Lipschitziennes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(W_t, t \leq T)$ un $\mathbb{P}$-mouvement Brownien p-dimensionnel, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de $W_.$ et $\mathbf{P}$ la tribu des processus $\mathcal{F}_T$-progressivement mesurables sur $\Omega \times [0,T]$ tell que : T un temps déterministe fini fixé.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde définie comme suit :

$$\begin{cases} -dy_t = f(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Hypothèses suivantes $(\mathbb{H}_2)$:

$(\mathbb{H}_{2.1})$ **Condition de croissance raisonnable :** $\exists c > 0, \alpha \in]0,2[$ et h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ finie sur les compacts tels que pour tout t, ω, y et z on ait,

$$|f(t,\omega,y,z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^\alpha). \tag{2.2}$$

$(\mathbb{H}_{2.2})$ **Condition de localement Lipschitz :**$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0$ tel que : $\forall (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, (y,z)$ et $(\overline{y},\overline{z}) \in [-N,N]^{p+1}$ on ait :

$$|f(t,\omega,y,z) - f(t,\omega,\overline{y},\overline{z})| \leq C_N(|y-\overline{y}| + |z-\overline{z}|). \tag{2.3}$$

$(\mathbb{H}_{2.3})$ f est une application définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ telle que :

a) $\forall t\in[0,T]$, $f(t,.,.)\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$;

b) $\forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$, on a :

$$|f(t,y,z)|\leq c(1+|y|+|z|). \tag{2.3}$$

c) $\forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$, on a :

$$\left|f'_y(t,y,z)\right|\leq c(1+\ln(1+\ln(1+|y|+|z|))). \tag{2.4}$$

$(\mathbb{H}_{2.4})$ La variable aléatoire ξ est un élément de l'espace de Wiener $\mathbb{D}^{1,2}$. De plus, il existe une constante M telle que $|D_t^i\xi|\leq M,\forall t\leq T$, $i=1,p$. Où $(D_t^i\xi)_{t\leq T}$ est la dérivée de Wiener d'ordre i de ξ.

Remarque 2.3.1 *:*

- *On a f'_y est la dérivée partielle de f par rapport à y et c une constante.*
- *La condition de croissance raisonnable plus faible que la croissance linéaire.*

2.3.1 Existence de la solution

Pour démontrer l'équation rétrograde (2.1) admet une solution, on a besoin les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *:*

1/ *Soit $\Psi:[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^+$, une application $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurable vérifiant la condition $(\mathbb{H}_{2.2})$ ci-dessus. Il existe $\Psi_k:[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^+$, tell que $(\Psi_k,k\geq0)$ une suite croissante et $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$-mesurables, de limite Ψ vérifiant : $\forall k\geq0,\exists\bar{c}_k>0$ tel que $\forall t,\omega,y,\bar{y},z$ et $\bar{z}$.*

$$|\Psi_k(t,\omega,y,z)-\Psi_k(t,\omega,\bar{y},\bar{z})|\leq\bar{c}_k(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|).$$

2/ *Soit* $\Psi : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^-$, *une application* $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$*-mesurable vérifiant la condition* $(\mathbb{H}_{2.2})$ *ci-dessus. Il existe* $\Psi_k : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^-$, *tell que* $(\Psi_k, k\geq 0,)$ *une suite décroissante et* $\boldsymbol{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+1})$*-mesurables, de limite* Ψ *vérifiant :* $\forall k \geq 0, \exists \bar{c}_k > 0$ *tel que* $\forall t, \omega, y, \bar{y}, z$ *et* $\bar{z}$ *:*

$$|\Psi_k(t,\omega,y,z) - \Psi_k(t,\omega,\bar{y},\bar{z})| \leq \bar{c}_k(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}|).$$

Preuve.

1/ On suppose que Ψ est à valeur dans $\mathbb{R}^+$:

Nous ferons la preuve pour $p = 1$ et si $p \geq 2$ le principe en est le même. Soit $k \geq 0$ et Φ_k l'application Lipschitzienne réelle vérifiant :

$$\begin{cases} \Phi_k(y) = 1 & \text{si} \quad |y| \leq k, \\ \Phi_k(y) = 0 & \text{si} \quad |y| \geq k+1, \\ 0 \leq \Phi_k(y) \leq 1 & \text{si} \quad y \in [k, k+1] \cup [-k-1, -k], \end{cases} \quad , \ y \in \mathbb{R},$$

et

$$\begin{cases} \Phi_k(z) = 1 & \text{si} \quad |z| \leq k, \\ \Phi_k(z) = 0 & \text{si} \quad |z| \geq k+1, \\ 0 \leq \Phi_k(z) \leq 1 & \text{si} \quad z \in [k, k+1] \cup [-k-1, -k]. \end{cases} \quad , z \in \mathbb{R}$$

Soit :

- Ψ_k, $k \geq 0$, l'application qui à $(t,\omega,y,z) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ associe $\Psi(t,\omega,y,z)\,\Phi_k(y)\,\Phi_k(z)$.
- La suite $(\Psi_k)_{k\geq 0}$ est croissante car $\Phi_k \leq \Phi_{k+1}$, $\forall k \geq 0$ et de limite Ψ.
- Par ailleurs Ψ_k, $k \geq 0$ est Lipschitzienne car elle est localement Lipschitzienne à support compact.

2/ Si Ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ alors $-\Psi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et le résultat découle de ce qui vient d'être prouvé précédemment.

■

Remarque 2.3.2 *: Pour tout $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ fixé, la convergence de la suite $(\Psi_k(t,\omega,\cdot,\cdot))_{k\geq 0}$ vers $\Psi(t,\omega,\cdot,\cdot)$ est uniforme sur les compacts de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.*

On considère :

- Pour $m \geq 0$ et $n \geq 0$, $(\Psi^{n,m})$ une suite définie comme suit $\Psi^{n,m} = \Psi^n + \varphi^m$ tel que :

1) $(\Psi^n, n \geq 0)$ une suite croissante d'applications Lipschitziennes de limite simple $f1_{[f\geq 0]}$.

2) $(\varphi^m, m \geq 0)$ une suite décroissante d'applications Lipschitziennes de limite simple $f1_{[f<0]}$.

Remarque 2.3.3 *Les applications $f1_{[f\geq 0]}$ et $f1_{[f<0]}$ satisfont la condition $(\mathbb{H}_{2.2})$ ci-dessus vérifiée par f.*

- Pour tout m et n, $\Psi^{n,m}$ est Lipschitzienne.

- De plus, $|\Psi^{n,m}(t,\omega,y,z)| \leq c(1 + |y| + h(y)\,|z|^{\alpha})$ pour tout t, ω, y et z.

Il s'ensuit que le couple $(\Psi^{n,m}, \xi)$ possède les propriétés de (f,ξ) du théorème ([8]).

Par conéquent : Il existe un couple de processus $(y_\cdot^{n,m}, z_\cdot^{n,m})$, $\mathbf{P}$-mesurable tel que :

$\lhd$ $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|y_s^{n,m}|^2 + |z_s^{n,m}|^2\right) ds\right] < \infty.$

$$\lhd \begin{cases} dy_t^{n,m} & = -\Psi^{n,m}(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m})\,dt + z_t^{n,m} dW_t, \quad t \leq T, \\ y_T^{n,m} & = \xi. \end{cases}$$

Lemme 2.3.2 *: Il existe une constantes C_y telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\|y_\cdot^{n,m}\|^* \leq C_y,$$

où C_y est indépendante de n et m, de plus,

$$\|y_\cdot^{n,m}\|^* = \sup\left\{|y_t^{n,m}(\omega)|, (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega\right\} < \infty.$$

Preuve. $\forall t \in [0,T]$, $\forall n,m \in \mathbb{N}$ et $\forall s \in [t,T]$. En ajoutant et en retranchant le terme $\int_s^T \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, 0)\, du$, on trouve :

$$\begin{aligned} y_s^{n,m} &= \xi + \int_s^T \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m})\, du - \int_s^T z_u^{n,m} dW_u \\ &= \xi + \int_s^T \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, 0)\, du + \int_s^T (\Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m}) \\ &\quad -\Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, 0))du - \int_s^T z_u^{n,m} dW_u. \end{aligned}$$

ainsi :

$$y_s^{n,m} = \xi + \int_s^T \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, 0)\, du + \int_s^T z_u \delta\Psi^{n,m}(u, y_u, z_u)\, du - \int_s^T z_u^{n,m} dW_u,$$

où :

$$\delta\Psi^{n,m}(u,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\Psi^{n,m}(u,y,z) - \Psi^{n,m}(u,y,0)}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $\exists$ une constante $C_{n,m}$ telle que $|\delta\Psi^{n,m}(u,y,z)| \leq C_{n,m}$, $\forall (u,\omega,y,z)$. On considère alors :

- $\mathbb{P}^{n,m}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à $\mathbb{P}$ définie comme suite

$$d\mathbb{P}^{n,m} / d\mathbb{P} = L_T^{n,m} = \exp\left\{ \int_0^T \delta\Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m}) dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T |\delta\Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m})|^2\, du \right\}.$$

- Le processus $W_\cdot^{n,m} = W_\cdot - \int_0^\cdot \delta\Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m}) du$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-mouvement Brownien.

Pour tout $s \in [0,T]$, on a :

$$y_s^{n,m} = \xi + \int_s^T \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, 0)\, du - \int_s^T z_u^{n,m} dW_u^{n,m}.$$

Si $\mathbb{E}_{n,m}$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^{n,m}$, alors :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[\left(\int_0^T |z_s^{n,m}|^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathbb{E}\left[L_T^{n,m} \left(\int_0^T |z_u^{n,m}|^2\, du \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$\mathbb{E}\left[L_T^{n,m}\left(\int_0^T |z_u^{n,m}|^2\,du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[(L_T^{n,m})^2\right]\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2\,du\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

- $\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2\,du\right] < \infty$ car $z_{\cdot}^{n,m} \in L^2([0,T]\times\Omega,\, dt\otimes d\mathbb{P})$;
- $L_T^{n,m}$ est de carré intégrable puisque $\delta\Psi^{n,m}$ est uniformément borné en (t,ω).

Il s'ensuit que le processus $\int_0^{\cdot} z_u^{n,m} dW_u^{n,m}$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-martingale car :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t z_u^{n,m} dW_u^{n,m}\right|\right] < \infty.$$

Par conséquent pour tout $s\in[0,T]$:

$$y_s^{n,m} = \mathbb{E}_{n,m}\left[y_s^{n,m} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}_{n,m}\left[\xi \mid \mathcal{F}_s\right] + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[\Psi^{n,m}\left(u, y_u^{n,m}, 0\right) \mid \mathcal{F}_s\right] du.$$

Comme ξ est bornée alors :

$$|y_s^{n,m}| \leq \tilde{c} + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[\left|\Psi^{n,m}\left(u, y_u^{n,m}, 0\right)\right| \mid \mathcal{F}_s\right] du, \quad s\in[0,T].$$

D'autre part pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et pour tout t, ω, y et z, on a :

$$\left|\Psi^{n,m}\left(t,\omega,y,z\right)\right| \leq c(1+|y|+h(y)\,|z|^{\alpha}).$$

Il s'ensuit que,

$$|y_s^{n,m}| \leq \bar{c}\left(1 + \int_s^T \mathbb{E}_{n,m}\left[|y_u^{n,m}| \mid \mathcal{F}_s\right] du\right), \quad s\in[0,T].$$

On applique l'inégalité de Gronwall, on a :

$$\mathbb{E}_{n,m}\left[|y_s^{n,m}| \mid \mathcal{F}_t\right] \leq \bar{c}\exp\left\{\bar{c}(T-s)\right\}.$$

En prenant $s = t$, on obtient :

$$|y_t^{n,m}| \leq \bar{c} \exp\{\bar{c}T\}, \quad \forall t \in [0,T].$$

■

Lemme 2.3.3 *Il existe une constante C_z telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_s^{n,m}|^2 \, ds\right] \leq C_z,$$

où C_z est indépendante de n et m.

Preuve. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,T]$. On applique la formule de Itô à $|y_s^{n,m}|^2$:

$$\begin{aligned} |y_s^{n,m}|^2 + \int_s^T |z_u^{n,m}|^2 \, du &= \xi^2 + 2\int_s^T y_u^{n,m} \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m}) \, du \\ &\quad -2\int_s^T y_u^{n,m} z_u^{n,m} dW_u. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2 \, du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + 2\int_0^T \mathbb{E}\left[|y_u^{n,m} \Psi^{n,m}(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m})|\right] du,$$

car $\int_0^{\cdot} y_u^{n,m} z_u^{n,m} dW_u$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale. Le fait que $\Psi^{n,m}$ vérifie la condition $(\mathbb{H}_{2.1})$ et de $y_{\cdot}^{n,m}$ impliquent que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2 \, du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^\alpha \, du\right],$$

on applique l'inégalité de Young, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2 \, du\right] \leq \mathbb{E}\left[\xi^2\right] + \frac{\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2 \, du\right] + \frac{(2-\alpha)}{2} T c^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Par suite il existe une constante C_z indépendante de n et m, telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_u^{n,m}|^2 \, du\right] \leq C_z.$$

■

Théor■me 2.3.1 *: Il existe un processus* $(y_., z_.)$ $\mathbf{P}$*-mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ *tel que :*

1) $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|y_s|^2 + |z_s|^2\right) ds\right] < \infty;$

2) $\begin{cases} dy_t &= -f(t, y_t, z_t)dt + z_t dW_t, \quad t \leq T, \\ y_T &= \xi. \end{cases}$

De plus : $\|y_.\|^* = \sup\left\{|y_t(\omega)|, (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega\right\} < \infty.$

Preuve. On a :

◁ d'après le lemme (2.3.2)-(2.3.3), la solution unique de l'équation :

$$dy_t^{n,m} = -\Psi^{n,m}\left(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m}\right) dt + z_t^{n,m} dW_t, \quad t \leq T \quad, y_T^{n,m} = \xi.$$

vérifie $\|y_.^{n,m}\|^* \leq C_y$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T |z_s^{n,m}|^2 \, ds\right] \leq C_z.$

◁ $\Psi^{n+1,m} \geq \Psi^{n,m}$ et $\Psi^{n,m} \geq \Psi^{n,m+1}$;

◁ le théorème de comparaison (2.2.2), on permet de déduire que $y_.^{n+1,m} \geq y_.^{n,m}$ et $y_.^{n,m} \geq y_.^{n,m+1}$.

Nous allons maintenant construire le processus $(y_., z_.)$ qui sera la solution recherchée :

1) Pour tout m fixé $(y_.^{n,m}, n \geq 0)$ est une suite croissante bornée, elle est donc convergente. Appelons $y_.^m$ sa limite.

2) Comme pour tout m et $n \in \mathbb{N}$ on a, $y^{n,m} \geq y^{n,m+1}$ alors : la suite $(y_.^m, m \geq 0)$ est décroissante et bornée, elle est donc convergente. Notons $y_.$ sa limite.

Il reste à construire $z_{\cdot}$. On applique la formule d'Itô à $\left|y_t^{n,m} - y_t^{p,k}\right|^2$, pour tout n, m, p et $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(y_0^{n,m} - y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{n,m} - z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right)\left(\Psi^{n,m}\left(u, y_u^{n,m}, z_u^{n,m}\right) - \Psi^{p,k}\left(u, y_u^{p,k}, z_u^{p,k}\right)\right) du\right].
\end{aligned}$$

Comme $(y_{\cdot}^{n,m})_{n,m}$ est bornée et d'après la condition de croissance raisonnable, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(y_0^{n,m} - y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{n,m} - z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right|\left(1 + \left|z_u^{n,m}\right|^\alpha + \left|z_u^{p,k}\right|^\alpha\right) du\right]\right),
\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(y_0^{n,m} - y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{n,m} - z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right| du + \int_0^T \left|y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right|\left(\left|z_u^{n,m}\right|^\alpha + \left|z_u^{p,k}\right|^\alpha\right) du\right]\right),
\end{aligned}$$

avec $\gamma = \dfrac{2}{2-\alpha}$, et par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(y_0^{n,m} - y_0^{p,k}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{n,m} - z_u^{p,k}\right|^2 du\right] \\
&\leq c\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right| du\right] + 2\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|y_u^{n,m} - y_u^{p,k}\right|^\gamma du\right]\right)^{\frac{1}{\gamma}} (C_z)^{\frac{\alpha}{2}}\right),
\end{aligned}$$

et au fait que :$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{n,m}\right|^2 du\right] < C_z$.

Or :

- $\exists$ une sous-suite $\left(y_{\cdot}^{k_{m,m}}, m \geq 0\right)$ de $(y_{\cdot}^{n,m}, n, m \geq 0)$ tel que $y_{\cdot}^{k_{m,m}} \to y_{\cdot}$ dans $L^\gamma\left([0,T] \times \Omega,\ dt \otimes d\mathbb{P}\right)$.
- Par conséquent la suite $\left(z_{\cdot}^{k_{m,m}}, m \geq 0\right)$ est de Cauchy dans $L^2\left([0,T] \times \Omega,\ dt \otimes d\mathbb{P}\right)$ et est donc convergente dans ce même espace, tel que $z_{\cdot}^{k_{m,m}} \to z_{\cdot}$.

On montre enfin que $(y_{\cdot}, z_{\cdot})$ est solution de l'équation rétrograde (2.1).

Il existe une sous-suite $\left(\left(y_{\cdot}^{k_{m,m}}, z_{\cdot}^{k_{m,m}}\right)\right)_{m\geq 0}$ et un processus $\tilde{Z}_{\cdot}$ élément de $L^2\left([0,T]\times\Omega, \mathbf{P}, dt\otimes d\mathbb{P}\right)$ et $\tilde{Z}\geq 0$ tel que :

(I) La sous-suite $\left(\left(y_{\cdot}^{k_{m,m}}, z_{\cdot}^{k_{m,m}}\right)\right)_{m\geq 0}$ converge $dt\otimes d\mathbb{P}$-$p.s$ vers $(y_{\cdot}, z_{\cdot})$.

(II) $\forall m\geq 0$, $\left|z_{\cdot}^{k_{m,m}}\right|\leq \tilde{Z}_{\cdot}$ $dt\otimes d\mathbb{P}$-$p.s.$

On montre que : $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{t\leq T}\left|y_t^{k_{m,m}}-\tilde{y}_t\right|\right]\underset{m\to\infty}{\rightarrow} 0.$

On a : Pour tout $m\geq 0$ et $t\in[0,T]$:

$$\begin{cases} y_t^{k_{m,m}} = \xi + \displaystyle\int_t^T \Psi^{k_{m,m}}\left(u, y_u^{k_{m,m}}, z_u^{k_{m,m}}\right)du - \int_t^T z_u^{k_{m,m}}dW_u \\ \tilde{y}_t = \xi + \displaystyle\int_t^T f(s,y_s,z_s) - \int_t^T z_s dW_s, \text{ pour } t\leq T, \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} y_t^{k_{m,m}} - \tilde{y}_t &= \int_t^T \left(\Psi^{k_{m,m}}\left(u, y_u^{k_{m,m}}, z_u^{k_{m,m}}\right) - f(s,y_s,z_s)\right)du \\ &\quad -\left(\int_t^T z_u^{k_{m,m}}dW_u - \int_t^T z_s dW_s\right). \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T z_u^{k_{m,m}}dW_u - \int_t^T z_u dW_u\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \left(z_u^{k_{m,m}} - z_u\right)dW_u\right|\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \left|z_u^{k_{m,m}} - z_u\right| dW_u\right|\right]. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T z_u^{k_{m,m}}dW_u - \int_t^T z_u dW_u\right|\right] \leq C\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_u^{k_{m,m}} - z_u\right|^2 du\right]\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quand } m\to\infty.$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T z_u^{k_{m,m}}dW_u - \int_t^T z_u dW_u\right|\right]^{\frac{1}{2}} \underset{m\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T \left(\Psi^{k_{m,m}}(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u,z_u)\right)du\right|\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\Psi^{k_{m,m}}(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u,z_u)\right|du\right].$$

En ajoutant et en retranchant le terme $f(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T \left(\Psi^{k_{m,m}}(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u,z_u)\right)du\right|\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\Psi^{k_{m,m}}(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})\right|1_{\left\{\left|z_u^{k_{m,m}}\right|\leq \tilde{Z}_u\right\}}du\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|f(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u,z_u)\right|du\right].$$

Par application du théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_t^T \left(\Psi^{k_{m,m}}(u,y_u^{k_{m,m}},z_u^{k_{m,m}})-f(u,y_u,z_u)\right)du\right|\right]\underset{m\to\infty}{\to}0.$$

En effet, par la convergence uniforme sur les compactes de $\left(\Psi^{k_{m,m}}(t,\omega,.,.)\right)_{m\geq 0}$ vers $f(t,\omega,.,.)$ (d'après la remarque (2.3.2)), au fait que f et $(\Psi^{k_{m,m}}, m\geq 0)$, satisfont condition decroissance raisonnable, à la bornitude de $\left(y_.^{k_{m,m}}\right)_{m\geq 0}$ et aux points (I) et (II) ci-dessus. Par conséquent :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|y_t^{k_{m,m}}-\tilde{y}_t\right|\right]\underset{m\to\infty}{\to}0.$$

Par suite $\forall t\leq T$, $y_t=\tilde{y}_t$ et donc $\forall t\leq T$,

$$y_t=\xi+\int_t^T f(u,y_u,Z_u)du-\int_t^T Z_u dW_u.$$

■

2.3.2 Unicité de la solution

On suppose que les conditions $(\mathbb{H}_{2.3})$ et $(\mathbb{H}_{2.4})$ ci-dessus sont satisfaites.

Proposition 2.3.1 *Il existe une constante $\eta > 0$ et $y_{.}$, $z_{.}$ deux processus P-mesurables, à valeurs respectives dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$ tel que :*

a) $\sup\{|y_t| + |z_t|\,,\ t \leq T\} \leq \eta$.

b) $\begin{cases} dy_t &= -f(t, y_t, z_t)dt + z_t dW_t, \quad t \leq T, \\ y_T &= \xi. \end{cases}$

Théorème 2.3.2 : *Si le couple (f, ξ) vérifie les conditions $(H_{2.3})$ et $(H_{2.4})$ ci-dessus, alors la solution de l'équation rétrograde de générateur (f, ξ) (2.1) est unique.*

Preuve. Soit $(\bar{y}, \bar{z})$ une autre solution de (2.1). Comme ξ est bornée et f est de croissance linéaire alors $\overline{y}$ est bornée. D'autre part pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{cases} y_t &= \xi + \int_t^T f(s, y_s, z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s, \\ \bar{y}_t &= \xi + \int_t^T f(s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)ds - \int_t^T \overline{z} dW_s. \end{cases}$$

On approxime f par une suite double $(\Psi^{n,m}, n, m \geq 0)$ d'applications Lipschitziennes telle que : $\Psi^{n,mn,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} f$. On a :

$$y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m} = \int_t^T (\Psi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m}) - \Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, \bar{z}_s^{n,m}))ds - \int_t^T (z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m})\, dW_s.$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, z_s^{n,m})$, on trouve :

$$\begin{aligned} y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m} &= \int_t^T (\Psi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m}) - \Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, z_s^{n,m}))ds \\ &\quad + \int_t^T \Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, z_s^{n,m}) - \Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, \bar{z}_s^{n,m})ds - \int_t^T (z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m})\, dW_s. \end{aligned}$$

Aussi, appelons $\delta\Psi^{n,m} = ((\delta\Psi^{n,m})_t)_{t\leq T}$ le processus tel que pour tout $t \leq T$,

$$\delta\Psi^{n,m}(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m}) = \begin{cases} \dfrac{\Psi^{n,m}(t, y_t^{n,m}, z_t^{n,m}) - \Psi^{n,m}(t, \bar{y}_t^{n,m}, \bar{z}_t^{n,m})}{z_t^{n,m} - \bar{z}_t^{n,m}}, & \text{si } z_t^{n,m} - \bar{z}_t^{n,m} \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La borgnitude de $\bar{y}_{\cdot}^{n,m}$ et $z_{\cdot}^{n,m}$ implique que $\delta\Psi^{n,m}$ est un processus uniformément borné. Il existe donc une probabilité $\mathbb{P}^{n,m}$ sur Ω équivalente à $\mathbb{P}$ telle que :

$$W_t^{n,m} = W_t - \int_0^t \delta\Psi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m}) ds$$

est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{n,m})$-mouvement Brownien. Par suite pour tout $t \in [0, T]$ on a,

$$\begin{aligned} y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m} &= \int_t^T (\Psi^{n,m}(s, y_s^{n,m}, z_s^{n,m}) - \Psi^{n,m}(s, \bar{y}_s^{n,m}, z_s^{n,m}))ds \\ &- \int_t^T (z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m})\, dW_s^{n,m}. \end{aligned}$$

Comme $\Psi^{n,m}$ est Lipschitzienne alors :

$$\mathbb{E}\left[|y_t^{n,m} - \bar{y}^{n,m}|\right] \leq c \int_t^T \mathbb{E}\left[|y_s^{n,m} - \bar{y}_s^{n,m}|\right] ds,$$

où : $\mathbb{E}\displaystyle\int_0^t (z_s^{n,m} - \bar{z}_s^{n,m}) \,|_{\mathcal{F}_t}) dW_s^{n,m} = 0$, $z_{\cdot}^{n,m}$ et $\bar{z}_{\cdot}^{n,m} \in L^2([0, T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P})$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient : $|y_t^{n,m} - \bar{y}_t^{n,m}| = 0, \forall t \leq T$, $\mathbb{P}$-$p.s.$ Et d'après le théorème (2.3.1) on trouve que :

$$y_t^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} y_t, \quad \text{et} \quad \bar{y}_t^{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} \bar{y},$$

On déduire que $y_t = \bar{y}_t$, $\forall t \leq T$ et $z_t = \bar{z}_t, \forall t \leq T$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on explique deux résultats d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde, on a : le cas général, l'équation différentielle stochastique rétrograde tel que la valeur terminale de la fonction inconnue est donnée. Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng ([8]) en 1990 Et aussi l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation différentielle stochastique rétrograde, telle que : f est localement Lipschitzienne en (y, z) ; ξ la condition terminale est bornée.

- Ce résultat a été obtenu par S. Hamadène en 1996 ([4]).

Bibliographie

[1] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and applications, 44(2), 384-404.

[2] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[3] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[4] Hamadène, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 32, No. 5, pp. 645-659).

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[6] Laleuf, J. C. (2014). Processus et intégrales stochastiques : cours et exercices corrigés. Ellipses.

[7] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Heidelberg, Germany : Springer.

[8] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & control letters, 14(1), 55-61.

[9] Roger, P. (2004). Probabilités, statistique et processus stochastiques : synthèse de cours & exercices corrigés. Pearson education.

Annexe A : Rappel

Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable. En se placent sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) muni de produit scalaire $(f,g) \to \langle f \backslash g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$. On obtient :

$$\forall f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \quad \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \ .$$

Inégalité de Hölder. Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ avec $p,\ q \in]1,\infty[$, $X \in \mathcal{L}^p$ et $Y \in \mathcal{L}^q$.

Alors $XY \in \mathcal{L}^1$ et $\parallel XY \parallel \leq \parallel X \parallel_p \parallel Y \parallel_q$, pour $p = q = 2$, on obtient l'inégalité ce Cauchy-Schwartz :

$$\mathbb{E}\left[\mid XY \mid\right] \leq \mathbb{E}\left[\mid X \mid^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mid Y \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme de Gronwall. Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélienne bornée tell que pour a, $b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a \exp(bt), \forall t \in [0,T].$$

Inégalité de Young. Soient $n \geq 2$, et $x_1,...,x_n$ des réels positifs. Soient également $p_1,...,p_n$ des réels strictement positifs tels que : $\dfrac{1}{p_1} + ... + \dfrac{1}{p_n} = 1$. On a alors :

$$x_1....x_n \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + ... + \frac{x_n^{p_n}}{p_n}.$$

Convergence dominée. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs réelles ou complexes, qui converge simplement *p.p.* (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $g : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$, dite dominante, tel que : $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, *p.p.* Alors :

- f et f_n sont intégrables.
- $\lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0$.
- $\lim_n \int f_n d\mu = \lim \int f d\mu$.

Théorème de représentation des martingales Browniennes. Soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien W. Soit M une martingale continue de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)$. Alors il existe un unique processus prévisible H vérifiant

$$\mathbb{E}\left(\int_t^T H_s^2 ds\right) < +\infty,$$

tel que $\forall t \in [0, T]$:

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s, \ \mathbb{P} - p.s.$$

Inégalite de Doob Soit M une martingale réelle continue à droite (ou sous-martingale positive) de carré intégrale. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} \mid M_s \mid^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\mid M_t \mid^2\right] \quad \forall t \geq 0.$$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy "BDG". Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue $X = (X_t)_{t\geq 0}$, nul en 0 :

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 2.3.4 *: En particulier, si $T \geq 0$:*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Girsanov Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien et $(\theta_t)_{t\leq T}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ qui vérifie :

$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \quad , \ \mathbb{P}\text{−}p.s.$$

tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$L_t := \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\theta|^2 ds\right].$$

Soit une martingale. Soit Q la probabilité définie par $dQ = L_T d\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$, alors le processus $\left(\tilde{W}_t\right)_{t\leq T}$ défini par :

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^T \theta_s ds,$$

est un Q-mouvement Brownien. Notons que la condition dîte de **Novikov**,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < +\infty,$$

est suffisante pour que L_T soit une martingale sous $\mathbb{P}$.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires convergeant $p.s$ vers X. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| < Y$, alors $\mathbb{E}(X_n)$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.

Annexe B : Abréviations et Notations

$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$	:	Espérance conditionnelle de variable aléatoire X par rapport à $\mathcal{F}_t$.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$D^{1,2}$	:	L'ensemble de toutes les variables aléatoires qui sont dérivables de Malliavin.
$\mathbb{C}^2$	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
$\mathbb{C}^1$	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
$EDSR$	:	Equation différentielle stochastique rétrograde.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$
$\mathcal{N}(0,t)$	:	Loi normale centre de varianece t.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de montrer d'existence et d'unicité de la solution des EDSR localement Lipchitzienne. Ce résultat a été obtenu par S. Hamadene.

Mots clés. Equations différentielles stochastiques rétrogrades. localement Lipchitzienne. Existence et unicité.

Abstract

The objective of this work, we will show of existence and uniqueness of the solution for BSDE in locally Lipschitz. This result is due to S. Hamadene.

Key words. Backward stochastic differential equation. localement Lipchitzienne Existence and uniqueness.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو برهنة وجود وتفرد حل بالنسبة للمعادلات التفاضلية و العشوائية وتحت شرط الليبشيز محلي. هذه النتيجة حصل عليها حمدان.

الكلمات المفتاحية. المعادلات التفاضلية و العشوائية التراجعية. البتشيزمحلي. الوجود و الوحدانية .