

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse.**

Par

**Youb fayza**

Titre :

**Point fixe commun et applications aux équations intégrales**

Devant le Jury :

Dr. Kaboul Hanane	UMKB	Présidente
Dr. Berbiche Mohamed	UMKB	Encadreur
Dr. Laadjal Baya	UMKB	Examinatrice

**Soutenu Publiquement le Juin 2024**

## Dédicace

*Je dédie ce humble travail À*

*A la mémoire de mon Père.*

*A la mémoire de ma mère.*

*A mon mari*

*A mes chères enfants*

*A mes très chères soeurs et mes frères.*

*A tous les membres de ma*

*famille, petits et grands.*

*A mes chères ami(e)s.*

*A tous les étudiant(e)s d'université de*

*Mohamed Khider, BISKRA.*

## REMERCIEMENTS

*Je tiens tout d'abord à remercier.....*

*..J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu*

*Allah qui m'a donné la volonté et le courage*

*pour la réalisation de ce travail.*

*Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon*

*encadreur : Dr.Berbiche Mohamed, pour ses précieux*

*conseils, son aide et son encouragement.*

*Je remercie vivement Dr.KABOUL Hanane*

*de l'honneur qu'il me fait en présidante ce jury.*

*J'adresse mes remerciements à Dr.DAKHIA*

*Ghania qui m'a fait l'honneur de juger ce travail.*

*Nous adressons également un grand merci à tous*

*les enseignants de département de Mathématiques*

*ainsi que l'administration en général.*

*Et en fin j'adresse mes sincères remerciements à*

*mes parents, mes frères et soeurs, mes amis et*

*à tous qui sont contribué de près ou de loin à*

*l'élaboration de ce travail...*

.....

# Notations et symbols

$ \cdot $	: une norme dans $L^2(\Omega)$ ou valeur absolue.
$\ \cdot\ $	: une norme.
$(\cdot, \cdot)$	: produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: crochet de dualité.
$H'$	: le dual topologique d'un espace H.
$\mathfrak{S}(U, H)$	: l'espace vectoriel des applications linéaires continues de U dans H.
$\Delta$	: le laplacien.
$D(A)$	: le domaine de définition de l'opérateur A.
$\Gamma$ ou $\partial\Omega$	: frontière de $\Omega$ .
inf	: borne inférieure.
sup	: borne supérieure.
max	: le maximum
div	: la divergence.
$\frac{\partial}{\partial v}$ ou $\partial_v$	: la dérivée normale extérieurs.

# Table des matières

Notations et symbols	iii
Table des matières	iv
Introduction	1
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Semi continuité supérieure . . . . .	3
1.2 Principe de contraction de Banach . . . . .	4
1.3 Applications Compatibles . . . . .	4
<b>2 Théorèmes du point fixe commun</b>	<b>15</b>
2.1 Théorèmes du point fixe commun de type Gregus . . . . .	15
<b>3 Applications aux équations intégrales non linéaires</b>	<b>23</b>
Conclusion	30

# Introduction

Le théorème du point fixe, généralement connu comme le principe de contraction de Banach ou le théorème du point fixe de Banach, apparut sous une forme explicite dans les travaux de Banach en 1922, qui stipule que toute application de contraction définie sur un espace métrique complet a un point fixe. Le principe de contraction de Banach assure, dans des conditions appropriées, l'existence et l'unicité d'un point fixe. Il est le plus simple et l'un des résultats les plus polyvalents de la théorie du point fixe.

De nombreux auteurs ont prolongé, généralisé et amélioré le théorème du point fixe de Banach de différentes manières. Un des résultats les plus importants de cette direction a été obtenu par SB Presic dans en généralisant le principe de contraction de Banach. En 1976, Jungck généralisé le principe de contraction de Banach en utilisant le concept de commutativité des applications.

En mathématiques appliquées, le théorème de point fixe commun se présente dans plusieurs contextes citons notamment la résolution de systèmes d'inéquations variationnelles, la recherche d'un point appartenant à plusieurs convexes, et la recherche d'un zéro commun à des opérateurs maximaux monotones.

L'étude de point fixe commun des applications satisfaisant des conditions de type contraction a été un domaine très vaste de l'activité de recherche au cours des trois dernières décennies. Ce fut le point tournant dans la "théorie de point fixe" où la notion de commutativité faible a été introduit par Sessa comme un outil optimal

d'obtenir des points fixes communs des applications.

Le présent mémoire contient trois principaux chapitres :

Le premier chapitre contient les outils nécessaires utilisés dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre on va étudier un nouveau type de contractions comme une généralisation des applications et on établit un théorème du point fixe commun de quadruple de auto-fonctions satisfaire certaines conditions de contractions généralisées introduit dans [B]. Notre principal résultat est prouvé l'existence d'un point fixe commun unique pour une classe distincte de fonctions. Dans la suite, on applique une conséquence de ce résultat principal à résoudre un système des équations intégrales simultanées de *Volterra-Hammerstein* avec retard infini qui est plus générale que les équations intégrales utilisés dans [B].

Dans le dernier chapitre on va citer sans démonstration un théorème de point fixe commun pour des fonctions contractantes plus générale que celui cité dans le deuxième chapitre, et une application à trouver la solution commune de système des équations intégrales non linéaires de type *Volterra-Hammerstein*.

# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

### 1.1 Semi continuité supérieure

**Définition 1.1.1** Soit  $X$  espace topologique,  $x_0 \in X$ ,  $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , on dit que  $f$  est semi continue supérieurement en  $x_0$  si l'un des propriétés équivalentes est vérifiée

(a)  $\forall \varepsilon > 0, \exists U$  voisinage de  $x_0$  tel que :

$$\forall x \in U : f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

(b)

$$\limsup f(x) \leq f(x_0),$$

On dit que  $f$  est semi continue supérieurement si l'un des propriétés suivantes équivalentes est vérifiée

(i)  $f$  est semi continue en tout point de  $X$

(ii)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  l'ensemble de sur niveau  $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$  fermé

(iii) l'hypigraphe  $\{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$  fermé



## 1.2 Principe de contraction de Banach

**Théorème 1.2.1** *Soit  $(X, d)$  une espace métrique complet,  $f : X \longrightarrow X$  une contraction. Alors  $f$  est un point fixe unique dans  $X$*

## 1.3 Applications Compatibles

Dans cette section, on introduit le concept de compatibilité de type (B) et montrer que sous certaines conditions, ce type d'applications est équivalent à la compatibilité et à la compatibles de type (A) dans un espace normé .

Tout au long de ce mémoire,  $X$  désigne un espace normé  $(X, \|\cdot\|)$  de norme  $\|\cdot\|$  .

Nous énonçons deux définitions [11] , motivées par [4] et [7] .

**Définition 1.3.1** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même. Deux applications  $S$  et  $T$  sont dites compatibles si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TSx_n\| = 0,$$

*pour chaque suite  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

*pour certains  $t \in X$ .*

**Définition 1.3.2** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même. Les applications  $S$  et  $T$  sont dits compatibles de type (A) si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| = 0$$

pour chaque  $\{x_n\}$  dans  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

pour certain  $t \in X$ .

De plus, on introduit

**Définition 1.3.3** Soient  $S$  et  $T$  deux applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même. Les applications  $S$  et  $T$  sont dits compatibles de type (B) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| \leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - St\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - SSx_n\| \right]$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| \leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - Tt\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tt - TTx_n\| \right]$$

prouvé que  $\{x_n\}$  est une séquence dans  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

pour certain  $t \in X$ .

Les propositions suivantes montrent que les définitions 1.3.1 et 1.3.2 sont équivalentes sous certaines conditions (voir [11])

**Proposition 1.3.1** Soient  $S$  et  $T$  deux applications continues d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Si  $S$  et  $T$  sont compatibles, alors ils sont compatibles de type (A).

**Proposition 1.3.2** Soient  $S$  et  $T$  des applications compatibles de type (A) d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Si l'un de  $S$  et  $T$  est continu, alors  $S$  et  $T$  sont compatibles.

Selon les propositions 1.3.1 et 1.3.2 on a :

**Proposition 1.3.3** *Soient  $S$  et  $T$  des applications continues d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Alors  $S$  et  $T$  sont compatibles si et seulement s'ils sont compatibles de type (A) .*

Par des exemples appropriés, P.P. Murthy, Y.J. Cho et B. Fisher [11] ont montré que la proposition 1.3.3 n'est pas vraie si  $S$  et  $T$  ne sont pas continus.

Les propositions suivantes montrent que les définitions 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3 sont équivalentes sous certaines conditions.

**Proposition 1.3.4** *Toute paire d'applications compatibles de type (A) est compatible de type (B). Supposons que  $S$  et  $T$  sont des applications compatibles de type (A), alors on a*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| \leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - St\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - SSx_n\| \right]$$

et

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| \leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - Tt\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tt - TTx_n\| \right]$$

comme dérivé.

**Proposition 1.3.5** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications continues d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Si  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B), alors ils sont compatibles de type (A) .*

**Preuve.** Soit  $\{x_n\}$  une suite dans  $X$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

pour certain  $t \in X$ . Puisque  $S$  et  $T$  sont continus, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| &\leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - St\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - SSx_n\| \right] \\ &= \|St - St\| = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| &\leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - Tt\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tt - TTx_n\| \right] \\ &= \|Tt - Tt\| = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $S$  et  $T$  sont des applications compatibles de type (A). Ceci termine la preuve. ■

**Proposition 1.3.6** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications continues d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Si  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B), alors ils sont compatibles.*

**Preuve.** Soit  $\{x_n\}$  une suite dans  $X$ , telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

pour certains  $t \in X$ . Puisque  $S$  et  $T$  sont continus, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SSx_n = St = \lim_{n \rightarrow \infty} STx_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TSx_n = Tt = \lim_{n \rightarrow \infty} TTx_n$$

De l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\|STx_n - TSx_n\| \leq \|STx_n - TTx_n\| + \|TTx_n - TSx_n\|.$$

Soit  $n \rightarrow \infty$  et prenant en compte que  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B), nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TSx_n\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|TTx_n - TSx_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - St\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - SSx_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|TTx_n - TSx_n\| \right]. \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

par conséquent,  $S$  et  $T$  sont compatibles. Ceci termine la preuve.

**Proposition 1.3.7** *Soient  $S$  et  $T$  deux auto-applications continues d'un espace normé  $X$  et si  $S$  et  $T$  sont compatibles, alors ils sont compatibles de type (B).*

■

En unifiant les propositions 1.3.4-1.3.7, nous avons

**Proposition 1.3.8** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications continues d'un espace normé  $X$  dans lui-même. Alors*

- (1)  *$S$  et  $T$  sont compatibles si et seulement s'ils sont compatibles de type (B).*
- (2)  *$S$  et  $T$  sont compatibles de type (A) si et seulement s'ils sont compatibles de type (B).*

Les exemples suivants montrent que la proposition 1.3.8 n'est pas vraie si  $S$  et  $T$  ne sont pas continus.

**Exemple 1.3.1** *Soit  $X = \mathbb{R}$ . On définit  $S$  et  $T : X \rightarrow X$  comme suit :*

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors  $S$  et  $T$  ne sont pas continus à  $t = 0$ . Considérons une séquence  $\{x_n\}$  dans  $X$  définie par  $x_n = n$ ,  $n = 1, 2$ . Alors pour  $n \rightarrow \infty$  on a

$$Sx_n = \frac{1}{n^4} \rightarrow t = 0, \quad Tx_n = \frac{1}{x^2} \rightarrow t = 0,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TSx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|n^8 - n^8\| = 0.$$

Cependant, les limites suivantes n'existent pas :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|n^8 - n^4\| = \infty \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - S0\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|S0 - SSx_n\| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|n^8 - 1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|1 - n^{16}\| \right] = \infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|n^8 - n^{16}\| = \infty, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - T0\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T0 - TTx_n\| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|n^8 - 2\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|2 - n^4\| \right] = \infty. \end{aligned}$$

Donc  $S$  et  $T$  sont compatibles mais ils ne sont ni compatibles de type (A) ni compatible de type (B).

**Exemple 1.3.2** Soit  $X = [0, 6]$  avec la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ . On définit  $S$  et  $T$  :

$X \rightarrow X$  par

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 3), \\ 6 & \text{si } x \in [3, 6), \end{cases} \quad \text{et} \quad T(x) = \begin{cases} 6 - x & \text{si } x \in [0, 3), \\ 6 & \text{si } x \in [3, 6). \end{cases}$$

Alors  $S$  et  $T$  ne sont pas continus en  $t = 3$ .

Maintenant, nous affirmons que  $S$  et  $T$  ne sont pas compatibles mais ils sont compatibles de type (A) et donc compatibles de type (B).

Pour voir cela, supposons que  $\{x_n\} \subseteq [0, 6]$  et que  $Sx_n, Tx_n \rightarrow t$ . Par définition de  $S$  et  $T$ ,  $t \in [3, 6]$ . Puisque  $S$  et  $T$  s'accordent sur  $[3, 6]$ , il suffit de considérer  $t = 3$ . On peut donc supposer que  $x_n \rightarrow 3$  et que  $x_n < 3$  pour tout  $n$ . Alors  $Tx_n = 6 - x_n \rightarrow 3$  du à droite et  $Sx_n = x_n \rightarrow 3$  en partant de la gauche. Ainsi, puisque  $x_n < 3$  et  $6 - x_n > 3$ , pour tout  $n$ ,

$$\|STx_n - TSx_n\| = \|6 - (6 - x_n)\| \rightarrow 3.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| &= \|6 - 6\| \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - S3\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|S3 - SSx_n\| \right] &= \frac{1}{2} [\|6 - 6\| + \|6 - x_n\|] \rightarrow \frac{3}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| &= \|(6 - x_n) - x_n\| \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - T3\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T3 - TTx_n\| \right] &= \frac{1}{2} [\|(6 - x_n) - 6\| + \|6 - 6\|] \rightarrow \frac{3}{2} \end{aligned}$$

comme  $x_n \rightarrow 3$ . Par conséquent,  $S$  et  $T$  sont tous deux des applications compatibles

de type (A) et mappages compatibles de type (B) mais ils ne sont pas compatibles.

**Exemple 1.3.3** Soit  $X = [0, \infty)$  avec la norme euclidienne. On définit  $S$  et  $T : X \rightarrow X$  par

$$S(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x \in [1, \infty), \end{cases} \quad \text{et } T(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0, 1), \\ 2 & \text{si } x \in [1, \infty), \end{cases}$$

Alors  $S$  et  $T$  ne sont pas continus à  $t = 1$ .

Maintenant, on affirme que  $S$  et  $T$  ne sont ni compatibles de type (A) ni compatibles de type (B), mais ils sont compatibles. Pour vérifier cela, nous considérons que  $\{x_n\} \subseteq [0, \infty)$  converge vers zéro, comme on le sait d'après définition de  $S$  et  $T$ , et que  $Sx_n, Tx_n \rightarrow t = 1$ . Alors  $Sx_n = 1 + x_n \rightarrow 1$  à droite et  $Tx_n = 1 - x_n \rightarrow 1$  en partant de la gauche. Ainsi, puisque  $1 + x_n > 1$  et  $1 - x_n < 1$  pour tout  $n$ ,

$$\|STx_n - TSx_n\| = \|(2 - x_n) - 2\| \rightarrow 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| &= \|(2 - x_n) - x_n\| \rightarrow 2 \neq 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - S1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|S1 - SSx_n\| \right] &= \frac{1}{2} [\|(2 - x_n) - 1\| + \|1 - 1\|] \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| &= \|2 - 1\| = 1 \neq 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - T1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T1 - TTx_n\| \right] &= \frac{1}{2} [\|2 - 2\| + \|2 - x_n\|] \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Comme  $x_n \rightarrow 0$ . Donc  $S$  et  $T$  sont compatibles mais ils ne sont ni compatibles de type (A) ni compatibles de type (B).



**Exemple 1.3.4** Soit  $X = [0, 2]$  avec la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ . On définit  $S$  et  $T$  :  
 $X \rightarrow X$  par

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 2] \end{cases} \quad \text{et } T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Alors  $S$  et  $T$  ne sont pas continus à  $t = \frac{1}{2}$ . Affirmons maintenant que  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B) mais ils ne sont ni compatibles ni compatibles de type (A).

Car supposons que  $\{x_n\} \subseteq [0, 2]$  et que  $Sx_n, Tx_n \rightarrow t = \frac{1}{2}$ . Par définition de  $S$  et  $T$ ,  $t = \frac{1}{2}$ . On peut donc supposer  $x_n \rightarrow 0$ . Alors  $Sx_n = \frac{1}{2} + x_n \rightarrow \frac{1}{2}$  à droite et  $Tx_n = \frac{1}{2} - x_n \rightarrow \frac{1}{2}$  à gauche. Aussi,

$$\|STx_n - TSx_n\| = \|(1 - x_n) - 0\| \rightarrow 1 \neq 0$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - x_n) - x_n\| = 1, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| STx_n - S\frac{1}{2} \right\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| S\frac{1}{2} - SSx_n \right\| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - x_n) - 2\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|2 - 1\| \right] = 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|TSx_n - SSx_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|0 - 1\| = 1, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| TSx_n - T\frac{1}{2} \right\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| T\frac{1}{2} - TTx_n \right\| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|0 - 1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|1 - x_n\| \right] = 1. \end{aligned}$$

Donc  $S$  et  $T$  ne sont ni compatibles ni compatibles de type (A) mais ils sont compa-

tibles de type (B).

On a besoin des propriétés suivantes des applications compatibles de type (B) pour les théorèmes principaux :

**Proposition 1.3.9** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications compatibles de type (B) d'un espace  $X$  dans lui-même. Si  $St = Tt$  pour certain  $t \in X$ , alors  $STt = SSt = TTt = TSt$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\{x_n\}$  une séquence dans  $X$  définie par  $x_n = t, n = 1, 2, \dots$  pour certains  $t \in X$  et  $St = Tt = z$ , disons. Alors nous avons  $Sx_n, Tx_n \rightarrow St$  comme  $n \rightarrow \infty$ .

Comme  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B), on a

$$\begin{aligned} \|STt - TTt\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - SSt\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|SST - SSx_n\| \right] \\ &= \|Sz - Sz\| = 0 \end{aligned}$$

On a donc  $STt = TTt$ . On a donc  $STt = SSt = TTt = TSt$  puisque  $St = Tt$ . Ceci termine la preuve.

De la proposition . et de la proposition . de **G.Jungck** [5] on a immédiatement . ■

**Proposition 1.3.10** *Soient  $S$  et  $T$  deux applications compatibles de type (B) d'un espace normé  $X$  dans lui même. Supposons que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$$

pour certain  $t \in X$ . Alors

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TTx_n = St \text{ si } S \text{ est continue.}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} SSx_n = Tt \quad \text{si } T \text{ est continue en } t.$$

(3)

$$STt = TSt \quad \text{et } St = Tt \quad \text{si } S \text{ et } T \text{ sont continus en } t.$$

**Preuve.** (1) On suppose que  $S$  est continue en  $t$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = t$  pour certain  $t \in X$ , on a

$$SSx_n, STx_n \rightarrow St \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Puisque  $S$  et  $T$  sont compatibles de type (B), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - TTx_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - TTx_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|STx_n - St\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|St - SSx_n\| \right] \\ &= \|St - St\| = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TTx_n = St.$$

Ceci termine la preuve.

(2) La preuve de  $\lim_{n \rightarrow \infty} SSx_n = Tt$  obtenu par des arguments similaires à ceux de (1).

(3) Supposons que  $S$  et  $T$  sont continus en  $t$ . Puisque  $Tx_n \rightarrow t$  comme  $n \rightarrow \infty$  et  $S$  est continue en  $t$ , par Proposition 1.3.10 (1),  $TTx_n \rightarrow St$  comme  $n \rightarrow \infty$ . D'autre part,  $T$  est également continu en  $t$ ,  $TTx_n \rightarrow Tt$ . Ainsi, on a  $St = Tt$ , de l'unicité de la limite et ainsi par la proposition 1.3.9,  $STt = TSt$ . Ceci termine la preuve. ■

# Chapitre 2

## Théorèmes du point fixe commun

### 2.1 Théorèmes du point fixe commun de type

#### Gregus

On note par  $F$  l'ensemble des applications  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}^+$  tel que chaque  $\varphi$  est semi-continu supérieurement, non décroissante dans chaque variable de coordonnées, et  $\varphi(t) < t$  pour tout  $t > 0$ .

Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même telles que

$$A(X) \subset T(X) \quad \text{et} \quad B(X) \subset S(X) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \|Ax - By\|^p \leq & \varphi(a \|Sx - Ty\|^p + (1 - a) \max \{ \|Sx - Ax\|^p, \|Ty - By\|^p, \\ & \|Sx - Ax\|^{\frac{p}{2}} \|Ty - By\|^{\frac{p}{2}}, \|Ty - Ax\|^{\frac{p}{2}} \|Sx - By\|^{\frac{p}{2}}, \\ & \frac{1}{2} [\|Ty - Ax\|^p + \|Sx - By\|^p] \} ) \end{aligned} \quad (2.2)$$

pour tout  $x, y$  dans  $X$ , où  $0 < a < 1$ ,  $p \geq 1$  et  $\varphi \in F$ .

Alors, d'après (2.1), puisque  $A(X) \subset T(X)$ , pour un point arbitraire  $x_0 \in X$  il existe

un point  $x_1 \in X$  tel que  $Ax_0 = Tx_1$ , et pour ce point  $x_1$  on peut choisir un point  $x_2 \in X$  tel que  $Bx_1 = Sx_2$  car  $B(X) \subset S(X)$ , et ainsi de suite.

De manière inductive, on peut définir une suite  $\{y_n\}$  dans  $X$  telle que

$$y_{2n} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n} \quad \text{et} \quad y_{2n+1} = Sx_{2n+2} = Bx_{2n+1} \quad (2.3)$$

pour tout  $n = 0, 1, 2, \dots$

On a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 2.1.1** ([13]) *Pour tout  $t > 0$ ,  $\varphi(t) < t$  si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$$

où  $\varphi^n$  désigne la composition  $n$  fois répétée de  $\varphi$  avec lui-même.

**Lemme 2.1.2** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même satisfaisant les conditions (2.1) et (2.2). Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_{n+1}\| = 0$$

où  $\{y_n\}$  est la séquence dans  $X$  définie par (2.3)

**Preuve.** De (2.2) et (2.3) on a

$$\begin{aligned} \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p &= \|Ax_{2n} - Bx_{2n+1}\|^p \\ &\leq \varphi \left( a \|y_{2n-1} - y_{2n}\|^p + (1-a) \max \left\{ \|y_{2n-1} - y_{2n}\|^p, \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p, \|y_{2n-1} - y_{2n}\| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \|y_{2n} - y_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \|y_{2n-1} - y_{2n+1}\|^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2} [\|y_{2n} - y_{2n}\|^p + \|y_{2n-1} - y_{2n+1}\|^p] \right\} \right). \end{aligned}$$

Si  $\|y_{2n} - y_{2n+1}\| > \|y_{2n-1} - y_{2n}\|$  dans l'inégalité ci-dessus, alors ce qui est une contradiction.

Ainsi  $\|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p \leq \varphi (\|y_{2n-1} - y_{2n}\|^p)$ .

$$\begin{aligned} \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p &\leq \varphi (a \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p + (1 - a) \max \{ \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p, \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p, \\ &\quad \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p, 0, \frac{1}{2} [\|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p + \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p] \}) \\ &< \|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p, \end{aligned}$$

De même, on a  $\|y_{2n+1} - y_{2n+2}\|^p \leq \varphi (\|y_{2n} - y_{2n+1}\|^p)$ . ■

Il s'ensuit que  $\|y_n - y_{n+1}\|^p \leq \varphi (\|y_{n-1} - y_n\|^p) \leq \dots \leq \varphi^n (\|y_0 - y_1\|^p)$ .

Il résulte du lemme 2.1.1 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_{n+1}\| = 0.$$

Ceci termine la preuve.

**Lemme 2.1.3** ([21]) *Soit  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace normé  $X$  vers lui-même satisfaisant les conditions (2.1) et (2.2). Alors la suite  $\{y_n\}$  définie par (2.3) est une séquence de Cauchy dans  $X$ .*

**Preuve.** En vertu du lemme 2.1.2 il suffit de montrer qu'une sous-suite  $\{y_{2n}\}$  de  $\{y_n\}$  n'est pas une suite de **Cauchy** dans  $X$ . Alors il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour chaque entier pair  $2k$ , il existe des entiers pairs  $2m(k)$  et  $2n(k)$  avec  $2m(k) > 2n(k) \geq 2k$  tel que

$$\|y_{2m(k)} - y_{2n(k)}\| > \varepsilon \tag{2.4}$$

Pour chaque entier pair  $2k$ , soit  $2m(k)$  le plus petit entier pair excédent  $2n(k)$  satisfaisant (2.4), c'est-à-dire

$$\|y_{2n(k)} - y_{2m(k)-2}\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| > \varepsilon. \tag{2.5}$$

Alors pour chaque entier pair  $2k$  on a

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| \\ &\leq \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)-2}\| + \|y_{2m(k)-2} - y_{2n(k)-1}\| + \|y_{2m(k)-1} - y_{2m(k)}\| \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 2.1.2 et (2.5) que

$$\|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| \rightarrow \varepsilon \text{ comme } k \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

De l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)-1}\| - \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| \right| \leq \|y_{2m(k)-1} - y_{2m(k)}\|$$

et

$$\begin{aligned} &\left| \|y_{2n(k)+1} - y_{2m(k)-1}\| - \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| \right| \\ &\leq \|y_{2m(k)-1} - y_{2m(k)}\| + \|y_{2n(k)} - y_{2n(k)+1}\|. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.2 et (2.6), comme  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\|y_{2n(k)} - y_{2m(k)-1}\| \rightarrow \varepsilon \quad \text{et} \quad \|y_{2n(k)+1} - y_{2m(k)-1}\| \rightarrow \varepsilon. \quad (2.7)$$

Donc, d'après (2.2) et (2.3), on a

$$\begin{aligned}
 \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\| &\leq \|y_{2n(k)} - y_{2n(k)+1}\| + \|Ax_{2m(k)} - B_{2m(k)}\| \\
 &\leq \|y_{2n(k)} - y_{2n(k)+1}\| + \\
 &\quad \left[ \varphi \left( a \|y_{2m(k)-1} - y_{2n(k)}\|^p + (1-a) \max \left\{ \|y_{2m(k)-1} - y_{2m(k)}\|^p, \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \|y_{2n(k)} - y_{2n(k)+1}\|^p, \|y_{2m(k)-1} - y_{2m(k)}\|^{\frac{p}{2}} \|y_{2m(k)-1} - y_{2n(k)+1}\|^{\frac{p}{2}}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\|^{\frac{p}{2}} \|y_{2m(k)-1} - y_{2n(k)+1}\|^{\frac{p}{2}}, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \|y_{2n(k)} - y_{2m(k)}\|^p + \|y_{2m(k)-1} - y_{2n(k)+1}\|^p \right\} \right]^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi \in F$ , d'après le lemme 2.1.2, (2.6) et (2.7) on a

$$\varepsilon \leq [\varphi (a \varepsilon^p + (1-a) \max \{0, 0, \varepsilon^p\})]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{2.8}$$

En passant à la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$  dans (2.8), ce qui est une contradiction. Donc  $\{y_{2n}\}$  est une suite de Cauchy dans  $X$ . Ceci termine la preuve. ■

Maintenant on passe au théorème de point fixe commun

**Théorème 2.1.1 ([21])** *Soient  $A, B, S$  et  $T$  des applications d'un espace de Banach  $X$  dans lui-même satisfaisant les conditions (2.1) et (2.2). On suppose que l'un des applications  $A, B, S$  et  $T$  continue, et les couples  $(A, S)$  et  $(B, T)$  sont compatibles de type  $(B)$ . Alors  $A, B, S$ , et  $T$  ont un unique point fixe commun  $z$  dans  $X$ .*

**Preuve.** Soit  $\{y_n\}$  la séquence dans  $X$  définie par (2.3). D'après le lemme 2.1.3,  $\{y_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $X$  et donc elle converge vers un certain point  $z$  dans  $X$ .

Par conséquent, les sous-suites  $\{Ax_{2n}\}, \{Bx_{2n+1}\}, \{Sx_{2n}\}$  et  $\{Tx_{2n+1}\}$  de  $\{y_n\}$  convergent également vers  $z$ .

On suppose maintenant que  $A$  continue. Comme  $A$  et  $S$  sont compatibles de type



(B), il découle de la proposition 1.3.10 que

$$ASx_n \text{ et } SSx_{2n} \rightarrow Az \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

D'après (2.2) nous avons

$$\begin{aligned} \|ASx_{2n} - Bx_{2n+1}\|^p &\leq \varphi(a \|SSx_{2n} - Tx_{2n+1}\|^p + (1-a) \max\{\|SSx_{2n} - ASx_{2n}\|^p, \|Tx_{2n+1} - Bx_{2n+1}\|^p, \\ &\|SSx_{2n} - ASx_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \|Tx_{2n+1} - Bx_{2n+1}\|^{\frac{p}{2}}, \|Tx_{2n+1} - ASx_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \|SSx_{2n} - Bx_{2n+1}\|^{\frac{p}{2}}, \\ &\frac{1}{2} [\|Tx_{2n+1} - ASx_{2n}\|^p + \|SSx_{2n} - Bx_{2n+1}\|^p]\}) \end{aligned}$$

En laissant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|Az - z\|^p &\leq \varphi(a \|Az - z\|^p + (1-a) \max\{0, 0, 0, \|z - Az\|^p + \|Az - z\|^p\}) \\ &< \|Az - z\|^p, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. On a donc  $Az = z$ . Puisque  $A(X) \subset T(X)$ , il existe un point  $u \in X$  tel que  $z = Az = Tu$ .

Toujours d'après (2.2), nous avons

$$\begin{aligned} \|ASx_{2n} - Bu\|^p &\leq \varphi(a \|SSx_{2n} - Tu\|^p + (1-a) \max\{\|SSx_{2n} - ASx_{2n}\|^p, \|Tu - Bu\|^p, \\ &\|SSx_{2n} - ASx_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \|Tu - Bu\|^{\frac{p}{2}}, \|Tu - ASx_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \|SSx_{2n} - Bu\|^{\frac{p}{2}}, \\ &\frac{1}{2} [\|Tu - ASx_{2n}\|^p + \|SSx_{2n} - Bu\|^p]\}) \end{aligned}$$

En laissant  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \in F$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|z - Bu\|^p &\leq \left( \varphi(1-a) \max\left\{0, \|z - Bu\|^p, 0, 0, \frac{1}{2} \|z - Bu\|^p\right\} \right) \\ &< \|z - Bu\|^p, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $z = Bu$ . Puisque  $B$  et  $T$  sont compatibles de type (B) et  $Tu = Bu = z$ , d'après la proposition 1.3.9,  $TBu = BTu$  et donc  $Tz = TBu = BTu = Bz$ .

De plus, d'après (2.2) nous avons

$$\begin{aligned} \|Ax_{2n} - Bz\|^p &\leq \varphi \left( a \|Sx_{2n} - Tz\|^p + (1-a) \max \left\{ \|Sx_{2n} - Ax_{2n}\|^p, \|Tz - Bz\|^p, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \|Sx_{2n} - Ax_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \cdot \|Tz - Bz\|^{\frac{p}{2}}, \|Tz - Ax_{2n}\|^{\frac{p}{2}} \cdot \|Sx_{2n} - Bz\|^{\frac{p}{2}}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} [\|Tz - Ax_{2n}\|^p + \|Sx_{2n} - Bz\|^p] \right\} \right). \end{aligned}$$

En laissant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|z - Bu\|^p &\leq \varphi \left( a \|z - Bz\|^p + (1-a) \max \{0, 0, 0, \|z - Bz\|^p, \|z - Bz\|^p\} \right) \\ &< \|z - Bz\|^p, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $z = Bz$ . Puisque  $B(X) \subset S(X)$ , il existe un point  $v \in X$  tel que  $z = Bz = Sv$ . En utilisant (2.2) on a

$$\begin{aligned} \|Av - z\|^p &= \|Av - Bz\|^p \\ &\leq \varphi \left( a \|Sv - Tz\|^p + (1-a) \max \left\{ \|Sv - Av\|^p, \|Tz - Bz\|^p, \|Sv - Av\|^{\frac{p}{2}} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \|Tz - Bz\|^{\frac{p}{2}}, \|Tz - Av\|^{\frac{p}{2}} \|Sv - Bz\|^{\frac{p}{2}}, \frac{1}{2} [\|Tz - Av\|^p + \|Sv - Bz\|^p] \right\} \right) \\ &= \varphi \left( (1-a) \max \left\{ \|z - Av\|^p, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \|z - Av\|^p \right\} \right) \\ &< \|z - Av\|^p, \end{aligned}$$

de sorte que  $Av = z$ . Puisque  $A$  et  $S$  sont compatibles de type (B) et  $Av = Sv = z$ ,  $SAv = ASv$  et donc  $Sz = SAV = Az$ .

Par conséquent,  $z$  est un fixe commun point de  $A$ ,  $B$ ,  $S$ , et  $T$ . De même, on peut également compléter la preuve lorsque  $B$ ,  $S$  et  $T$  sont continus. Il résulte facilement

de (2.2) que  $z$  est un unique point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ . Ceci termine la preuve. ■

**Corollaire 2.1.1** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $A, B, S, T : X \rightarrow X$  tels que  $A(Y) \subset S(Y), B(Y) \subset T(Y)$  et*

$$\|Ax - By\| \leq \delta \|Sx - Ty\| \quad (2.9)$$

*pour certain  $\delta \in (0, 1)$  et pour tout  $x, y \in Y$ . Alors il existe  $v_1, v_2 \in X$  et  $u \in X$  tel que*

$$Av_1 = Sv_1 = u = Bv_2 = Tv_2$$

*De plus, si  $Y = X$  et que les paires  $(A, S)$  et  $(B, T)$  commutent respectivement en  $v_1$ , et  $v_2$ , alors  $u$  est l'unique point fixe commun de  $A, B, S$  et  $T$ .*

**Corollaire 2.1.2** *Soient  $X$  un espace de Banach et  $A, B, T : X \rightarrow X$  tels que  $A(X), B(X) \subset T(X)$  et*

$$d(Ax, By) \leq \delta d(Tx, Ty)$$

*pour tout  $x, y \in X$  et certains  $\delta \in (0, 1)$ . Si l'un des  $A(X), B(X)$ , ou  $T(X)$  est un sous-espace complet de  $X$ , alors il existe  $u, v \in X$  tel que  $u = Av = Bv = Tv$ . De plus, si  $T$  commute avec chacun de  $A$  et  $B$  en  $u$ , alors  $u$  est l'unique point commun fixe de  $A, B$  et  $T$ .*

Si  $A = B$  et  $S = T$  dans le corollaire, alors nous obtenons un version d'un théorème de Goebel [15].

**Remarque 2.1.1** *Le théorème 2.1.1 généralise le résultat de P.P. Murthy, Y.J.Cho et B. Fisher [11] avec les applications généralisées de type Gregus [3].*

# Chapitre 3

## Applications aux équations intégrales non linéaires

On montre l'existence de solutions de coïncidence d'équations intégrales simultanées non linéaires dans des conditions naturelles et simples. Notamment, en supposant la commutativité en un seul point de coïncidence, on va présenter les résultats de l'existence et l'unicité de la solution commune à ces équations, (voir [?], [24]).

Soit  $L[a, \infty)$  l'espace de Banach de fonctions à valeurs réelles ou complexes Lebesgue intégrables sur  $[a, \infty)$  équipé de sa norme habituelle, où  $a$  est un nombre réel quelconque .

Considérons d'abord les équations de Volterra-Hammerstein suivantes avec retard infini dans l'espace  $L[a, \infty)$ , qui sera désormais noté par  $Z$ .

$$x(t) = f(t) + \mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, x(s)) ds + \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, x(s)) ds, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

pour tout  $t \in [a, \infty)$ , où  $f \in Z$  est connu,  $m(t, s), k(t, s), g_i(t, s), h_i(t, s)$  sont fonctions à valeurs réelles ou complexes qui sont mesurables à la fois en  $t$  et  $s$  sur

$[a, \infty)$  et  $\lambda, \mu$  sont des nombres réels ou complexes. Ces fonctions sont supposées satisfaire aux conditions suivantes

$$\int_a^\infty \sup_{s \in [a, \infty)} |m(t, s)| dt = M_1 < +\infty, \quad (3.2)$$

$$\int_a^\infty \sup_{s \in [a, \infty)} |k(t, s)| dt = M_2 < +\infty. \quad (3.3)$$

On Suppose que :  $g_i(s, x(s)), h_i(s, x(s)) \in Z$  pour tout  $x \in Z$  et il existe  $K_i > 0, i = 1, 2$ , tel que pour tous  $s \in [a, \infty)$ ,

$$|g_1(s, x(s)) - g_2(s, y(s))| \leq K_1 |x(s) - y(s)| \text{ pour tous } x, y \in Z \quad (3.4)$$

$$|h_1(s, x(s)) - h_2(s, y(s))| \leq K_2 |x(s) - y(s)| \text{ pour tous } x, y \in Z. \quad (3.5)$$

Supposons en outre que :

$$\int_a^\infty k(t, s) h_i \left( s, f(s) + \mu \int_a^s m(s, \tau) g_j(\tau, u(\tau)) d\tau \right) ds = 0 \quad (3.6)$$

pour tout  $u \in Z$  et  $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$ ;

(vi) pour chaque suite  $\{x_n\} \subset Z$  avec l'une des quatre intégrales

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, x_n(s)) ds \quad i = 1, 2,$$

ou

$$x_n(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, x_n(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

convergeant vers  $z \in Z$ , il existe des  $w \in Z$  tels que l'un des intégrales

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, w(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

ou

$$w(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, w(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

est égal à  $z(t)$ ;

(vii) si certains  $u \in Z$  existent des  $v_i \in Z$  tels que :

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, v_i(s)) ds = v_i(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, v_i(s)) ds := u(t)$$

alors

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, u(s)) ds = u(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, u(s)) ds \quad i = 1, 2,$$

(vii) si pour certains  $u \in Z$ , il existe  $v \in Z$  tel que :

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, v(s)) ds = v(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h(s, v(s)) ds = u(t),$$

alors

$$\mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, u(s)) ds = u(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s) h(s, u(s)) ds, \quad i = 1, 2,$$

où  $h = h_1 = h_2$ .

On donne maintenant le théorème d'existence.

**Théorème 3.0.2 ([24])** *On suppose que les hypothèses 3.2-?? avec les conditions suivantes*

$$|\lambda| K_2 M_2 < 1 \quad \text{et} \quad [|\mu| K_1 M_1 / (1 - |\lambda| K_2 M_2)] < 1, \quad (3.7)$$

*soient satisfaites. Alors le système (3.1) a des solutions de coïncidence  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , comme dans (3.7). De plus, si (vii) est vérifié, alors le système(3.1) a une solution*

commune unique dans  $Z$ .

**Preuve.** En procédant comme dans [?] on définit

$$\begin{aligned} A_i x(t) &= \mu \int_a^t m(t, s) g_i(s, x(s)) ds, \\ C_i x(t) &= f(t) + \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, x(s)) ds, \\ T_i x(t) &= (I - C_i) x(t), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

où  $I$  est l'opérateur d'identité sur  $Z$ . Alors, comme le montre [?], les conditions (i)-(iv) impliquent que  $A_i$  et  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont des opérateurs de  $Z$  vers lui-même, et

$$\|A_1 x - A_2 y\| \leq \delta \|T_1 x - T_2 y\|,$$

où

$$\delta = |\mu| K_1 M_1 / (1 - |\lambda| K_2 M_2) < 1.$$

Ainsi la condition (2.9) du corollaire se satisfait de  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$ ,  $T_1 = S$ , et  $T_2 = T$  pour chaque  $x, y \in Z$ . La condition (v) implique que  $A_1(Z) \subset T_2(Z)$  et  $A_2(Z) \subset T_1(Z)$ .

De plus, (vi) garantit que l'un quelconque de  $A_1(Z)$ ,  $A_2(Z)$ ,  $T_1(Z)$ , ou  $T_2(Z)$  est un sous-espace complet de  $Z$ . Donc, par le corollaire 2.1.1, il existe  $v_1, v_2, v_3 \in X$  tel que ■

$$A_1 v_1 = T_1 v_1 = u = A_2 v_2 = T_2 v_2. \quad (3.8)$$

Finalement, si (vii) est vérifié, alors  $A_i$  commutent avec  $T_i$  en  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , et encore une fois, un appel au corollaire 2.1.1 établit l'existence d'un  $u$  unique tel que

$$A_i u = T_i u = u, \quad i = 1, 2.$$

**Corollaire 3.0.3** *Soit les hypothèses (3.2)-(vi) avec  $h_1 = h_2 = h$  et (3.7) sont satisfaits. Alors le système d'équations (3.1) a une coïncidence commune solution (voir (3.10)). De plus, si (viii) est vrai, alors le système (3.1) avec  $h_1 = h_2 = h$  a une solution commune unique.*

En définissant  $T_1 = T_2 = T$ , en procédant comme dans la preuve du théorème 3.0.2 et en appliquant le corollaire 2.1.2, on obtient

$$u = A_1 v = A_2 v = T v. \quad (3.9)$$

De plus, la condition (viii) implique que  $T$  commute avec chacun de  $A_1$  et  $A_2$ . Donc pour l'unique  $u$ ,

$$\begin{aligned} A_1 u &= A_2 u = T u = u \\ u &= A_1 v = A_2 v = T v. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De plus, la condition (viii) implique que  $T$  commute avec chacun de  $A_1$  et  $A_2$ . Donc pour l'unique  $u$ ,

$$A_1 u = A_2 u = T u = u$$

On note que si  $h_1 \neq h_2$  dans  $(VH)$ , contrairement à (3.10), le théorème 3.0.2 garantit que les solutions de coïncidence peuvent être différentes. La même observation s'applique lorsque  $g_1 = g_2$ .

Enfin, on donne un théorème d'existence pour l'équation intégrale de type **Hammerstein** avec un retard infini dans  $Z$  comme décrit ci-dessous. Pour  $f \in Z$  donné et pour tout  $t \in [a, \infty)$  on considère

$$x(t) = f(t) + g_i(t, x(t)) + \lambda \int_a^\infty k(t, s) h_i(s, x(s)) ds, \quad i = 1, 2, \quad (3.11)$$

où  $g_i, h_i$  et  $k$  sont tels que décrits précédemment.



Supposons en outre que :

$$\int_a^\infty k(t, s)h_i(s, f(s) + g_i(s, x(s))) ds = 0 \quad (3.12)$$

pour tout  $x \in Z$ ,  $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$ ;

(vi\*) pour chaque suite  $\{x_n\} \subset Z$  avec l'un des

$$g_i(t, x_n(t)) \quad i = 1, 2, \quad \text{ou} \quad x_n(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s)h_i(s, x_n(s))ds, \quad i = 1, 2,$$

convergeant vers  $z \in Z$ , il existe  $w \in Z$  tel que l'un des fonctions  $g_i(t, w(t))$ ,  $i = 1, 2$  ou

$$z(t) = w(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s)h_i(s, w(s))ds \quad i = 1, 2;$$

(vii\*) si pour certains  $u \in Z$ , il existe  $v_i \in Z$  tel que

$$g_i(t, v_i(t)) = v_i(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s)h_i(s, v_i(s))ds := u(t),$$

alors

$$g_i(t, u(t)) = u(t) - f(t) - \lambda \int_a^\infty k(t, s)h_i(s, u(s))ds, \quad i = 1, 2,$$

**Théorème 3.0.3** *Sous les hypothèses (3.3)-(3.5), (v\*), (vii\*) et on suppose que :*

$$|\lambda| M_2 K_1 < 1 \quad \text{et} \quad [K_2 / (1 - |\lambda| M_2 K_1)] < 1.$$

*Alors le système (3.11) a des solutions de coïncidence  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , comme dans (3.8).*

*De plus, si (vii\*) est vrai, alors le système (3.11) a une solution commune unique en  $Z$ .*

**Preuve.** Pour tout  $x \in Z$ , on définit  $A_i x(t) = g_i(t, x(t))$  et  $T_i x(t)$  comme dans la preuve du théorème 9,  $i = 1, 2$ . Alors, comme le montre [15],  $A_i$  et  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont auto-opérateurs de  $Z$  et  $\|A_1 x - A_2 y\| \leq \delta \|T_1 x - T_2 y\|$ , où  $\delta = K_2 / (1 - |\lambda| M_2 K_1) < 1$ . La condition (v\*) implique  $A_1(Z) \subset T_2(Z)$  et  $A_2(Z) \subset T_1(Z)$ , tandis que (vi\*) garantit que l'un quelconque de  $A_1(Z), A_2(Z), T_1(Z)$ , ou  $T_2(Z)$  est un sous-espace complet de  $Z$ . Par conséquent (3.8) est établi par le corollaire. ■

Puisque (vii\*) implique que  $A_i$  et  $T_i$  commute en  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , on voit que  $A_i u = T_i u = u$ ,  $i = 1, 2$ , et  $u$  est unique.

Le théorème avec  $h_1 = h_2$  assure une solution de coïncidence commune.

Les équations (3.1) et (3.11) intéressent les problèmes industriels, et pour commentaires pertinents, on renvoie à [?] et [28].

# Conclusion

Ce mémoire est consacré à présenter un théorème de point fixe commun pour quatre applications satisfaisant certaines conditions de commutativité faible via la semi-continuité et la compatibilité, puis la preuve de l'existence et l'unicité d'un point fixe, en combinant certains types de contractions généralisés, comme les contractions de type Boyd-Wong, ainsi que certaines conséquences qui concernent l'existence d'un point fixe commun de deux applications dans des espaces de Banach. Comme des applications de ce résultat, on a étudié l'existence de la solution commune de certaines équations intégrales de type Volterra Hammerstein.

# Bibliographie

- [1] M.L. Diviccaro, B. Fisher and S. Sessa : A common fixed point theorem of Greguš type. *Pub. Mat.* 34 (1987), 83-89.
- [2] B. Fisher and S. Sessa : On a fixed points theorem of Greguš. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 9 (1986), 23-28.
- [3] M. Greguš, Jr. : A fixed point theorem in Banach spaces. *Boll. Un. Mat. Ital.* (5) 17-A (1980), 193-198.
- [4] G. Jungck : Compatible mappings and common fixed points. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 9 (1986), 771-779.
- [5] G. Jungck : Compatible mappings and common fixed points (2). *Internat. J. Math and Math. Sci.* 11 (1988), 285-288.
- [6] G. Jungck : Common fixed points of commuting and compatible maps on compacta. *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1988), 977-983.
- [7] G. Jungck, P.P. Murthy and Y.J. Cho : Compatible mappings of type (A) and common fixed points. *Math. Japonica* 38 (1993), 381-390
- [8] S.M. Kang, Y.J. Cho and G. Jungck : Common fixed points of compatible mappings .*Internat. J. Math . and Math . Sci.* 13 (1990), 61-66.
- [9] S.M. Kang and Y.P. Kim : Common fixed point theorems. *Math . Japonica* 37 (1992) ,1031-1039.

- [10] H. Kaneko and S. Sessa : Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mappings. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 12 (1989), 257-262.
- [11] P. P. Murthy, Y.J. Cho and B. Fisher : Compatible mappings of type (A) and common fixed point theorems of Greguš, to appear.
- [12] S. Sessa : On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations. *Publ. Inst. Math.* 32 (46) (1982), 149-153.
- [13] S.P. Singh and B.A. Meade : On common fixed point theorems. *Bull. Austral. Math. Soc.* 16 (1977), 49-53.
- [14] U.C. Gairola , S. L. Singh and J. H. M. Whitfield, Fixed point theorems on product of compact metric spaces, *Demonstratio Math.* 28 (1995), 541-548.
- [15] K. Geobel, A coincidence theorem. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.* 16 (1968), 733-735.
- [16] G. Jungck : Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta. *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1998), 977-983.
- [17] G. Jungck and H. K. Pathak, fixed points via “biased maps” , *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), 2049-2060.
- [18] P. P. Murthy, Y.J. Cho and B. Fisher : Compatible mappings of type (A) and common fixed point theorems of Greguš, *Glasnik Mat.* 30 (50) (1995), 335-341.
- [19] H. K. Pathak, Y. J. Cho and S. M. Kang, Common fixed points of biased maps of type (A) and applications, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 21 (1998), 681-694.
- [20] H. K. Pathak, Y. J. Cho , S. M. Kang and B. Madharia, compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type, *Demonstratio Math.* 31 (3). (1998), 499-518.
- [21] H. K. Pathak, and M. S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type, *Czechoslovak Math. J.* 45 (120) (1995) 685-698.

- [22] H. K. Pathak and M. S. Khan . A comparision of various types of compatible maps and common fixed points. Indian J. Pure Appl. Math. 28 (4) (1997), 477-485.
- [23] H. K. Pathak, S. N. Mishra and A. K. Kalinde, Common fixed point theorems with applications to nonlinear integral aquations, Demonstratio Math. 32 (3) (1999), 547-564.
- [24] Singh, S. L., and S. N. Mishra. "Remarks on recent fixed point theorems and applications to integral equations." Demonstratio Mathematica 34.4 (2001) : 847-858.
- [25] B. E. Rhoades. S. Park and K. B. Moon, On generalizations of the Meir-Keeler type contraction maps, J. Math. Anal. Appl. 146 (1990) , 482-494.
- [26] S. Sessa : O n a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations. Publ . Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 32 (46) (1982), 145-153.
- [27] B. M. L. Tivari and S. L. Singh, A note on recent generalizations of Jungck contraction principle, J. UPGC Acad. Soc. 3 (1986), 13-18.
- [28] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I (Fixed Point Theorems) , Springer-Verlag, 1986.

## المخلص:

خصصت هذه الرسالة لتقديم نظرية النقطة الثابتة المشتركة لأربع تطبيقات تحقق بعض الشروط التبادلية الضعيفة عبر شبه الاستمرارية و التوافق، ثم اثبات وجود وتفرد نقطة ثابتة، من خلال الجمع بين أنواع معينة من الاختصارات المعممة .

## الكلمات المفتاحية:

نظرية النقطة الثابتة ، بويد – انقباضات نوع وونغ ، فضاءات باناخ ، معادلات تكاملية غير خطية.

## Résumé:

*Ce mémoire est consacré à présenter un théorème de point fixe commun pour quatre applications satisfaisant certaines conditions de commutativité faible via la semi continuité et la compatibilité, puis la preuve de l'existence et l'unicité d'un point fixe, en combinant certains types de contractions généralisés.*

## Mots – clés:

*Théorie du point fixe, contractions de Boyd de type Wong , espaces de Banach , équations intégrales non-linéaires.*

## Abstract:

*This dissertation is devoted to presenting a common fixed point theorem for four applications*

*Satisfying certain weak commutativity conditions via semi-continuity and compatibility, then the proof of the existence and uniqueness of a fixed point, by combining certain types generalized.*

## Key words:

*Fixed point theory , Wong-type Boyd contractions , Banach spaces, non-linear integral.*