République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Youb Zohra

Titre :

Résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires par quelques méthodes

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Bellagoun Abdelgani	UMKB	Président
Dr. Laiadi Abdelkader	UMKB	Encadreur
Dr. Radjeh Fouzia	UMKB	Examinatrice

10 Juin 2024

Dédicace

♡

Je dédie ce modeste travail à...

A la mémoire de mes parents.

A mon cher mari et à mes enfants.

A mes très chères soeurs et frères.

A tous les étudiant(e)s de 2*ème* année master Math d'université de

MOHAMED KHIDER, BISKRA.

ZOHRA

REMERCIEMENTS

J'aimerai en premier lieu remercier mon dieu

Allah qui m'a donné la volonté et le courage

pour la réalisation de ce travail.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon

encadreur : Dr. **Laiadi Abdelkader**, pour ses précieux

conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie vivement Dr. **Bellagoun Abdelgani**

de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

J'adresse mes remerciements à Dr. **Radjeh Fouzia**

qui m'a fait l'honneur de juger ce travail.

Adressons également un grand merci à tous

les enseignants de département de Mathématiques

ainsi que l'administration en général.

Et en fin, j'adresse mes s'incère remerciments à

tous qui sont contribué de prés ou de loin

Table des matières

Table des figures

Abréviations et Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$Re(z)$	La partie réelle du nombre complexe z
$\Gamma(z)$	La fonction Gamma
$B(p,q)$	La fonction Bêta
$I^{\alpha}f(t)$	L'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
$y' = \frac{dy}{dx}$	La dérivée première de la fonction y
y''	La dérivée seconde de la fonction y
$C([a,b])$	Les fonctions continues sur $[a,b]$
$L^{p}(\Omega)$	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty[$ intégrables sur Ω
FDE	Equations différentielles fractionnaires
ADM	Méthode de décomposition d'Adomian
VIM	Méthode d'iteration variationnelle
HPM	Méthode des perturbations homotopique
EDO	Equations différentielles ordinaires
${}^{R}D^{\alpha}f(t)$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville
${}^{C}D^{\alpha}f(t)$	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujoud'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{D^n f}{Dt^n}$ pour désigne la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in N$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{D^n f}{Dt}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle, inclut : P.S. Laplace (1812) j'usqua M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B.Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commenté en 1968.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est la théorie des équations différentielles fractionnaires qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel.

La modélisation mathématique des systèmes physiques conduit à des nombreuses équations différentielles non linéaires, tel que l'équation de Klein-Gordon, équation de Duffing, ...etc. Par conséquent, nous devons être capable de résoudre les équations différentielles dans l'espace et le temps, qui peuvent être fortement non linéaires.

La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, telle que les méthodes des éléments finis, des différences finies et les méthode des volumes finis, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elles linéarisent souvent les équations.

Dans le début des années 1981, Adomian a présenté et développé une méthode de résolution des systèmes non-linéaires que l'on appelée la méthode de décomposition pour résoudre des problèmes linéaires ou non linéaires tels que les équations différentielles ordinaires et partielles. La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) consiste à décomposer l'équation donnée en parties linéaires et des parties non linéaires. Elles consiste à recherché la solution sous la forme d'une série$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et à décomposer le terme non linéaire N_u sous la forme d'une série $Nu = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$, les termes A_n sont appelés polynômes Adomian.

Durant ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires (FDE) ont trouvé des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme dans la plupart du temps, ces équations ne peuvent être résolues exactement et les méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent ADM, la méthode des perturbations homotopique (HPM), ou la méthode des itérations du variationelles (VIM).

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux $19^{éme}$ siècle par Rie-mann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employannt non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre α. Les définitions les plus utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo.

L'intégrale fractionnaire d'ordre $p \in \mathbb{R}$ dans un intervalle $[0.T]$ de Riemann-Liouville est définie par :

$$I^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-T)^{(p-1)} f(T)\, dT$$

La dérivée fractionnaire d'ordre p sur $[0,t]$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$^{R}D^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t (t-T)^{n-p-1} f(T)\, dT = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-p} f(t)\right),$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α sur $[0,t]$ au sens de Caputo est définie par :

$$^{C}D^{p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_\alpha^t (t-T)^{n-p-1} f^{(n)}(T)\, dT = I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right),$$

avec $n = [p]+1$, $[p]$ désigne la partie entière de p et $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$désigne la dérivée d'ordre n et Γ est la fonction Gamma.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux élément de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta et la transformé de Laplace. Deux approches sont présentés, ainsi que l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié aux méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles ordinaires. On citera par exemple les méthodes ADM, HPM et VIM avec quelques exemples.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire, pour utiliser ensuite les trois méthodes précédente mais cette fois dans le cas où les équations différentielles sont d'ordre fractionnaire. On applique ces méthodes pour résolution de l'équation de Riccati d'ordre fractionnaire.

Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale avec quelques perspectives.

Chapitre 1

Bases mathématiques du calcul fractionnaires

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Béta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces deux fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exepté en certains points).

Définition 1.1.1 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie*

par :

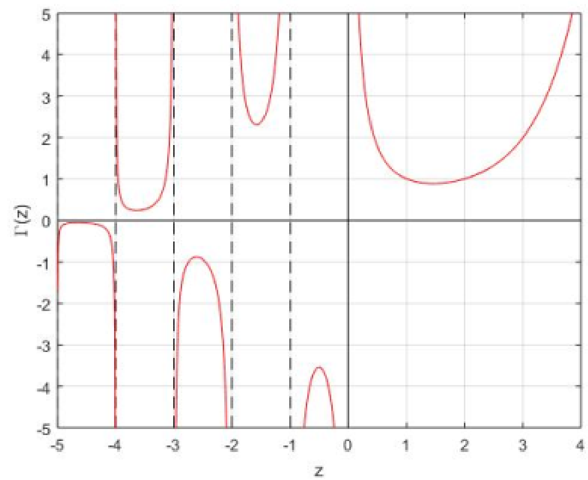

FIG. 1.1 – La fonction Gamma

$$\Gamma\left(z\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}\varrho^{-t}t^{z-1}dt$$

Propriétés :

1. La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma\left(z\right)$ est la relation de récurence suivante : $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma\left(z+1\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{z}dt=\left[-e^{-t}t^{z}\right]_{0}^{+\infty}+z\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma\left(z\right)$$

2. $\Gamma(1)=1,\Gamma(0_{+})=+\infty$. Et aussi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0<z\leq 1$.

4. Si $n\in\mathbb{N}$ alors $\Gamma(n+1)=n!$ et aussi si $n\in\mathbb{N}$ alors : $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^{n}n!}$.

Proposition 1.1.1 *par le principe de prolongement analytique on peut prolonge la fonction* Γ *sur* $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^{-}$. *Soit* $z>0$, $z\notin\mathbb{N}$ *on a :*

$$(-1)^j \binom{z}{j} = \frac{\Gamma(-z+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-z)}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2 *La fontion Bêta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 T^{p-1}(1-T)^{q-1}\, dT, \operatorname{Re}(p) > 0; \operatorname{Re}(q) > 0$$

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

1.1.3 La transformée de Laplace

Soit f une fonction d'ordre exponentiel (c'est-à-dire qu'il existe deux constante M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$), la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie pour tout nombre réel $t \geq 0$ est la fonction F, définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t)\, dt$$

L'inversion de transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pout t positive

$$F^{-1}(t) = L^{-1}\{F(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st) F(s)\, ds$$

où γ est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que soit supérieur à la partie réelle de singularité de $F(s)$.

- Linéairité : $L\{\alpha f + \beta g\} = \alpha L\{f\} + \beta L\{g\}$.
- Dérivation : $L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n L\{f(s)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$
- Intégration : $L\left\{\int_\alpha^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s} L\{f\}^{'} = \frac{1}{s} L\{f\} + \frac{1}{s}\int_\alpha^0 f(u)\,du.$
- Convolution : $L\{f * g\} = L\{f\} \times L\{g\}$
- La transformation de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$est : $L\left[t^{\alpha-1}\right](s) = \Gamma(p)\, s^{-\alpha}$

1.1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Notons par $I_a^1 f$ la primitive qui s'annule en a :

$$\forall x \in [a, b], I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x I^{(1)} f(u)\,du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)\,dt\right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du\right) f(t)\,dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t)\,dt \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la $n - ième$ primitive de la fonction f sous la forme :

$$I^{(n)} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)\,dt, x > a$$

pour tout entier $n > 0$.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann rendu compte que le second membre de l'équation précédente paurait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.1.3 *Si $f \in C[a;b]; \alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\, dt \quad \text{telle que} \quad \forall x > a$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale :

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\, dt \quad \text{telle que} \quad \forall x > b$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α .

Remarque 1.1.1 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Théorème 1.1.1 *Pour $f \in L^1[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] = I_{a^+}^{[\alpha+\beta]} f(x), \text{ pour } \alpha > 0, \beta > 0$$

pour presque tout $x \in [a,b]$. Si de plus $f \in C([a,b])$, alors cette identité est vraie $\forall x \in [a,b]$.

Preuve. La preuve découle directement de la définition : ■

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\beta}} du$$

Or : $f \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement

$$x = u + s(t-u).$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha-\beta}} du \\ &= I_{a^+}^{[\alpha+\beta]} f(x) \end{aligned}$$

Où : $B(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Bêta.

Propriétés :

1 Transformé de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour $a = 0$

d'une fonction f qui possède la transformé de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s) > 0$

est :

$$L(I^{\alpha} f)(s) = s^{-\alpha} F(s)$$

2 $I^{\alpha} t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}$

1.2 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo qui sont les plus utilisées.

Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 < p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$^{R}D^{p}f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}f\left(\tau\right)d\tau=\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(I^{n-p}f\left(t\right)\right)$$

Exemples :

1 La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$^{R}D^{p}C=\frac{C}{\Gamma\left(1-p\right)}\left(t-a\right)^{-p}$$

2 La dérivée de $f(t)=(t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville Soit p non entier et $0\leq n-1<p<n$ et $\alpha>-1$ alors on a :

$$^{R}D^{p}(t-a)^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma\left(1-p\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}\left(\tau-a\right)^{\alpha}d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau=a+s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
^{R}D^{p}(t-a) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-p\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(t-a\right)^{n+\alpha-p}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-p-1}s^{\alpha}ds\\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma\left(n-p\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}\\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(a+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-p+1\right)\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}\\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$$^{R}D^{0.5}t^{0.5}=\frac{\Gamma\left(1.5\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\Gamma\left(1.5\right)$$

Propriété : Composition avec l'intégrale fractionnaire :

– L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$$^{R}D^{p}\left(I^{P}f\left(t\right)\right)=f\left(t\right),$$

on a

$$^{R}D^{p}\left(I^{q}f\left(t\right)\right)=^{R}D^{p-q}f\left(t\right)$$

1.2.1 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

On va introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.2.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo* $^{C}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)$ *d'ordre* $\alpha>0$ *sur l'intervalle* $[a,b]$ *est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :*

Soit $p>0$ avec $n-1<p<n$, $(n\in N^{*})$ et f une fonction telle que : $\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\in L_{1}\left[a,b\right]$

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$^{C}D^{p}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau=I^{n-p}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right)$$

Propriétés :

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :

Soit $p>0$ avec $n-1<p<n$, $(n\in N^{*})$, supposons que f est une fonction telle que : $^{C}D_{t}^{p}f\left(t\right)$ et $^{R}D_{t}^{p}f\left(t\right)$ existent alors :

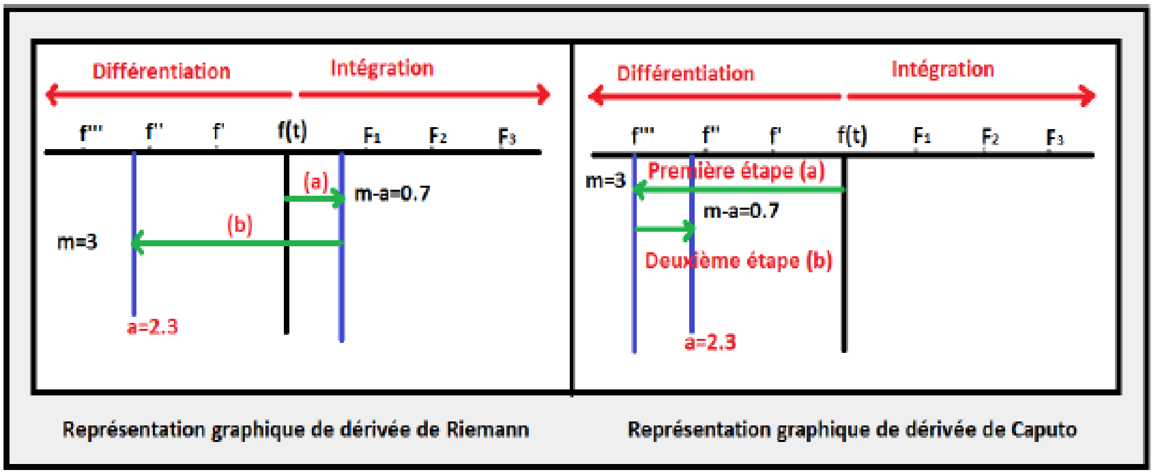

FIG. 1.2 – Comparaison entre la dérivée de Riemann et la dérivée de Caputo.

$$^{C}D^{p}f(t) =^{R} D^{p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0, 1, 2, ..., n-1$,on aura $^{C}D^{p}f(t) =^{R} D^{p}f(t)$.

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$$^{C}D^{p}I_{a}^{p}f = f \quad \text{et } I_{a}^{pC}Df(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droite.

Remarque 1.2.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit*

$$^{C}D^{\alpha}C = 0$$

Exemple 1.2.1 *La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Caputo :*

Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$; alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

d'où

$${}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}
\end{aligned}$$

1.2.2 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

1. L'avantage principale de l'apprche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

2. Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est :$\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}$. La dérivée d'ordre $a = 2.3$ d'une fonction f, par la définition de

Riemann et de Caputo.

3. Grafiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1<\alpha<m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1<\alpha<m$ par l'approche de Caputo, on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha\ )$.

Propriétés générales des dérivées fractionnaires

La linéairité :

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire.

$$D^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)=\lambda D^{\alpha}f\left(t\right)+\mu D^{\alpha}g\left(t\right)$$

pour les deux approches de dérivation considérée dans ce mémoire.

La règle de Leibniz :

Pour un entier n on a :

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(f\left(t\right)g\left(t\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\left(t\right)g^{(n-k)}\left(t\right)$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$${}^{R}D^{p}\left(f\left(t\right)g\left(t\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}f^{(k)}\left(t\right)D^{(p-k)}g\left(t\right)+R_{n}^{p}\left(t\right)$$

où $n\geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau)\, d\tau \int_T^t f^{(n+1)}(\xi)\, d\xi$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$

Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$${}^{R}D^p(f(t)\, g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t)\, D^{(p-k)} g(t)$$

${}^{R}D^p$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Quelques méthodes numériques pour résoudre des EDO

2.1 La méthode de décomposition d'Adomian

Dans la seconde partie du XXe siècle, George Adomian (1922 - 1996) un mathématicien américain a proposé une nouvelle méthode [1] pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, les problèmes algébriques, intégrales, intégro-différentielles, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur. La technique utilise une décomposition de I'opérateur non linéaire en une série de fonction, chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme d'Adomian. La méthode décompositionnelle consiste à calculer les solutions des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné [2].

2.1.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$AU = f \tag{2.1}$$

où A est un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non linéaire (contenant des termes linéaires et des termes non linéaires) d'un espace de Hilbert H dans lui-même et f est une fonction donnée.

On cherche $u \in H$ solution du (2.1). Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est un opérateur différentiel facilement inversible et R représente le reste de l'opérateur linéaire. On note N le terme non-linéaire de A et donc

$$A = L + R + N$$

l'équation (2.1) s'écrire alors

$$L(u) + N(u) + R(u) = f \tag{2.2}$$

En multipliant l'équation (2.2) par L^{-1} aux deux côtés de l'équation (après la décomposition),

on obtient :

$$L^{-1}(Lu + Nu + Ru) = L^{-1}f$$

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}f - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u) \tag{2.3}$$

où $L^{-1} = \displaystyle\iint ... \int (.)\,(dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L. Puisque :

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi$$

et ϕ est la constante de l'intégration. Par conséquent, l'équation (2.3) devient :

$$u = L^{-1}(f) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u) \tag{2.4}$$

La méthode d'Adomian (ADM) consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \tag{2.5}$$

En remplaçant (2.5) dans (2.4), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = L^{-1}(f) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) - L^{-1}N\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \tag{2.6}$$

Pour pouvoir construire la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ dont les éléments sont calculés récursivement, on note par $N(u)$ la somme de la série :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \tag{2.7}$$

à chaque A_n est une fonction de $u_{0,}u_1, ..., u_n$. Les A_n sont appellés polynômes d'Adomian et ils sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lambda^i u_i\right) = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + ... \tag{2.8}$$

$$N(u(\lambda)) = N\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\lambda^i u_i\right)\right) = N\left(\sum_{n=0} \left(\lambda^n A_n\right)\right) = ..., \tag{2.9}$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance. De (2.8) et (2.9) on déduit

$$A_n\left(u_0,u_1,...,u_n\right)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}\qquad n=0,1,2,...... \tag{2.10}$$

En remplaçant (2.7) dans (2.6), on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\phi+L^{-1}\left(f\right)-L^{-1}R\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-L^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}A_n \tag{2.11}$$

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ peuvent être identifiés par les formules

$$\begin{cases} u_0=\phi+L^{-1}f \\ u_1=-L^{-1}Ru_0-L^{-1}A_0 \\ u_2=-L^{-1}Ru_1-L^{-1}A_1 \end{cases} \tag{2.12}$$

Ainsi, La solution de (2.2) est déterminée. Mais, en pratique, les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ne peuvent être tous Calculés, on utilise alors l'approximation :

$$\phi_n=\sum_{i=0}^{n-1}u_i\quad\text{avec}\quad\lim_{n\to+\infty}\phi_n=u$$

La question qu'on peut se poser est comment déterminer les $\left(A_n\right)_{n\geq0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

2.1.2 Les polynômes d'Adomian

l'étape la plus importante de la méthode est celle du calcul des polynômes d'Adomian.

Définition 2.1.1 *Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule suivante* [2] *:*

$$\begin{cases} A_0\left(u_0\right)=N\left(u_0\right) \\ A_n\left(u_0,u_1,u_2,...,u_n\right)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \end{cases}, \tag{2.13}$$

la formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n\geq 0}$ est la suivante [2] :

$$
\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0)\\
A_1(u_0,u_1) &= u_1\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)\\
A_2(u_0,u_1,u_2) &= u_2\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+\frac{1}{2!}u_1^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)\\
A_3(u_0,u_1,u_2,u_3) &= u_3\frac{\partial}{\partial u}N(u_0)+u_1u_2\frac{\partial^2}{\partial u^2}N(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\frac{\partial^3}{\partial u^3}N(u_0)
\end{aligned}
$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n=\sum_{\nu=0}^{n}c(\nu,n)\,N^{(\nu)}(u_0)\,,n\geq 0 \tag{2.14}$$

où : $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

Exemple 2.1.1 *Soit l'équation :*

$$\begin{cases} u'(t)-u(t)=t^2\\ u(0)=-2\end{cases}$$

On a : $Lu=u'(t)\,,Ru=-u(t)\,,Nu=0,f(t)=t^2$

L^{-1} représente une simple intégration de 0 a t . On trouve

$$u=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=u_0+L^{-1}\left(t^2\right)+L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$$

Par identification on a :

$u_0=u(0)+L^{-1}(t^2)=-2+\frac{t^3}{3}$

$u_1 = L^{-1}(u_0) = -2t + \frac{t^4}{12}$

$u_2 = L^{-1}(u_1) = -t^2 + \frac{t^5}{60}$

$u_3 = L^{-1}(u_2) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{360}$

...

$u_n = -2\frac{t^n}{n!} + 2\frac{t^{n+3}}{(n+3)!}$

d'où :$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -2 - 2t - t^2$, qui est la solution exacte de l'équation difiérentielle.

Exemple 2.1.2 *:Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u' - \varrho^u = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

On a : $Lu = u'(t), Nu = \varrho^u$, on applique :$L^{-1}\left(L^{-1} = \int_0^t (.)\,dt\right)$ aux termes du problème on trouve : $u = L^{-1}(\varrho^u)$

On utilise la série de la décomposition pour la fonction non-linéaire $u(t)$ et la série polynomiale pour le terme non-linéaire, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_{k+1}(t) = L^{-1}(A_k), k \geq 0 \end{cases}$$

Les polynômes d'Adomian pour le terme non-linéaire ϱ^u sont calculés comme suit :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = \varrho^{u_0} = 1 \\ A_1(u_{0,}u_1) = u_1 \\ A_2(u_{0,}u_1, u_2) = u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2 \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3 \end{cases}$$

En utilisant la relation de recurrence précédente, on trouve :

$u_0 = 0$

$u_1 = L^{-1}(A_0) = t$

$u_2 = L^{-1}(A_1) = \frac{1}{2}t^2$

$u_3 = L^{-1}(A_2) = \frac{1}{3}t^3$

$u_4 = L^{-1}(A_3) = \frac{1}{4}t^4$

...

Alors la solution dans une forme d'une série est donné par :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + ...$$

2.1.3 Convergence de la méthode ADM

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N.

En effet, de la relation (2.12) on déduit : Si $\sum_{n\geq 0} A_n < +\infty$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$ et réciproquement. Les premières preuves de convergence ont été citées par Yves Cherruault. Elles sont basées sur la théorème du point fixe. Donnons les grandes lignes de la démonstration (voir [5] pour plus de détails). Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (2.1) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

avec :$S_0 = 0$, et vérifiant la relation récurrente suivante :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), S_0 = 0, u_0 = f, n = 1, 2, ... \tag{2.15}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.2.1 *Si l'opérateur N est une contraction*(c'est-à-dire vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite (Sn) satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S)$ avec $S_0 =$

$0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.

Preuve. De la relation (2.14), on a ■

$$\begin{aligned}
\|S_n - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\
&\leq \|N\| \|S_n - S\| \\
&\leq \delta \|S_n - S\| \\
&\leq \delta^2 \|S_{n-1} - S_n\| \\
&\leq \delta^3 \|S_{n-2} - S\| \\
&\dots \\
&\leq \delta^n \|S_1 - S\|
\end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(Sn)_n$ vers S. Par ailleurs, on a

$$\sum_{n\geq 0} A_n = \sum_{n\geq 0} u_n$$

et comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente d'après le Théorème (2.2.1), on a alors le résultat suivant :

Corollaire 2.1.1 *Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est solution de l'équation :*

$$Au = f$$

Exemple 2.1.3 *Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \geq 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

on a : $Lu = u\acute{}$ **et** $Nu = u^2$ avec : $L = \frac{d}{dt}(.)$

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t. On trouve :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left| u(0) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right| \tag{2.17}$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{cases} A_0 = u_0^2 \\ A_1 = 2u_0u_1 \\ A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2 \\ A_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2 \\ ... \end{cases}$$

par conséquent on a

$$\begin{aligned} &u_0 = 1 \\ &u_1 = -L^{-1}(A_0) = -t \\ &u_2 = -L^{-1}(A_1) = t^2 \\ &u_3 = -L^{-1}(A_2) = -t^3 \\ &u_4 = -L^{-1}(A_3) = t^4 \\ &... \end{aligned}$$

par (2.17), on a la solution de (2.16) donnée par :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

2.2 Méthode d'itération variationnelle(VIM)

La méthode d'itération variationnelle (VIM) a été proposée et développée par le mathématicien chinois Je-Haun-He au début des années 1990 [7, 8, 9], elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. Cette méthode a été employée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non-linéaires avec des approximations successives rapidement convergentes vers la solution exacte si elle existe. La méthode est basée sur la détermination du multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation différentielle non-linéaire suivante [7] :

$$L(u) + N(u) = f(t) \tag{2.18}$$

où :

L : est un opérateur linéaire défini par $L = \frac{d^m}{dt^m}, m \in \mathbb{N}^*$

N : est un opérateur non linéaire,

f : est une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\left[L(u_n(\tau)) + N(\tilde{u}_n(\tau)) - f(\tau)\right] d\tau, n \geq 0 \tag{2.19}$$

où :

λ : est un multiplicateur générale de Lagrange.

n : est un indice représente la n^{ime} approximation et $\tilde{u}_n(\tau)$ est considéré comme un variation restreinte c'est à dire $\delta\tilde{u}_n(t) = 0$.

Pour résoudre l'équation (2.18) par la méthode (VIM), on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier de manière optimale via intégration par parties. Alors les approximations successives u_n de la solution $u(t)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction u_0 bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(t) = u(t) \tag{2.20}$$

La méthode (VIM) devrait être employée en suivant deux étapes essentielles.

1. La détermination de multiplicateur de Lagrange λ.

- si $m = 1$,$\lambda(t) = -1$,$u_0(x) = u(0)$.

- si $m = 2$,$\lambda(t) = t - \tau$, $u_0(x) = u(0) + x\acute{u}(0)$

d'une manière générale :

$$\lambda(t) = \frac{1^m}{(m-1)!}(t-\tau)^{m-1} \quad ,u_0(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} x^k, c_k = u^k(0)$$

2. La détermination d'une formule d'itération :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \frac{1^m}{(m-1)!}(t-\tau)^{m-1} \left[L(u_n(\tau)) + N(\tilde{u}_n(\tau)) - f(\tau)\right] d\tau.$$

2.2.2 Analyse de Convergence

Dans cette section, nous présentons le théorème de convergence de la méthode d'itération variationnelle (VIM). La méthode transforme l'équation différentielle donnée en une suite de fonction récurrentes. La limite de cette suite est considérée comme la solution de l'équation différentielle donnée.

Théorème 2.3.1[14, 16] *Soit X est un espace de Banach et $B : X \to X$ est une application non linéaire. On suppose que l'application vérifie la condition :*

$$\|B(u) - B(\bar{u})\| \leq \gamma \|u - \bar{u}\|, \forall u, \bar{u} \in X \tag{2.21}$$

où :$0 < \gamma < 1$. Alors, l'application B possède un point fixe unique, $u \in X$, tel que

$$B(u) = u$$

De plus, la suite :

$$u_{n+1} = B(u_n) \tag{2.22}$$

converge vers point fixe de B, pour tout choix arbitraire $u_0 \in X$.

Preuve. ■

$$\begin{aligned}\|u_k - u_l\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + ... + \|u_{l+1} - u_l\| = \|B_{k-1} - B_{k-2}\| + ... + \|B_l - B_{l-1}\| \\ &\leq \gamma \|u_{k-1} - u_{k-2}\| + ... + \gamma \|u_l - u_{l-1}\| \\ &\leq \left(\gamma^{k-2} - \gamma^{k-3} + ... + \gamma^{l-1}\right) \|u_1 - u_0\| \leq \tfrac{\gamma^{l-1}}{1-\gamma} \|u_1 - u_0\|\end{aligned}$$

On peut supposer que $1 < l < k$,cela donne :$\|u_k - u_l\| \to 0$, comme $k, l \to \infty$,donc $(u_k)_{k=1}^{+\infty}$est une suite de Cauchy. Puisque X est un espace de Banach, la suite converge vers un point fixe. D'après le théorème (2.3.1), pour l'application non linéaire

$$B(u_n) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) [L(u_n(\tau)) + N(\tilde{u}_n(\tau)) - f(\tau)] \, d\tau. \tag{2.23}$$

une condition suffisante pour la convergence de la méthode d'itération variationnelle est que B doit être strictement contractante. De plus, la suite (2.22) converge vers un point fixe de B qui est la solution du problème (2.19).

Exemple 2.2.1 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = 0, 0 < t \leq 1 \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

La correction fonctionnelle de cette l'équation, selon la VIM est donnée par :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)\left(u_n'(\tau) + u_n(\tau)\right) d\tau$$

Le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\tau)$ peut être identifié comme étant $\lambda(\tau) = \tau - t$ donc la formule d'itération peut être obtenue comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (\tau - t)\left(u_n'(\tau) + u_n(\tau)\right) d\tau$$

2.3 Méthode de perturbation homotopique

La méthode de perturbation homotopique (MPH) est mise en oeuvre pour résoudre analytiquement des équations différentielles ordinaires qui apparaissent souvent dans des problèmes compliqués à l'étudier. La méthode de perturbation homotopique a été introduite par Ji-Huan He [10] à l'Université de Shanghai en 1998. Cette dernière est très simple et permet d'obtenir une solution analytique exacte ou approximative.

2.3.1 Principe de la méthode de perturbation homotopique

Pour illustrer les idées de base de la méthode de perturbation homotopique, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega \tag{2.24}$$

Avec conditions aux limites :

$$B(u) = 0, r \in \tau \tag{2.25}$$

Où A est un opérateur différentiel général, B est un opérateur limite, $F(r)$ est une fonction analytique connue, τ est la limite du domaine Ω. L'opérateur A peut, en règle générale, être divisé en deux parties L et N, où L est linéaire, tandis que N est non linéaire, l'équation (2.24), par conséquent, peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{2.26}$$

Par la technique d'homotopie, nous construisons une homotopie $\upsilon(r,p) : \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$H(\upsilon,p) = (1-p)\left[L(\upsilon) - L(u_0)\right] + p\left[N(\upsilon) - f(r)\right] = 0 \tag{2.27}$$

Alors

$$H(\upsilon,p) = L(\upsilon) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(\upsilon) - f(r)\right] = 0 \tag{2.28}$$

Où $p \in [0,1]$ est un paramètre d'intégration, u_0 est une première approximation de l'équation (2.24) qui satisfait les conditions aux limites. De toute évidence, à partir de l'équation (2.27) nous avons :

$$H(\upsilon,0) = L(\upsilon) - L(u_0) = 0 \tag{2.29}$$

$$H(\upsilon, 1) = A(\upsilon) - f(r) = 0 \tag{2.30}$$

Le processus de changement de p à partir de zéro à l'unité est seulement celle de v (r,p) à partir de $u_0(r)$ à $u(r)$. En topologie, on appelle cela la déformation et $L(\upsilon) - L(u_0)$, $L(\upsilon) - L(u_0)\, A(\upsilon) - f(r)$ sont appelés homotopies. On suppose que le paramètre de plongement p comme un « petit paramètre », et supposons que la solution de l'équation (2.27) peut être écrit comme une série de puissance de p :

$$\upsilon = \upsilon_0 + p\upsilon_1 + p^2\upsilon_2 + ... \tag{2.31}$$

Par la suite nous prenons $p = 1$, la solution approchée de l'équation (2.24) est donnée par :

$$u = \lim_{p \to 1} \upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_1 + \upsilon_2 + .. \tag{2.32}$$

Le couplage de la méthode de perturbation et la méthode d'homotopie est appelé la méthode de perturbation homotopique (MPH). Cette procédure, permet d'éliminer les limitations des méthodes de perturbation traditionnelle. D'un autre côté, cette technique proposée peut tirer pleinement profit des techniques de perturbation traditionnelle.

Exemple 2.3.1 *Pour illustrée la méthode, nous allons considérer l'équation différentielle non linéaire de Riccati suivante :*

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) - y^2(t) + 1 \tag{2.33}$$

Avec la condition initiale :

$$y\,(t=0)=0.$$

La solution exacte de cette équation est donnée comme suit :

$$y\,(t)=1+\sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2t}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$$

Appliquant la méthode de perturbation homotopique pour résoudre l'équation (2.33). Les parties linéaire et non linéaire de l'équation sont respectivement :

$$\begin{aligned} L\,(\upsilon) &= y^{\cdot}\,(t)+2y\,(t)\,, \\ N\,(\upsilon) &= y^{2}\,(t)\,. \end{aligned}$$

Choisissant arbitrairement l'approximation initiale de la solution de l'équation (2.33) comme suit :

$$y_0\,(t)=t$$

Et l'homotopie peut-être construite comme suit :

$$H\,(\upsilon,p)=\upsilon^{\cdot}+2\upsilon-L\,(y_0)+pL\,(y_0)+p\left(\upsilon^2-1\right)$$

En égalant les termes de puissances identiques en p, on a

$$\begin{cases} p^0: L\,(\upsilon_0)-L\,(y_0)=0 \\ p^1: L\,(\upsilon_1)+L\,(y_0)+\upsilon_0^2-1=0, \\ p^2: L\,(\upsilon_2)+2\upsilon_0\upsilon_1=0, \\ p^3: L\,(\upsilon_3)+\upsilon_1^2+2\upsilon_0\upsilon_2=0 \end{cases}$$

Par souci de simplicité, nous avons toujours mis $\upsilon_0(t) = y_0(t) = t$. Par conséquent, la résolution des équations simples donne :

$$\begin{cases} \upsilon_1(t) = \frac{1}{4}\left(-1 + \varrho^{2t} - 2t + 2t^2\right) \\ \upsilon_2(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - \varrho^{2t}t^2 + 2t^2\right) \\ \upsilon_3(t) = \frac{1}{96}\left(-3\varrho^{4t} + \varrho^{2t}\left(12t^4 - 8t^3 + 12t - 96\right) + 60t^4 + 120t^3 + 180t^2 + 192t + 99\right) \end{cases}$$

Dans la présente étude, la méthode de perturbation homotopique a été appliquée pour résoudre l'équation de Riccati. La solution exacte, numérique avec un pas d'intégration $h = 0.01$ sont comparées avec la solution obtenue par la méthode de perturbation homotopique. Les résultats de simulations obtenues sont donnés par les figures$(fig1)\,(fig2)$et $(fig3)$.

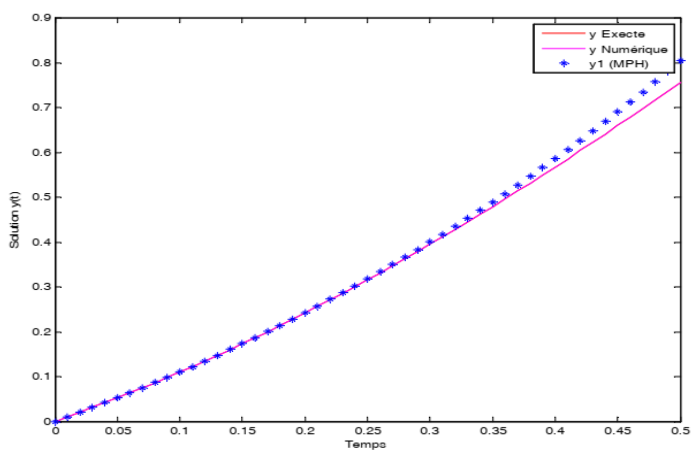

FIG. 2.1 – Solutions exacte, numérique et approximée (HPM) de l'équation de Riccati

Remarque 2.3.1 *on remarquant que :*

Nous pouvons voir clairement que la solution obtenue par la méthode de perturbation de homotopique coïncide avec la solution exacte. On remarque que plus le nombre d'itérations augmente plus la précision de la méthode de perturbation homotopique est améliorée.

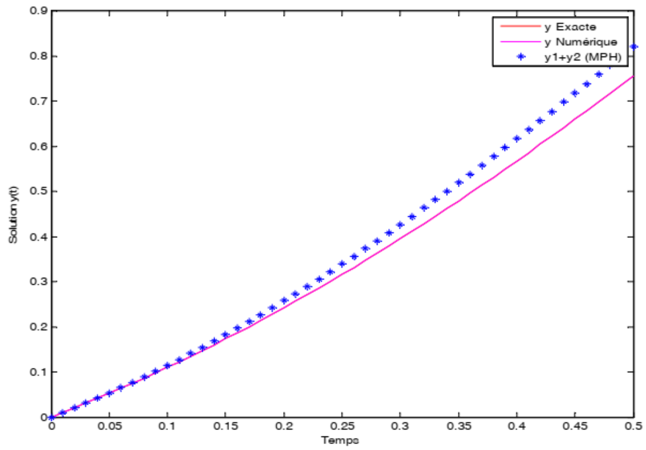

FIG. 2.2 – Solutions exacte, numérique et approximée (HPM) de l'équation de Riccati

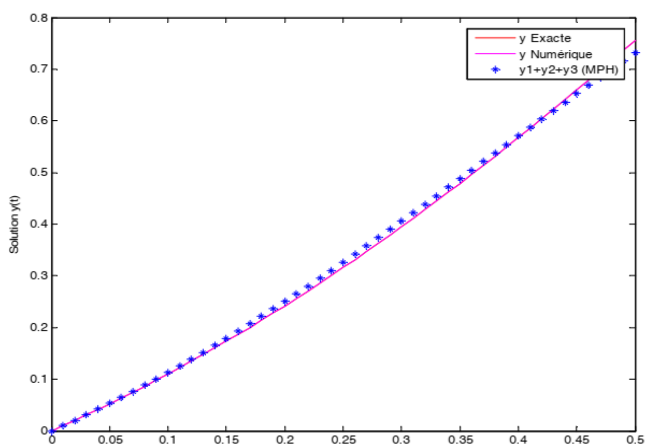

FIG. 2.3 – Solutions exacte, numérique et approximée (HPM) de l'équation de Riccati

On constate que contrairement aux techniques classiques, la méthode de perturbation homotopique permet de déterminer une solution approchée de l'équation de Riccati non linéaires. Cette solution est obtenue sans transformer ni linéariser l'équation de Riccati. La méthode est efficace, elle permet d'assurer une bonne précision en effectuant plus d'itérations.

Chapitre 3

Résolution des équations différentielles fractionnaires

3.1 Equations différentielles fractionnaires (EDF)

Dans cette section on va discuter sur les types des equations différentielles d'ordre fractionnaire. On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF).

Définition 3.1.1 . *soit* $\alpha > 0$,$\alpha \notin \mathbb{N}$,$n = [\alpha] + 1$ *et* f :$A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, *Alors :*

$$D^{\alpha}u\,(t) = f\,(t, u\,(t)) \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. De la même manière :

$$^{c}D^{\alpha}u\,(t) = f\,(t, u\,(t)) \tag{3.2}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.1.1 Equation différentielle fractionnaire de type de Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 3.1.1 *.Soit $\alpha > 0$,Si nous supposons que $u \in \mathbb{C}(0.1) \cap L(0.1)$, alors l'équation*

différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville :

$$D_{0^+}^{\alpha} u(t) = 0, \qquad 0 < t < 1 \tag{3.3}$$

admet une solution unique :

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + C_3 t^{\alpha-3} + ... + C_n t^{\alpha-n},$$

où :$C_m \in \mathbb{R}$,avec $m = 1, 2, ..., n$

Preuve. Soit $\alpha > 0$,on a :

$$D_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \text{avec}, m = 1, 2, 3, ..., n \tag{3.4}$$

■

où :$C_m \in \mathbb{R}$

Donc la solution générale de (3.3) donné comme une des solutions particulières (3.4), C-à-d :

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n} \tag{3.5}$$

où :$C_m \in \mathbb{R}$,avec $m = 1, 2, ..., n$

3.1.2 Equation différentielle fractionnaire de type de Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 3.1.2 *Soit $\alpha > 0$.Si nous supposons que $u \in \mathbb{C}\left(0.1\right) \cap L\left(0.1\right)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo :*

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha} u\left(t\right) = 0, \tag{3.6}$$

admet une solution unique :

$$ u\left(t\right) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + ... + C_{n-1} t^{n-1} \tag{3.7}$$

où :$C_m \in \mathbb{R}$,avec $m = 1, 2, ..., n$

Preuve. Soit $\alpha > 0$, on a

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha} t^m = 0, \text{ avec, } m = 1, 2, 3, ..., n-1 $$

■

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.6), admet une solution particulière, comme :

$$ u\left(t\right) = C_m t^m, \text{pour, } m = 1, 2, ..., n-1 \tag{3.8}$$

où :$C_m \in \mathbb{R}$,

Donc la solution générale de (3.6), donnée comme une somme des solutions particulières (3.8), C-à-d :

$$ u\left(t\right) = C_0 + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + ... + C_n t^{\alpha-n} $$

Lemme 3.1.3 *Supposons que* $u \in C^n([0,1])$. *Alors*

$$I_{0^+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{n-1}t^{n-1}$$

où :$C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, ..., n-1$

Preuve. soit $\alpha > 0$ pour tout $u \in \mathbb{C}^n([0,1])$ on a ■

$$I_{0^+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!}t^k,$$

$$= u(t) - \left[u(0) + u^{\acute{}}(0)\,t + \frac{u^{\acute{}}(0)}{2}t^2 + ... + \frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}\right]$$

On pose : $C_m = -\frac{u^m(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque : $m = 1, 2, 3, ..., n-1$, On trouve facilement l'égalité (3.9).

Lemme 3.1.4 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$,*et* $z \in \mathbb{C}([0.1])$.

Alors l'unique solution de problème aux limites :

$$\begin{cases} I_{0^+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = z(t), 0 < t < 1 \\ u(0) + u^{\acute{}}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

: est donnée par

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\,z(s)\,ds,$$

tel que :

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}+(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0\leq s\leq t\leq 1\\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0\leq t\leq s\leq 1\end{cases} \tag{3.10}$$

3.2 Application de la méthode ADM pour les équations de Riccati

Nous allons considérer dans cette partie que la dérivée fractionnaire utilisée est au sens de Caputo. Nous présentons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati :

$$^{C}D^{\alpha}u(t)=A(t)+B(t)u(t)+C(t)u(t)^{2}, \tag{3.11}$$

avec $u^{(j)}(0)=c_j \;\; m-1<\alpha<m\,,\;\; t>0$,où $A(t)\,,B(t)\,,C(t)$ sont des fonctions données et c_j sont des constantes arbitraires. Appliquant l'opérateur inverse de l'opérateur $^{C}D_0^{\alpha}$, aux deux côtés de l'équation (3.11) et en utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$u(t)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j\frac{t^j}{j!}+I^{\alpha}\left[A(t)+B(t)u(t)+C(t)u(t)^{2}\right] \tag{3.12}$$

La méthode ADM donnée la solution par la série suivante :

$$u(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\,, \tag{3.13}$$

et la fonction non linéaire définie en (3.12) soit décomposée comme suit :

$$N(u)=u^{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n \tag{3.14}$$

où les A_n sont les polynômes Adomian. Substitution les séries de décomposition (3.13) et (3.14) dans les deux côtés de (3.12), on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} + I^{\alpha} \left[A(t) + B(t) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) + C(t) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right], \tag{3.15}$$

A partir de cette équation, les itérations sont déterminer par l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} + I^{\alpha}(A(t)), \\ u_{n+1} = I^{\alpha}(B(t) u_n + C(t) A_n), n \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3.2.1 *Considérons l'équation fractionnaire suivante de Riccati [11] :*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u = -u^2(t) + 1 \\ u(0) = 0, 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3.16}$$

La solution exacte, quand $\alpha = 1$ est :

$$u(t) = \frac{\varrho^{2t} - t}{\varrho^{2t} + 1} \tag{3.17}$$

On a quand $t \to +\infty$, $u(t) \to 1$.

Pour trouver la solution, nous utilisons le schéma suivant :

$$\begin{cases} u_0 = u(0) + I^{\alpha}(1) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ u_{n+1} = -I^{\alpha}(A_n), n \geq 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian pour le terme non linéaire tel que :

$$F(u) = u^2$$

En utilisant le schéma ci-dessus et la définition des polynômes d'Adomian, les premiers termes de la série de décomposition sont donnés par :

$$u_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha},$$

$$u_1 = -I^{\alpha}(A_0) = -I^{\alpha}(F(u_0)) = -I^{\alpha} u_0^2 = -\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2 \Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha}$$

$$u_2 = -I^{\alpha}(A_1) = -I^{\alpha}\left(F^{\prime}(u_0)\right) = -I^{\alpha}(2u_0 u_1) = \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)} t^{5\alpha}$$

$$u_3 = -I^{\alpha}(A_2) = -I^{\alpha}\left(u_2 F^{\prime}(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 F^{\prime}(u_0)\right) = -I^{\alpha}(2u_0 u_1) = -I^{\alpha}\left(2u_0 u_2 + u_1^2\right)$$

$$= \frac{\left(32\alpha^2 \Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\Gamma(1+3\alpha) + \Gamma(1+2\alpha)^2 \Gamma(1+5\alpha)\right)\Gamma(1+6\alpha)}{\alpha^4 \Gamma(1+3\alpha)^2 \Gamma(1+5\alpha)\Gamma(1+7\alpha)} t^{7\alpha}$$

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha} + \frac{16\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\alpha\Gamma(1+3\alpha)\Gamma(1+5\alpha)} t^{5\alpha} + ... \tag{3.19}$$

- Le premier cas :

remplaçons $\alpha = 1$ dans (3.19), on obtient la solution approximative sous forme d'une série :

$$u(t) = t - 0.333333t^3 + 0.133333t^5 - 0.0539683t^7 + 0.0218695t^9 - 0.00886324t^{11}$$

$$+0.00359213t^{13} - 0.00145583t^{15} + 0.000590027t^{17} - 0.000239129t^{19}$$

$$+0.0000969154t^{21}$$

- Le deuxième cas :

Dans ce cas, nous examinerons l'équation fractionnaire de Riccati (3.19). Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient :

$$u(t) = 2\sqrt{t} - 3.00901t^{\frac{3}{2}} + 7.24332t^{\frac{5}{2}} - 19.6157t^{\frac{7}{2}} + 55.9634t^{\frac{9}{2}} - 164.385t^{\frac{11}{2}}$$

$$+491.925t^{\frac{13}{2}} - 1491.22t^{\frac{15}{2}} + 4563.65t^{\frac{17}{2}} - 14068.5t^{\frac{19}{2}} + 43620.6t^{\frac{21}{2}}$$

Pour simplifier, soit $t^{\frac{1}{2}} = x$, alors

$$u(t) = 2x - 3.00901x^3 + 7.24332x^5 - 19.6157x^7 + 55.9634x^9 - 164.385x^{11}$$

$$+491.925x^{13} - 1491.22x^{15} + 4563.65x^{17} - 14068.5x^{19} + 43620.6x^{21}.$$

3.3 Application de (VIM) aux équations différentielles fractionnaires

Soit l'équation :

$$\frac{{}^C D^\alpha u}{Dt^\alpha} = f(t,u), u(0) = u_0 \tag{3.20}$$

Dans le cas $0 < \alpha \leq 1$,on ré-écrit l'équation (3.20) sous la forme suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{{}^C D^\alpha u}{Dt^\alpha} - \frac{du}{dt} = f(t,u)$$

ou bien

$$\frac{du}{dt}+\left[\frac{{}^{C}D^{\alpha}u}{Dt^{\alpha}}-\frac{du}{dt}-f\left(t,u\right)\right]=0.$$

On peut utiliser l'un des algorithmes suivants pour trouver les approximations des solutions de (3.20) :

$$u_{n+1}\left(t\right)=u_{n}\left(t\right)-\int\limits_{0}^{t}\left[\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}\left(s\right)}{Ds^{\alpha}}-f\left(s,u_{n}\left(s\right)\right)\right]ds,$$

$$u_{n+1}\left(t\right)=u_{n}\left(t\right)-\int\limits_{0}^{t}\left[-\frac{du_{n}\left(s\right)}{ds}+\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}\left(s\right)}{\left(Ds^{\alpha}\right)}-f\left(s,u_{n}\left(s\right)\right)\right]ds,$$

Dans le cas où $1<\alpha\leq 2$,on ré-écrit l'équation (3.20) sous la forme suivante :

$$\frac{d^{2}u}{dt^{2}}+\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}}{Dt^{\alpha}}-\frac{d^{2}u}{dt^{2}}=f\left(t,u\right),$$

ou bien

$$\frac{d^{2}u}{dt^{2}}+\left[\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}}{Dt^{\alpha}}-\frac{d^{2}u}{dt^{2}}-f\left(t,u\right)\right]=0,$$

On peut utiliser l'un des algorithmes suivants pour trouver les approximations des solutions de (3.20) :

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_{n}\left(t\right)+\int\limits_{0}^{t}\left(s-t\right)\left[\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}(s)}{Ds^{\alpha}}-f\left(s,u_{n}\left(s\right)\right)\right]ds \\ u_{n+1}=u_{0}\left(t\right)+\int\limits_{0}^{t}\left(s-t\right)\left[\frac{{}^{C}D^{\alpha}u_{n}(s)}{Ds^{\alpha}}-\frac{d^{2}u_{n}(s)}{ds^{2}}-f\left(s,u_{n}\left(s\right)\right)\right]ds \end{cases}$$

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation différentielle fractionnaires suivante pour* $0<\alpha\leq 1$:

$$\begin{cases} \frac{{}^{C}D^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$$

On a :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left[\frac{{}^{C}Du_n(x,s)}{Ds^{\alpha}} - \frac{\partial^2 u_n(x,s)}{\partial x^2}\right] ds,$$

On commence par : $u_0(x,t) = sinx$, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \sin x \\
u_1(x,t) &= (1-t)\sin x \\
u_2(x,t) &= \left[1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\sin x, \\
u_3(x,t) &= \left[1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{3t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}\right]\sin x, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

3.4 Application de (HPM) aux équations différentielles fractionnaires

La méthode (HPM) qui fournit une solution approximative analytique est appliquée à plusieurs des équations non-linéaires. Pour illustrer cette méthode nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$ {}^{C}D^{\alpha}u(t) = N(u) + g(t), \qquad t>0 \tag{3.21}$$

où $m-1 < \alpha < m, N$ est un opérateur non-linéaire, $g(t)$ est une fonction analytique connue et ${}^{C}D^{\alpha}u$ est la dérivé fractionnaire au sens du Caputo d'ordre α. Par la technique de l'homotopie, nous construisons un homotopie suivant :

$$(1-p)\,L\left[\phi\left(t,p\right)-\phi_{0}\left(t\right)\right]=-p\left({}^{C}D^{\alpha}\phi\left(t,p\right)-N\left(\phi\left(t,p\right)\right)-g\left(t\right)\right) \tag{3.22}$$

où $p\in[0,1]$ est un paramètre entonçant, ϕ_0 est une estimation initiale de $u\left(t\right)$ et L est un opérateur linéaire qui peut être définie comme $L=\frac{d^m}{dt^m}$ ou $L=\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$.

Lorsque $p=0,(3.22)$ devient :

$$L\left[\phi\left(t,0\right)-\phi_{0}\left(t\right)\right]=0. \tag{3.23}$$

Et lorsque $p=1$, equation (3.22) devient Eq (3.21). D'aprés HPM, nous pouvons utiliser en premier paramètre enfonçant p comme un petit paramètre et supposons que la solution d'équation (3.21) peut être écrite comme une série suivante :

$$\phi=\phi_0+p\phi_1+p^2\phi_2+... \tag{3.24}$$

On remplace (3.24) dans (3.22), et par identification des termes avec les puissances identiques de p, nous obtenons les équations :

$L\left[\phi_1\right]=-\left({}^{C}D^{\alpha}\phi_0-N_0\left(\phi_0\right)-g\left(t\right)\right),$

$$L\left[\phi_2\right]=L\left[\phi_1\right]-\left({}^{C}D^{\alpha}\phi_1-N_1\left(\phi_0,\phi_1\right)\right)$$

$$L\left[\phi_3\right]=L\left[\phi_2\right]-\left({}^{C}D^{\alpha}\phi_2-N_2\left(\phi_0,\phi_1,\phi_2\right)\right),$$

$$L\left[\phi_4\right]=L\left[\phi_3\right]-\left({}^{C}D^{\alpha}\phi_3-N_3\left(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\phi_3\right)\right)$$

où $N\left(\phi_0 + p\phi_1 + p^2\phi_2 + ...\right) = N_0\left(\phi_0\right) + pN_1\left(\phi_0, \phi_1\right) + p^2 N_2\left(\phi_0, \phi_1, \phi_2\right) + ...$

La solution approximative d'Eq (3.21), par concéquant, peut être obtenue comme :

$$u = \lim_{p \to 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + ... \tag{3.25}$$

En appliquant l'opérateur I^α aux les deux côtés de l'Eq (3.21), on trouve :

$$u\left(t\right) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}\left(0_+\right)\frac{t^k}{k!} + I^\alpha N\left(u\right) + I^\alpha g\left(t\right),\ \ t > 0 \tag{3.26}$$

Négligeant le terme non linéaire $I^\alpha N\left(u\right)$, nous pouvons utiliser la partie restante comme l'estimation initiale de la solution, c'est-à-dire :

$$\phi_0\left(t\right) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}\left(0_+\right)\frac{t^k}{k!} + I^\alpha g\left(t\right), \quad t > 0 \tag{3.27}$$

Exemple 3.4.1 *On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = -u^2\left(t\right) + 1, & \textit{avec } 0 < \alpha \leq 1 \\ u\left(0\right) = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Si $\alpha = 1$ la solution exacte est $u\left(t\right) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

D'aprés l'équation (3.22), nous avons l'homotopie suivante :

$$\left(1 - p\right) L\left[\phi\left(t, p\right) - \phi_0\left(t\right)\right] = -p\left({}^C D^\alpha \phi\left(t, p\right) - \phi^2\left(t, p\right) - 1\right). \tag{3.29}$$

D'aprés l'équation (3.29), nous avons l'éstimation initiale :

$$\phi_0 = \frac{t^\alpha}{\Gamma\left(\alpha + 1\right)} \tag{3.30}$$

En remplaçant (3.24) et l'éstimateur initiale (3.30) dans l'homotopie et par identification des termes avec les puissances identique de p, nous obtenons l'ensemble des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire suivant :

$$p^1 :^C D^\alpha \phi_1 = -\left({}^C D^\alpha \phi_0 + \phi_0^2 - 1\right),$$

$$p^2 :^C D^\alpha \phi_2 =^C D^\alpha \phi_1 - \left({}^C D^\alpha \phi_1 + 2\phi_0\phi_1\right),$$

$$p^3 :^C D^\alpha \phi_3 =^C D^\alpha \phi_2 - \left({}^C D^\alpha \phi_2 + \phi_1^2 + 2\phi_0\phi_2\right),$$

$$p^n :^C D^\alpha \phi_n =^C D^\alpha \phi_{n-1} - \left({}^C D^\alpha \phi_{n-1} + \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i u_i\right)^2\right]_{\lambda=0}\right)$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution d'Eq (3.30) sont donné par :

$$\phi_1 = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha+2)}t^{2\alpha+1};$$

$$\phi_2 = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha+2)}t^{2\alpha+1} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha+3)}t^{\alpha+2} + 2\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(2\alpha+2)\Gamma(3\alpha+3)}t^{3\alpha+2};$$

$$\begin{aligned}\phi_3 = {} & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha+2)}t^{2\alpha+1} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(2\alpha+3)}t^{\alpha+2} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{6\Gamma(2\alpha+1)}t^3 + \\ & 4\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(2\alpha+2)\Gamma(3\alpha+3)}t^{3\alpha+2} + 2\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(2\alpha+4)}\left(\frac{\Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+2)} + \frac{\Gamma(2\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)}\right)t^{2\alpha+3}\end{aligned}$$

$$-\frac{\Gamma\left(2\alpha+1\right)^{2}\Gamma\left(4\alpha+3\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)^{4}\Gamma\left(2\alpha+2\right)^{2}\Gamma\left(4\alpha+4\right)}t^{4\alpha+3}-4\frac{\Gamma\left(2\alpha+1\right)\Gamma\left(3\alpha+2\right)\Gamma\left(4\alpha+3\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)^{4}\Gamma\left(2\alpha+2\right)\Gamma\left(3\alpha+3\right)\Gamma\left(4\alpha+4\right)}t^{4\alpha+3}$$

et la solution approximative de l'équation (3.28) par conséquant, peut être obtenu aisément

$$u=\lim_{p\to 1}\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2+...$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Nous avons citer par exemple les trois méthodes ADM, VIM et HPM. Nous avons pris des exemples d'équations différentielles ordinaires. Pour l'équation de Riccati fractionnaire, nous avons essayé de donné un algorithme de résolution de cette équation par les méthodes précédentes, on présente des résultats numériques qui démontre l'efficacité de ces méthodes. Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autre équations et developper d'autre méthodes numériques de résolution des équations différentielles à dérivées fractionnaires, mois coûteuses et plus précises que celle proposées dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics. Journal of mathematical analysis and applications, 135(2) (1988), 501–544.

[2] G. Adomian, Solving frontier problems of physics : the decomposition method, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Z. Ayati and J. Biazar, On the convergence of homotopy perturbation method, Journal of the Egyptian Mathematical society, 23(2) (2015), 424–428.

[4] Basem Attili et Rima Cheaytou, Equations différentielles ordinaires avec applications, ellipses, 2016.

[5] Y. Cherruault, G. Saccomandi, and B. Some, New results for convergence of adomian's method applied to integral equations. Mathematical and Computer Modelling, 16(2) (1992), 85–93.

[6] S.H. Hosseinniaa, A. Ranjbara, S. Momanib, Using an enhanced homotopy perturbation method in fractional differential equations via deforming the linear part, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 3138–3149.

[7] Ji-Huan He, Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique : some examples. International journal of non-linear mechanics, 34(4) (1999), 699–708.

[8] Ji-Huan He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Applied Mathematics and Computation, 114 (2000), 115–123.

[9] Ji-Huan He, Variational iteration method—some recent results and new interpretations. Journal of computational and applied mathematics, 207(1) (2007), 3–17.

[10] Ji-Huan He, Homotopy perturbation technique, Computer methods in applied mechanics and engineering, 178(3-4) (1999), 257–262.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, volume 204. elsevier, North-Holland, 2006.

[12] Mohammed Hazi, Equations différentielles ordinaires du premier et second ordre :assise théorique et applications, 2018.

[13] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley, Sons Inc, New York, 1993.

[14] Z. M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. Mathematical and Computer Modelling, 51(9-10) (2010), 1181–1192.

[15] I. Podlubny, Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. (Vol. 198). Academic press, 1998.

[16] M. Tatari and M. Dehghan. On the convergence of he's variational iteration method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 207(1) (2007), 121–128.

[17] Uri M Ascher et Linda R Petzold, Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations, amazon, 1997.

الملخص:

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميمات للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة، قمنا بدراسة التقريبات العددية لحل مسألة تفاضلية كسرية باستخدام طرق الاضطراب الهوموتوبي، التكرار التغايري، التحلل الآدومي، باستخدام المشتقة الكسرية بمعنى كابيتو. لقد عالجنا عدة أمثلة، بالإضافة إلى معادلة ريكاتي ذات الرتبة الكسرية والتي حاولنا إعطاء خوارزمية حل لها بهذه الطرق، مع الحصول على نتائج عددية.

الكلمات المفتاحية:

المشتقة الكسرية بمعنى كابيتو، المشتقة الكسرية بمعنى ريمان-ليوفيل، المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية، طريقة الاضطراب الهوموتوبي، طريقة التكرار التغايري، طريقة التحلل الآدومي.

Résumé:

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques. Dans ce mémoire, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un problème différentiel fractionnaire par les méthodes ADM, VIM et HPM, en utilisant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Nous avons traité plusieurs exemples, ainsi que l'équation de Ricatti d'ordre fractionnaire pour laquelle nous avons essayé de donné un algorithme de résolution par ces méthodes, avec des résultats numériques.

Mots – clés:

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville Equation différentielle fractionnaire linéaire et non linéaire, Méthode de perturbation de l'homotopie, Méthode d'itération variationnelle, Méthode de décompostion d'Adomian.

Abstract:

Fractional differential equations are generalizations of classical differential equations. In this memory, we study numerical approximations of the solution of a fractional differential problem by the ADM, VIM and HPM methods, using the fractional derivative in the sense of Caputo. We have treated several examples, as well as the Ricatti equation of fractional order for which we have tried to give a solution algorithm by these methods, with numerical results.

Key words:

Fractional derivative in the sense of Caputo, Fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville, Linear and nonlinear fractional differential equation, Homotopy pertubation method, Variational iteration method, Adomian decomposition method.