République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : probabilités

Par

Hassouna Youssra

Titre :

Les conditions nécessaires pour les contrôles relaxés des EDSPR non linéaires

Devant le Jury:

Mr.	MANSOURI Baderddine	*Docteur*	U. Biskra	Président
Mr.	GHERBEL Boulakhras	*Professeur*	U. Biskra	Encadreur
Mr.	TAMER Lazhar	*Docteur*	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 11/06/2024

Dédicace

À mes chers parents, mes sœurs, mes frères, mon oncle **Hassouna Makki,** et mon oncle **Hassouna Houssem Eddine**, ma famille.

À ma chère amie proche **Boudjemaa Messaouda**, et à mes précieux amis,

Merci pour votre amour, votre soutien, et votre guidance. Vous êtes mes piliers et mes inspirations.

Je suis reconnaissante pour chaque moment partagé et pour votre présence dans ma vie.

Avec tout mon amour

À mes professeurs, Merci pour votre dévouement, votre guidance et votre inspiration tout au long de mon parcours éducatif. Vos enseignements et votre soutien ont façonné mon développement académique et personnel. Je vous suis profondément reconnaissante pour votre impact durable dans ma vie.

Avec gratitude

Remerciements

Tout d'abord je remercie Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements, appréciation et respect à mon encadreur **Pr. GHERBEL Boulakhras**, j'ai été extrêmement chanceuse d'avoir été supervisée par vous.

Mes remerciements s'adressent au **Dr. MANSOURI Baderddine**, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de mon mémoire.

Mes sincères remerciements vont également à **Dr. TAMER Lazha**r, pour avoir accepter d'être examinateur de mon mémoire

À tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire:

Merci

Contents

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Contents **iii**

Introduction **1**

1 Rappel sur le calcul stochastique **5**

1.1 Géneralités 5

1.2 L'espace des événements 5

1.2.1 **Tribu** 6

1.2.2 Espace mesurable 7

1.2.3 Variable aléatoire 8

1.2.4 Loi de probabilité 8

1.2.5 Processus stochastique 10

1.2.6 Filtration 11

1.2.7 Processus progressif 12

1.2.8 Temps d'arrêt 12

1.2.9 Martingales: 12

1.2.10 Exemples sur les processus stochastiques 13
1.2.11 Intégrale de Wiener 14
1.2.12 Processus d'Itô 17
1.2.13 Formule d'Itô 17
1.2.14 Equations différentielles stochastiques 18
1.3 Contrôle stochastique 20
1.3.1 Etat du système 20
1.3.2 Contrôle stochastique 21
1.3.3 Critère (fonctionnel) de coût 22
1.3.4 Quelques inégalités utilisés 27

2 Les conditions nécessaires pour les contrôles relaxés des EDSPR non linéaires 29

2.1 Introduction: 29
2.2 Formulation du problème 30
2.2.1 Théorème d'existance et d'unicité 32
2.3 Résultats préliminaires 33
2.3.1 Equations Variationnelles 40
2.3.2 Inégalité variationnele 43
2.4 Les conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés . . . 46

Conclusion 48

Bibliographie 50

Introduction

Une équation mathématique est une égalité entre des termes contenant des nombres, des variables et des opérations, exprimant des relations entre des quantités. La résolution des équations a débuté avec les anciennes civilisations, puis les Arabes ont développé des méthodes directes. Plus tard, des approches modernes ont émergé, utilisant des symboles clairs. Différents types d'équations sont apparus, y compris les équations différentielles.

Une équation différentielle relie des fonctions inconnues à leurs dérivées successives, elles ont été introduites avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz. Newton a présenté trois types d'équations dans son ouvrage [9] de 1671. En 1695, Jacob Bernoulli a formulé l'équation de Bernoulli [4], que Leibniz a tenté de simplifier l'année suivante [6].

Après cela, plusieurs types d'équations différentielles sont apparus, y compris les équations différentielles stochastiques (EDS). Les EDS introduisent le concept d'aléatoire, les distinguant des équations différentielles ordinaires (EDO) déterministes. Elles modélisent divers phénomènes tels que la diffusion de particules ou les fluctuations de prix sur les marchés financiers. Les EDS sont utilisées dans divers domaines et nécessitent des concepts avancés de probabilité et de processus stochastiques.

Ensuite, un type complexe est apparu inversant le sens du temps par rapport aux EDS traditionnelles: les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Les EDSR ont été introduites en 1973 par J.-M. Bismut [5] dans le cas où le générateur f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il faudra attendre jusqu'au début des années 90 (les travaux de E. Pardoux et S. Peng [10]) pour obtenir le premier résultat d'existence et d'unicité de solution pour les EDSR non linéaires.

Ensuite, un type plus complexe a été introduit où la solution dépend explicitement à la fois du passé et du futur de sa propre trajectoire : les équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades (EDSPR). Les EDSPR ont été étudiées pour la première fois par Antonelli dans [1]. Il a démontré l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades, où la solution dépend explicitement à la fois du passé et du futur de sa propre trajectoire, sous une hypothèse de Lipschitz. Depuis cette date, ce type de systèmes (EDSPR) est rencontré dans les problèmes de contrôle optimal stochastique et de finance mathématique.

L'objectif de ce mémoire est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité ce forme de principe maximum pour un problème de contrôle relaxé pour un système gouverné par l'EDSPR non linéaire suivante:

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dW_t \\ \quad x_0^q = x, \\ \quad dy_t^q = -\int_U f\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + z_t^q dW_t \\ \quad y_T^q = \varphi\left(x_T^q\right), \end{cases}$$

òu le coefficient de diffusion dépend explicitement de la variable de contrôlela et la fonction de coût à minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$, est définie par

$$\mathcal{J}\left(q\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^q\right) + h\left(y_0^q\right) + \int_0^T \int_U l\left(t, x_t, y_t, z_t, u\right) q_t(du) dt\right].$$

On dit que le contrôle relaxé admissible $q_.$ est un contrôle optimal si:

$$\mathcal{J}(q_.) = \inf_{\mu_.\in\mathcal{R}} \mathcal{J}(\mu_.).$$

Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous présentons les différents notions du calcul stochastique: tribu, mesure, espace mesurable, probabilité, espace probabilisé, variable aléatoire, processus stochastique, filtration, adaptation, martingale, sous et sur martingale, mouvement Brownien Intégrale de Wiener, processus d'Itô et formule d'Itô,..ect. On donné aussi dans ce chapitre les définition des différents types de contrôle stochastique.

Chapitre 2 : Notre objectif dans le deuxième chapitre est d'établir la condition d'optimalité nécessaire sous la forme d'un principe de maximum stochastique, pour des contrôles rélaxé pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaires (EDSPR). Pour atteindre cet objectif, nous utilisons le fait que l'ensemble des contrôles relaxé est convexe et appliquons la méthode de perturbation faible (convexe).

Chapter 1

Rappel sur le calcul stochastique

1.1 Géneralités

L'objectif principal de ce chapitre est d'introduire les résultats sur les processus stochastiques, les mesures, le mouvement brownien et les équations différentielles stochastiques qui seront utilisés dans le deuxième chapitre pour établir les conditions nécessaires pour les contrôles relaxés des EDSPR non linéaires. Ce chapitre a été inspiré du [3],[7], et[11].

1.2 L'espace des événements

Soit Ω un ensemble, ce pourra être un ensemble abstrait, ou un ensemble concret comme un ensemble fini ou dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou une partie de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, un espace de Hilbert, ou de Banach, ou un espace topologique.

Definition 1.2.1 Ω *est l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent être obtenus au cours d'une expérience aléatoire.*

Remark 1.2.1 *Un sous-ensemble de Ω est un événement.*

1.2.1 Tribu

Les tribus permettent de définir rigoureusement la notion d'ensemble mesurable.

Definition 1.2.2 *On appelle tribu (ou $\sigma-$algèbre) sur Ω un sous-ensemble, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, telque:*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \mid A \in \mathcal{A}$,*

iii) *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in N \Rightarrow \bigcup\limits_{n\epsilon\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Remark 1.2.2 *Un ensemble Ω est dit dénombrable s'il existe une bijection de Ω sur $\mathbb{N}$, réunion est dite « dénombrable » parce que l'ensemble des indices l'est.*

Exemples sur les tribus

1. $\{ \emptyset, \Omega\}$ est une tribu, appelée tribu grossière.

2. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de parties de Ω, (c'est la plus grande possible).

3. Soit $\varepsilon \subset \mathcal{P}(\Omega)$ quelconque. L'ensemble de parties $\sigma(\varepsilon) := \bigcap\limits_{\mathcal{A} \text{ tribu } \supset\varepsilon} \mathcal{A}$ est une tribu, c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant Ω. On l'appelle tribu engendrée par Ω.

   Remark 1.2.3 *Cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant ε.*

4. La tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est appelée tribu Borélienne et notée $B(\mathbb{R})$.

1.2.2 Espace mesurable

Definition 1.2.3 *Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ constitué d'un ensemble Ω et d'une $\sigma-$algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω est appelé* ***un espace mesurable.***

Definition 1.2.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle* ***mesure*** *une application $m : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ (avec $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$) vérifiant :*

1. *$m(\emptyset) = 0$,*
2. *m est $\sigma-$additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux (i.e. tels que $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a :*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m\left(A_n\right).$$

Example 1.2.1 (Mesure de Dirac) *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in \Omega$. On définit sur $\mathcal{A}$ la mesure δ_a par (pour $A \in \mathcal{A}$):*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 \ si \ a \notin A, \\ 1 \ si \ a \in A. \end{cases}$$

Probabilité, espace probabilisé

Definition 1.2.5 *On appelle probabilité une mesure $\mathbb{P}$ sur$\mathcal{A}$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.*

Remark 1.2.4 *Un événement A est* ***presque sûr*** *si $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Definition 1.2.6 *Si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ sont deux espaces mesurables, une fonction $X : \Omega \to E$ est dite mesurable (par rapport à $\mathcal{A}$ la $\sigma-$algèbre sur l'espace de départ Ω, et $\mathcal{B}$ la $\sigma-$algèbre sur l'espace d'arrivée E), si:*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

1.2.3 Variable aléatoire

Definition 1.2.7 *Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Rappelons qu'une application* $X{:}\Omega \longrightarrow E$ *est appelée une variable aléatoire si* X *est mesurable comme application de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(E, \mathcal{B})$ *(ou* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *où* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est la tribu de borel dans* $\mathbb{R}$ *dans le cas réel).*

1.2.4 Loi de probabilité

Definition 1.2.8 *Si* $\mathbf{X}$ *une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. La loi de* $\mathbf{X}$ *est la probabilité* $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *définie par:*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\{\omega; X(\omega) \in B\} = \mathbb{P}(X \in B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Remark 1.2.5 *La notation des variables aléatoires par des lettres majuscules comme* X *et l'utilisation de* $\mathbb{R}$ *pour représenter l'espace des nombres réels ont des bases historiques dans le développement de la théorie des probabilités. De même, la désignation de la probabilité transportée par une variable aléatoire* X *par* $\mathbb{P}_X$ *et son identification comme la loi de* X *sont des conventions qui simplifient et clarifient la notation et la compréhension des concepts probabilistes, issues de l'évolution historique de la discipline.*

Fonction de répartition

Definition 1.2.9 *On définit la fonction de répartition de la variable* X*. C'est la fonction croissante définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Densité

Definition 1.2.10 *La densité $f(x)$ d'une variable aléatoire est la dérivée de la fonction de répartition (si cette dérivée existe). On peut alors écrire*

$$\forall B \in \mathcal{B},\ \mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x)\,dx.$$

Probabilité conditionnelle

Definition 1.2.11 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{F}$.*

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ la probabilité conditionnelle de A par rapport à B, notée $\mathbb{P}(A|B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si $\mathbb{P}(B) = 0$, $\mathbb{P}(A|B)$ n'est pas définie.

Comment on représente la valeur moyenne prise par la variable X ?

Espérance

Definition 1.2.12 *L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel $\mathbb{E}[X]$. Elle représente la valeur moyenne prise par la variable X, on a deux cas :*

(Si $X(\Omega)$ est infini, on n'est pas sûr que l'espérance existe).

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Lorsqu'une variable X vérifie $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que la variable est centrée.

Espérance conditionnelle

Definition 1.2.13 *Soient X une v.a.réelle (intégrable i.e $X \in L^1$) définie sur $(\Omega; \mathcal{F}; P)$*

i) *Par rapport à événement, soient $A \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a*

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}.$$

ii) *Par rapport à une tribu: soient $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire telle que:*

1) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ *est $\mathcal{G}$-mesurable.*

2)

$$\forall A \in \mathcal{G}, \int\limits_A \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int\limits_A X d\mathbb{P}.$$

iii) Par rapport à une variable aléatoire:

On la note $\mathbb{E}[X \mid Y]$, telle que:

1) C'est une variable $\sigma(Y)$-mesurable.

2)

$$\int\limits_A \mathbb{E}[X \mid Y] d\mathbb{P} = \int\limits_A X d\mathbb{P}, \forall A \in \sigma(Y).$$

C'est quoi une famille de varibles aléatoires?

1.2.5 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps.

Definition 1.2.14 *Soit $I = [0;T]$ pour $T \in (0,\infty)$ ou $I = [0;\infty)$. une famille de variables aléatoires $X = (X_t)_{t\in I}$ avec $X_t : E \to \mathbb{R}$ est appelée un processus stochastique avec indice l'ensemble I.*

On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

Remark 1.2.6 *Stochastique vient du grec stokhastikos qui veut dire conjectural et de stockhos qui signifie but. Se dit de phénomènes qui partiellement relèvent du hasard et pour lesquels on ne peut formuler que des prévisions globales d'ordre statistique.*

Comment on représente toute l'information que l'on peut déduire en observant le processus jusqu'à l'étape t?

1.2.6 Filtration

Definition 1.2.15 *On appelle filtration une suite croissante (au sens de l'inclusion) $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ de $\sigma-$algèbres vérifiant:*

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Une variable aléatoire est $\mathcal{F}_t$-measurable si on peut toujours déduire sa valeur de $\mathcal{F}_t$.

Pour un processus stochastique X on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, qui est la famille croissante de tribus définie par:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}.$$

Remark 1.2.7 *On parle d'hypothèses habituelles si*

- Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$,
- La filtration est continue à droite au sens où $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$,
- Une filtration $\mathcal{G}$ est dite plus grosse que $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \forall t$.

1.2.7 Processus progressif

Definition 1.2.16 *Un processus $(X_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t}\in I}$ est dit progressif (par rapport à $\mathcal{F}$) si pour tout $t \in I$, l'application $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0,t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

1.2.8 Temps d'arrêt

Definition 1.2.17 *Un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une variable aléatoire τ, à valeurs dans I, telle que τ est $\mathcal{F}_t$-measurable.*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

1.2.9 Martingales:

Les martingales représentent un outil puissant pour analyser le comportement des processus aléatoires au fil du temps, et sont utilisées dans de nombreuses applications telles que l'analyse des marchés financiers, l'évaluation des options, les jeux mathématiques, les modèles de probabilités discrètes, et bien d'autres.

Definition 1.2.18 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus réel.*

(Martingale) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable,

2. $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = X_n$, $\mathbb{P}.s.$

(Sous et sur martingale) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous–martingale [resp. sur–martingale] par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et intégrable,

2. $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \geq X_n$, $\mathbb{P}.s.$ (resp. $\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leq X_n$, $\mathbb{P}.s$).

1.2.10 Exemples sur les processus stochastiques

Le mouvement Brownien, nommé en l'honneur du Botaniste *Robert Brown* qui l'a découvert en 1827, est un phénomène aléatoire observé dans de nombreux domaines, notamment la physique, la finance, la biologie et la chimie. Il est caractérisé par le mouvement aléatoire et irrégulier des particules immergées dans un fluide, telles que des particules de poussière ou de pollen dans l'eau.

Definition 1.2.19 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique. Le processus B est appelé **mouvement Brownien standard** à condition que*

i) $B_0 = 0.$

ii) $\forall 0 \leq s < t < \infty$ la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $(B_r)_{r\in[0;s]}$, ceci signifie que $\forall 0 \leq s_1 \leq ... \leq s_n \leq s$ et $A, A_1, ...A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, ...B_{s_n} \in A_n, B_t - B_s \in A)\\&\qquad = \mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, ...B_{s_n} \in A_n)\mathbb{P}(B_t - B_s \in A).\end{aligned}$$

iii) $\forall 0 \leq s < t < \infty$ et $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

iv) Les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues.

Proposition 1.2.1 *Soit $B = (B_t)_{t \in I}$ un mouvement Brownien standard, sa filtration naturelle:*

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s, s \in [0,t])$$

1.2.11 Intégrale de Wiener

Definition 1.2.20 *On note $L^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions Boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, c'est-à-dire telles que*

$$\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 \, ds < \infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$||f||_2 = \left(\int_0^{\infty} f^2(s) \, ds \right)^{1/2}.$$

a) Fonctions en escalier:

Pour $f = 1_{]u,v]}$, on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s) \, dB_s = B_v - B_u.$$

Soit f une fonction en escalier, de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1}, t_i]}$$

on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right).$$

La variable aléatoire $I(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s$ est une variable Gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{\infty} f^2(s)\, ds$. En effet, $I(f)$ est Gaussienne car le processus B est Gaussien, centrée car B est centré.

De plus

$$\begin{aligned} Var(I(f)) &= \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 Var\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s)\, d_s = ||f||_2^2 . \end{aligned}$$

L'intégrale est linéaire: $I(f+g) = I(f) + I(g)$. Si f et g sont des fonctions en escalier

$$\mathbb{E}(I(f) I(g)) = \int_0^{+\infty} f(s)\, g(s)\, ds.$$

En effet

$$\begin{aligned} Var(I(f+g)) &= Var[I(f) + I(g)] = Var(I(f)) + Var(I(g)) + 2\mathbb{E}(I(f) I(g)) \\ &= \int_0^{+\infty} (f+g)^2(s)\, ds \\ &= \int_0^{+\infty} f^2(s)\, ds + \int_0^{+\infty} g^2(s)\, ds + 2\int_0^{+\infty} f(s)\, g(s)\, ds. \end{aligned}$$

b) Cas générale:

On montre en analyse que, si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite f_n de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}^+)$) vers f c'est à dire qui vérifie

$$\int_0^{+\infty} |f_n - f|^2 (x)\, dx \longrightarrow_{n \longrightarrow \infty} 0.$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de v.a

$$F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dB_s,$$

est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ (en effet $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0$), donc elle est convergente. Il reste à vérifier que la limite ne dépend que de f et non de la suite f_n choisie. On pose

$$I(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)\, dB_s,$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$.

On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de f par rapport à B.

Le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les v.a. $\int_0^{+\infty} f(s)\, dB_s$ coïncide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien.

Intégration par parties

Theorem 1.2.1 *Si f est une fonction de classe C^1,*

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = f(t)\, B_t - \int_0^t f'(s)\, B_s ds.$$

Propriétés de l'intégrale stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes :

1. Linéarité

$$\int_0^T (aX_1 + bX_2)(s)\, dB_s = a\int_0^T X_1(s)\, dB_s + b\int_0^T X_2(s)\, dB_s.$$

2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)\,dB_s\right] = 0.$

3. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(s)\,dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)^2\,ds\right]$, (isométrie d'Itô).

4. $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_1(s)\,dB_s\right)\left(\int_0^T X_2(s)\,dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_1(s)\,X_2(s)\,ds\right].$

5. $\mathbb{E}\left[\int_0^T X(s)\,dB_s \mid \mathcal{F}_u\right] = \int_0^u X(s)\,dB_s$, (propriété martingale).

1.2.12 Processus d'Itô

Un processus X est un processus d'**Itô** si

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\,ds$ existe (au sens Lebesgue) $\mathbb{P}.s.$ pour tout t, et σ un processus appartenant à Λ.

On utilise la notation plus concise suivante

$$\begin{cases} dX_T = b_t dt + \sigma dB_t, \\ \qquad X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

1.2.13 Formule d'Itô

Theorem 1.2.2 ***(1ère formule d'Itô)*** *Supposons f de classe C^2. Alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f\,'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f\,''(X_s)\sigma_s^2 ds$$

Theorem 1.2.3 *($2^{\text{ème}}$* ***formule d'Itô****) soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de* *classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a*

$$f(t,X_t)=f(0;X_0)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s$$

Theorem 1.2.4 *($3^{ème}$ **formule d'Itô**) Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées. On a :*

$$f(X_t,Y_t)=f(x,y)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,Y_s)dX_s+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s,Y_s)dY_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s,Y_s)d\langle X\rangle_s$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s,Y_s)d\langle Y\rangle_s+\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X_s,Y_s)d\langle X,Y\rangle_s.$$

Remark 1.2.8 *Pour f indépendante de Y_t, on retrouve la $1^{ère}$ formule d'Itô.*

Pour $Y_t=t$, on retrouve la 2^e formule d'Itô $\Rightarrow$ Unique formule à retenir

1.2.14 Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont des équations qui décrivent l'évolution d'un système où des facteurs aléatoires sont présents.

Definition 1.2.21 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t=x+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s,$$

ou sous forme condensée

$$\begin{cases} dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t, \\ X_0=x. \end{cases} \tag{1.1}$$

X_t est le processus aléatoire que nous cherchons à modéliser,

$b(t, X_t)$ est une fonction déterministe qui décrit le comportement déterministe du système,

$\sigma(t, X_t)$ est une fonction qui détermine la force du bruit stochastique,

B_t est un processus de Wiener ou un mouvement brownien.

La notation dX_t représente la variation infinitésimale de X à un instant t, dt est la variation infinitésimale du temps, et dB_t est la variation infinitésimale du processus de Wiener à un instant t.

Les solutions des EDS:

Une solution de EDS est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{1.2}$$

est satisfaite pour tout $t, \mathbb{P}.s.$

Il y a une solution forte et faible.

Existence et unicité d'une solution forte

Proposition 1.2.2 *Sous les conditions suivantes*

1. Condition de *Lipschitz* globale: Il existe une constante K telle que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\,|x-y|\,.$$

pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{T}$

2. condition de croissance : Il existe une constante L telle que:

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,y)\| \leq L(1+|x|)$$

pour tous les $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$.

L'équation différentielle stochastique (1.2) admet une solution unique $(X_t)_{t\geq 0}$.

Comment influencer ou manipuler l'évolution d'un système dynamique soumis à des incertitudes ou à des fluctuations aléatoires?

1.3 Contrôle stochastique

De façon générale, un problème de contrôle se formule selon les caractéristiques suivantes :

1.3.1 Etat du système

On considère un système dynamique caractérisé par son état à tout instant. Le temps peut être discret ou continu. Nous considérons ici qu'il varie de façon continue et dans des conditions d'incertitude. L'horizon (intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini.

Example 1.3.1 *1) L'état du systéme est gouverné par l'EDS suivante:*

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.3}$$

2) L'état du systéme est gouverné par l'EDSR suivante:

$$\begin{cases} dy_t = -f\left(t, y_t, z_t, u_t\right) dt + z_t dB_t \\ y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.4}$$

3) L'état du systéme est gouverné par l'EDSPR suivante:

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t \\ dy_t = -f\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) dt + z_t dB_t \\ x_0 = x, y_T = \psi(x_T). \end{cases} \tag{1.5}$$

1.3.2 Contrôle stochastique

La fonction u_t est appelée le contrôle, représentant l'action des décideurs (le contrôleur). À tout moment, le dispose de certaines informations telles que spécifiées par rapport à une certaine filtration $\mathcal{F}_t$ pour t dans $[0, T]$ sur ce qui s'est passé jusqu'à l'instant t, mais il n'est pas en mesure de prévoir ce qui va se passer par la suite en raison de l'incertitude du système (par conséquent, à tout t, le contrôleur ne peut pas exercer sa décision u_t avant que le temps t ne soit réellement atteint. Cette restriction non anticipative, en termes mathématiques, peut être exprimée comme u_t est adapté à $\mathcal{F}_t$.

Definition 1.3.1 *(Contrôle admissible). On dit qu'un contrôle stochastique u_t est admissible s'il est adapté a une filtration $\mathcal{F}_t$ et les trajectoires associées à ce contrôle u_t vérifiant l'état du système.*

Autrement dit, un contrôle admissible est un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$, avec des valeurs dans un ensemble borélien A de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{U} := \left\{ u_. : [0, T] \times \Omega \longrightarrow A : u_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-adapté} \right\}.$$

Parfois on ajoute que le contrôle est de carré intégrable comme dans le cas où le système est linéaire.

Le contrôle u_t on appelé aussi contrôle strict admissible.

1.3.3 Critère (fonctionnel) de coût

L'objectif de contrôleur est de minimiser le fonctionnel de coût $\mathcal{J}(u)$ (ou maximiser s'il s'agit d'un gain) sur l'ensemble des contrôles admissibles, pour décrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant.

Example 1.3.2 *1) Pour le système (1.3), la fonction de coût a minimiser est définie par*

$$\mathcal{J}(u) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt\right].$$

2) Pour le système (1.4), la fonction de coût a minimiser est définie par

$$\mathcal{J}(u) = \mathbb{E}\left[k\left(y_0\right) + \int_0^T h\left(t, y_t, z_t, u_t\right) dt\right].$$

3) Pour le système (1.5), la fonction de coût a minimiser est définie par

$$\mathcal{J}(u) = \mathbb{E}\left[k\left(y_0\right) + g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, y_t, z_t, u_t\right) dt\right].$$

Type des contrôle stochastique

Contrôle optimal

Definition 1.3.2 *Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $\mathcal{J}(u)$ sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$. Nous disons que le contrôle*

u_t^* *est un contrôle optimal si:*

$$\mathcal{J}\left(u_.^*\right) \leq \mathcal{J}\left(u_.\right), \forall u_. \in \mathcal{U}.$$

C'est-à-dire que le contrôle $u_.^*$ *réalise le minimum du critère* $\mathcal{J}\left(u_.\right)$ *sur l'ensemble des contrôles admissibles* $\mathcal{U}$.

Contrôle presque optimal

Definition 1.3.3 *Soit* $\varepsilon > 0$, *le contrôle* u^ε *est dit presque optimal (ou* ε*-optimal) si pour tout contrôle* $u_.$ *appartenant à* $\mathcal{U}$*:*

$$\mathcal{J}\left(u^\varepsilon\right) \leq \mathcal{J}\left(u\right) + \varepsilon.$$

Contrôle feed-back

Definition 1.3.4 *Nous disons que* u_t *est un contrôle de rétroaction (ou "feedback control" en anglais) si* u_t *dépend de la variable d'état* X_t. *Si* $\mathcal{F}_t^X$ *est la filtration naturelle générée par le processus* X *alors* u_t *est un contrôle de rétroaction si* u_t *est adapté à* $\mathcal{F}_t^X$.

Contrôle singulier

Definition 1.3.5 *Soient* A_1 *un sous-ensemble fermé convexes de* $\mathbb{R}$ *et* $A_2 = [0;\infty]$, *soient* U_{ad1} *et* U_{ad2} *deux classes définies comme suit:*

$$U_{ad1} = \left\{u_. : [s,t] \times \Omega \longrightarrow A_1 : \mathcal{F}_t\text{-adapté}\right\},$$
$$U_{ad2} = \left\{\xi_. : [s,t] \times \Omega \longrightarrow A_2 : \mathcal{F}_t\text{-adapté}\right\}.$$

Un contrôle admissible c'est une paire (u,ξ) $\mathcal{F}_t$-adapté, à valeur dans $A_1 \times A_2$, telque:

1. ξ est à variation bornée, non décroissante continue à gauche, limite à droite et $\xi_0 = 0$.

2. $$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |u_t|^2 + |\xi_T|^2\right] < \infty.$$

On note par $U_{ad1} \times U_{ad2}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles. Notons que depuis $d\xi_t$ peut être singulier par rapport à la mesure de Lebesgue dt, nous appellons ξ la partie singulier du contrôle et le processus u sa partie absolument continue.

Example 1.3.3 *Considérons l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante:*

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dB_t + G\left(t\right) d\xi_t, \\ x\left(0\right) = x, \end{cases} \tag{1.6}$$

où x est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable et indépendante à B telle que

$$\mathbb{E}\left[|x|^m\right] < \infty,$$

pour tout $m > 1$. Avec

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n; \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A_1 \longrightarrow M_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right),$$

et

$$G : [0,T] \longrightarrow M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$$

La solution $x^{(u,\xi)}$ est appelée la trajectoire du système controlée par (u, ξ).

On considère maintenant la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{J}(u,\xi) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt + \int_0^T k\left(t\right) d\xi_t\right],$$

avec:

$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times A_1 \longrightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ et } k : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

des fonction mesurables.

Contrôle relaxé Soit V c'est l'ensemble des mesures de Radon sur $[0, T] \times A$ dont la projection sur $[0, T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt muni de la tribu Borélienne (la plus petite tribu), telle que l'application $q \longrightarrow \int f(s, a)q(ds, da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continue en a.

Definition 1.3.6 *Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(\omega, dt, da)$ à valeur dans V telle que pour chaque t, $1_{[0,t]}q$ est $\mathcal{F}_t$- mesurable. Tout contrôle relaxé peut être intégré en*

$$q(\omega, dt, da) = dtq(\omega, t, da)$$

où $q(t, da)$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans I'espace des mesures de probabilités $\mathbb{P}(A)$. On note par $\mathcal{R}$ à l'ensemble des contrôles relaxés.

Un contrôle relaxé μ est dit optimal si

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q).$$

C'est-à-dire que la valeur du critère $\mathcal{J}(q)$ avec le contrôle relaxé μ est le minimum sur l'ensemble $\mathcal{R}$.

Remark 1.3.1 *Le problème de contrôle relaxé est une généralisation du problème de contrôle strict. En effet, si $q_t(da) = \delta_{u_t}(da)$ est une mesure de Dirac concentrée en un seul point $u_t \in U$, alors nous obtenons que le problème de contrôle strict est un cas particulier du problème de contrôle relaxé.*

Example 1.3.4 *Considerons un problème de contrôle relaxé gouverné par le système* *suivant:*

$$x_t^q = x + \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^q, a\right) q_s\left(da\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s^q\right) dB_s. \tag{1.7}$$

La fonction de coût dans ce cas est donné par:

$$\mathcal{J}\left(q\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^q\right) + \int_0^T \int_U h\left(t, x_t, q_t\right) q_t\left(da\right) dt\right].$$

Si

$$q_s(da) = \delta_{v_s}(da),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_U b\left(s, x_s^q, a\right) q_s\left(da\right) ds &= \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^q, a\right) \delta_{u_s}(da) ds \\ &= \int_0^t b\left(s, x_s^q, u_s\right) ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_U h\left(t, x_t, q_t\right) q_t\left(da\right) dt &= \int_0^T \int_U h\left(t, x_t, q_t\right) \delta_{u_s}\left(da\right) dt \\ &= \int_0^T h\left(s, x_s^q, u_s\right) dt,\end{aligned}$$

et le problème de contrôle relaxé devient:

$$x_t = x + \int_0^t b\left(s, x_s, u_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, x_s\right) dB_s,$$

et la fonction de coût

$$\mathcal{J}\left(u\right) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T\right) + \int_0^T h\left(t, x_t, u_t\right) dt\right],$$

qu'est un problème de contrôle strict.

1.3.4 Quelques inégalités utilisés

Proposition 1.3.1 *(Inégalité de Young) Soient* a, $b \geq 0$ *et* $p > 1$, $q < +\infty$ *deux exposants conjugués i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Un cas simple de l'inégalité de Young est l'inégalité avec exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec $\varepsilon > 0$:

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

Proof. on observe seulement que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

on ajoute $2ab$ de chaque côté et on divise par 2.

L'inégalité de Young avec ε suit, en appliquant l'inégalité de Young avec exposants 2 à

$$\grave{a} = a/\sqrt{\varepsilon}, \grave{b} = \sqrt{\varepsilon} b.$$

■

Proposition 1.3.2 *(Lemme de Granwall) Soient* φ, ψ *et* y *trois fonctions continues sur* $[a,b]$, *à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b]\,, y\,(t) \leq \varphi\,(t) + \int_a^t \varphi\,(s)\,\psi\,(s)\exp\left(\int_a^t \psi\,(u)\,du\right) ds.$$

Proposition 1.3.3 *(Dévelopment de Taylor-Young) Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* $n-1$ *fois dérivable,* $(n \in \mathbb{N})$ *et* $a, x \in I$ *.Alors*

$$f\,(x) = f\,(a) + f'\,(a)\,(x-a) + \frac{f''\,(a)}{2!}\,(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}\,(a)}{n!}\,(x-a)^n + o\,(|x-a|^n)\,.$$

Proposition 1.3.4 *(Dévelopment de Taylor-Young avec reste intégral) Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ *et* $a, x \in I$*. Alors*

$$f\,(x) = f\,(a) + f'\,(a)\,(x-a) + \frac{f''\,(a)}{2!}\,(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}\,(a)}{n!}\,(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}\,(a)}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}\,dt.$$

Chapter 2

Les conditions nécessaires pour les contrôles relaxés des EDSPR non linéaires

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre, nous examinons un problème de contrôle stochastique relaxé, où le système est dirigé par une équation différentielle stochastique progressive rétrograde non linéaire (EDSPR). Ce chapitre a été inspiré du réferences [2] et [5].

On utilise une classe de processus, les "contrôles relaxés", qui sont définis sur un espace spécifique, $P(U)$, où U représente un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Les contrôles relaxés se distinguent par deux propriétés importantes: la compacité et la convexité. La compacité signifie que cette classe de processus est "bien fermée" dans un certain sens, ce qui peut faciliter l'analyse mathématique et la résolution de problèmes. La convexité, d'autre part, implique que les combinaisons linéaires de deux processus quelconques de cette classe appartiennent également à la classe, ce qui offre des propriétés de régularité supplémentaires et facilite encore la résolution des problèmes de contrôle.

Donc, l'utilisation de ces contrôles relaxés offre une approche mathématique structurée et puissante pour résoudre les problèmes de contrôle stochastique, ce qui facilite l'analyse et la recherche de solutions.

L'objectif de ce type de problème de contrôle stochastique est d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité des contrôles sous la forme du principe de maximum stochastique de Pontryagin.

Le principe de maximum stochastique de Pontryagin est une extension du principe de maximum classique de Pontryagin aux problèmes de contrôle stochastique. Il fournit des conditions nécessaires pour les contrôles optimaux dans le cadre des systèmes dynamiques stochastiques. Ces conditions mettent en jeu les fonctions de coût, les équations d'état et les équations adjointes associées au système contrôlé.

Pour atteindre notre objectif, nous utilisant le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, pour appliquer la méthode de perturbation convexe.

2.2 Formulation du problème

Soit T un nombre réel strictement positif, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t, t \in [0;T])$ un mouvement Brownien d-dimentionnel et U un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Considerons un problème de contrôle relaxé gouverné par l'EDSPR suivante:

$$\begin{cases} dx_t^q = \int_U b\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + \int_U \sigma\left(t, x_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dB_t \\ x_0^q = x \\ dy_t^q = -\int_U f\left(t, x_t^q, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + z_t^q dB_t \\ y_T^q = \varphi\left(x_T^q\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que les fonctions suivantes soient mesurables et bornées:

$$\begin{cases} b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}), \\ f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

et x est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$ mesurable à $n-$dimension telle que

$$\mathbb{E}\left[|x|^2\right] \leq \infty.$$

Le coefficient b s'appelle le drift, σ s'appelle le diffusion de l'EDS et f s'appelle le générateur de l'EDSR.

La fonction de coût à minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$, est défini de

$$\mathcal{J}(q) = \mathbb{E}\left[g\left(x_T^q\right) + h\left(y_0^q\right) + \int_0^T \int_U l\left(t, x_t, y_t, z_t, a\right) q_t(da)dt\right], \tag{2.2}$$

telle que:

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \\ h &: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \\ l &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation (2.1) et le coût courant sont linéaires par rapport à la variable de contrôle relaxé.

Un contrôle relaxé μ est dit optimal si

$$\mathcal{J}(\mu) = \inf_{q\in\mathcal{R}} \mathcal{J}(q). \tag{2.3}$$

2.2.1 Théorème d'existance et d'unicité

Theorem 2.2.1 *(Existance et unicité)*

Soient b, σ, f et φ des fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $t \in [0,T]$, tout $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2n+2m+2n\times m}$:

1. Condition de Lipschitz **(H1)**:

$$|b(t, x_1, u) - b(t, x_2, u)|^2 \leq K\left(|x_1 - x_2|^2\right),$$

$$\|\sigma(t, x_1, u) - \sigma(t, x_2, u)\|^2 \leq K\left(|x_1 - x_2|^2\right),$$

$$|f(t, x_1, y_1, z_1, a) - f(t, x_2, y_2, z_2, a)|^2 \leq K\left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2\right),$$

$$|l(t, x_1, y_1, z_1, a) - l(t, x_2, y_2, z_2, a)|^2 \leq K\left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2\right).$$

2. Condition de régularité **(H2)**:

i) Les fonctions b, φ, σ, et g sont continues, bornées et continuement différentiables par rapport à x, et les fonctions f et h sont continues, bornées et continuement différentiables par rapport à (x, y, z), et à y respectivement.

ii) Les dérivées de b, φ, σ, et f par rapport leurs arguments sont continues et bornées.

iii) Les dérivées de l sont bornées par $K(1 + |x|, |y|, \|z\|)$.

iv) Les dérivées de g et h sont bornées par $K(1 + |x|)$, et $K(1 + |y|)$, $\forall K > 0$.

Sous l'hypothèse (**H1**) ou (**H2**), l'équation (2.1) a une solution forte unique (x, y, z) et le coût $\mathcal{J}$ est bien définie de U dans $\mathbb{R}$.

2.3 Résultats préliminaires

Comme l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, donc la méthode classique pour obtenir les conditions nécessaires d'optimalités pour les contrôles relaxés c'est la méthode de perturbation convexe. Plus précisément, soit μ un contrôle relaxé optimal et (x^u, y^u, z^u) la solution de (2.1) controlée par μ. Ensuite, pour chaque $t \in [0,T]$ nous pouvons définir un contrôle relaxé perturbé comme suit :

$$\mu_t^\theta = \mu_t + \theta \left(q_t - \mu_t \right),$$

ce qui implique:

$$\mu_t^\theta - \mu_t = \theta \left(q_t - \mu_t \right),$$

où $\theta > 0$ est suffisamment petit, et q est un élément arbitraire de $\mathcal{R}$.

Désignons par $\left(x^\theta, y^\theta, z^\theta\right)$ la solution de l'équation (2.1) associée à μ^θ.

À partir de l'optimalité de μ, l'inégalité variationnelle sera dérivée du fait que

$$0 \leq \mathcal{J}\left(\mu^\theta\right) - \mathcal{J}\left(\mu\right).$$

Pour cela, nous avons besoin du lemme classique suivant:

Lemma 2.3.1 *Sous l'hypothèse* ***(H2)****, nous avons:*

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] = 0, \tag{2.4}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|z_t^\theta - z_t^\mu\right\|^2 dt\right] = 0. \tag{2.6}$$

Le Lemme affirme qu'à mesure que le paramètre de perturbation θ devient plus petit, *les différences entre les trajectoires $\left(x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta\right)$ associées aux contrôles perturbés et les trajectoires $\left(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu\right)$ associées aux les contrôles optimaux, diminuent.*

Proof. *1. Preuve (2.4): Nous avons*

$$x_t^\theta = x + \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da)\, ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da)\, dB_s,$$

et

$$x_t^\mu = x + \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da)\, ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da)\, dB_s.$$

Donc:

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da)\, ds + \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da)\, dB_s \\ &\quad - \int_0^t \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da)\, ds - \int_0^t \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da)\, dB_s. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x_t^\theta - x_t^\mu &= \int_0^t \left(\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da) \right) dB_s. \end{aligned}$$

En utilisant la valeur absolue

$$\begin{aligned} \left|x_t^\theta - x_t^\mu\right| &\leq \left| \int_0^t \left[\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da) \right] ds \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t \left[\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) \mu_s^\theta (da) - \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right) \mu_s (da) \right] dB_s \right|. \end{aligned}$$

En utilisant Yong

$$\begin{aligned}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq 2 &\left|\int_0^t \left[\left(\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right)\right] ds\right|^2 \\ &+ 2\left|\int_0^t \left(\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right) dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq &\left[2\left(\int_0^t |1|^2 ds\right)\left(\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right)\right] \\ &+ 2\left|\int_0^t \left(\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right) dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq 2T &\left(\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right) \\ &+ 2\left|\int_0^t \left(\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right) dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

Par passage à l'espérance et appliquant l'Isométrie d'Itô, on obtaint:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq 2T\mathbb{E} &\left(\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right) \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right| ds\right].\end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant, on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq\; & 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left[\left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s(da)\right|^2\right] ds\right] \\
& + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U b\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U b\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right] \\
& + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left[\left|\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s(da)\right|^2\right] ds\right] \\
& + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_U \sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right],
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq\; & 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|b\left(s, x_s^\theta, a\right)\left(\mu_s^\theta(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds\right] \\
& + 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|b\left(s, x_s^\theta, a\right) - b\left(s, x_s^\mu, a\right)\right|^2 \mu_s(da)\, ds\right] \\
& + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\left(\mu_s^\theta(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds\right] \\
& + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_U \left|\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) - \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\right|^2 \mu_s(da)\, ds\right],
\end{aligned}
$$

d'après la définition de μ_t^θ, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2 \leq\; & C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t ds \int_U \left|b\left(s, x_s^\theta, a\right)\left(q_s(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2\right] \\
& + C\mathbb{E}\left[\int_0^t ds \int_U \left|\left(b\left(s, x_s^\theta, a\right) - b\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\mu_s(da)\right|^2\right] \\
& + C\theta^2\mathbb{E}\left[\int_0^t ds \int_U \left|\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right)\left(q_s(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2\right] \\
& + C\mathbb{E}\left[\int_0^t ds \int_U \left|\left(\sigma\left(s, x_s^\theta, a\right) - \sigma\left(s, x_s^\mu, a\right)\right)\mu_s(da)\right|^2\right],
\end{aligned}
$$

Comme b et σ sont Lipschitzienne et bornées, on a

$$
\mathbb{E}\left[\left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|x_s^\theta - x_s^\mu\right|^2 ds\right] + C\theta^2,
$$

Appliquant le lemme de Gronwall et l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy, nous obtenons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|x_t^\theta - x_t^\mu\right|^2\right] = 0.$$

2. Preuve de (2.5) et (2.6): Nous avons $y_t^\theta - y_t^\mu$ *sous la forme intégrale:*

$$\begin{aligned} y_t^\theta - y_t^\mu &= \varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T^\mu\right) \\ &+ \int_t^T \left(\int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right) ds \\ &- \int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\| dB_s, \end{aligned}$$

et sous la forme différentielle:

$$d\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right) = -\left[f\left(t, x_t^\theta, y_t^\theta, z_t^\theta, a\right)\mu_t^\theta - f\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\mu_t\right] dt + \left\|z_t^\theta - z_t^\mu\right\| dB_t$$

*En appliquant la formule d'**Itô** à* $\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right)^2$, *donc,*

$$d\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right)^2 = 2\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right) d\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right) + d\left\langle y^\theta - y^\mu, y^\theta - y^\mu\right\rangle_t,$$

$$d\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right)^2 = 2\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right) d\left(y_t^\theta - y_t^\mu\right) + \left\|z_t^\theta - z_t^\mu\right\|^2 dt,$$

par passage à l'intégrale de t à T et l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T^\mu\right)\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left\langle y_s^\theta - y_s^\mu, \int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right\rangle\right| ds\right]. \end{aligned}$$

D'après ***l'inégalité de Young****, pour chaque* $\varepsilon > 0$*, nous avons:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T^\mu\right)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \\
&+ \varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T^\mu\right)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \\
&+ \varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s^\theta(da) - \int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right] \\
&+ \varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\mu_s(da) - \int_U f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\mu_s(da)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T^\mu\right)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \\
&+ C\varepsilon\mathbb{E}\int_t^T \left|\int_U f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\left(\mu_s^\theta(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds \\
&+ C\varepsilon\mathbb{E}\int_t^T \left|\int_U \left(f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right) - f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\right)\mu_s(da)\right|^2 ds.
\end{aligned}
$$

D'après la définition de μ_t^θ*, on a :*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\varphi\left(x_T^\theta\right) - \varphi\left(x_T\right)\right|^2\right] + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] \\
&+ C\varepsilon\theta^2\mathbb{E}\left[\int_t^T \int_U \left|f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right)\left(q_s(da) - \mu_s(da)\right)\right|^2 ds\right] \\
&+ C\varepsilon\mathbb{E}\int_t^T \int_U \left|\left(f\left(s, x_s^\theta, y_s^\theta, z_s^\theta, a\right) - f\left(s, x_s^\mu, y_s^\mu, z_s^\mu, a\right)\right)\mu_s(da)\right|^2 ds,
\end{aligned}
$$

Comme φ est Lipschitzienne et f est Lipschitzienne et bornée, alors

$$\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \tag{2.7}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + C\varepsilon\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\left|z_s^\theta - z_s^\mu\right|\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta, \tag{2.8}$$

où α_t^θ est donné par:

$$\alpha_t^\theta = \mathbb{E}\left[\left|x_T^\theta - x_T^\mu\right|^2\right] + C\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|x_s^\theta - x_s^\mu\right|^2 ds\right] + C\varepsilon\theta^2.$$

D'après (2.4), nous avons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \alpha_t^\theta = 0. \tag{2.9}$$

On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2C}$, alors (2.7) devient

$$\mathbb{E}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta.$$

À partir de l'inégalité ci-dessus, nous tirons deux autres inégalités

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \left(2C + \frac{1}{2}\right)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + \alpha_t^\theta,$$

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|z_s^\theta - z_s^\mu\right\|^2 ds\right] \leq (4C+1)\,\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|y_s^\theta - y_s^\mu\right|^2 ds\right] + 2\alpha_t^\theta. \tag{2.10}$$

*Appliquant le lemme de **Fubini**, et le lemme de **Gronwall** nous obtenons*

$$\mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \alpha_t^\theta \exp\left(\left(2C + \frac{1}{2}\right)t\right),$$

par passage à la limite, quand θ tend vers 0 et on a:

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0,$$

*et l'inégalité de **Bukholder-Davis-Gundy**, nous obtenons*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right].$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|y_t^\theta - y_t^\mu\right|^2\right] = 0. \tag{2.11}$$

. Enfin, remplacant (2.10) dans (2.9) on prouve (2.6). ■

2.3.1 Equations Variationnelles

Lemma 2.3.2 *Soit $\tilde{x}_t$ et $\tilde{y}_t$ respectivement les solutions des équations linéaires suivantes (appelées équations variationnelles)*

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t = \int_U b_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right)\tilde{x}_t dt + \int_U \sigma_x\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right)\tilde{x}_t dB_t \\ \qquad + \left[\int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right) - \int_U b\left(t, x_t^\mu, a\right)q_t\left(da\right)\right]dt \\ \qquad + \left[\int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right) - \int_U \sigma\left(t, x_t^\mu, a\right)q_t\left(da\right)\right]dB_t \\ \quad \tilde{x}_0 = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

et

$$\begin{cases} d\tilde{y}_t = -\int_U \left[f_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\tilde{x}_t + f_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\tilde{y}_t + f_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\tilde{z}_t\right]\mu_t\left(da\right)dt \\ \qquad + \left[\int_U f\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\mu_t\left(da\right) - \int_U f\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)q_t\left(da\right)\right]dt + \tilde{z}_t dB_t, \\ \qquad \tilde{y}_T = \varphi_x\left(x_T^\mu\right)\tilde{x}_T. \end{cases} \tag{2.13}$$

Alors, les estimations suivantes sont valables

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left[\left|\frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \tilde{x}_t\right|^2\right] = 0, \tag{2.14}$$

$$\lim_{\theta\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left[\left|\frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \tilde{y}_t\right|^2\right] = 0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\| \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \tilde{z}_t \right\|^2 dt\right] = 0. \tag{2.16}$$

Proof. Pour simplifier, nous posons

$$X_t^\theta = \frac{x_t^\theta - x_t^\mu}{\theta} - \tilde{x}_t, Y_t^\theta = \frac{y_t^\theta - y_t^\mu}{\theta} - \tilde{y}_t, Z_t^\theta = \frac{z_t^\theta - z_t^\mu}{\theta} - \tilde{z}_t. \tag{2.17}$$

$$\left(t, \Lambda_t^\theta, a\right) = \left(t, x_t^\mu + \lambda\theta\left(X_t^\theta + \tilde{x}_t\right), y_t^\mu + \lambda\theta\left(Y_t^\theta + \tilde{y}_t\right), z_t^\mu + \lambda\theta\left(Z_t^\theta + \tilde{z}_t\right), a\right).$$

Preuve de (2.11): d'après (2.1), (2.11) et la notation (2.16), we have:

$$\begin{aligned}
X_t^\theta = & \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da)\right) ds \\
& + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\right) ds \\
& + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U \sigma(s, x_s^\theta, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da)\right) dB_s \\
& + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left(\int_U \sigma(s, x_s^\mu, a)\mu_s^\theta(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\right) dB_s \\
& - \int_0^t \int_U b_x(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\tilde{x}_s ds \\
& - \int_0^t \int_U \sigma_x(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da)\tilde{x}_s dB_s \\
& - \int_0^t \left(\int_U b(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) - \int_U b(s, x_s^\mu, a)q_s(da)\right) ds \\
& - \int_0^t \int_0^t \left(\int_U \sigma(s, x_s^\mu, a)\mu_s(da) - \int_U \sigma(s, x_s^\mu, a)q_s(da)\right) dB_s.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

On a: $X_t^\theta = \frac{1}{\theta}(x_t^\theta - x_t^\mu) - \tilde{x}_t$, donc: $x_t^\theta + \tilde{x}_t = \frac{1}{\theta}(x_t^\theta - x_t^\mu)$, on utilise la définition de

μ_s^θ, on obtain:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta}\int_0^t\left(\int_U b(s,x_s^\theta,a)\mu_s^\theta(da)-\int_U b(s,x_s^\mu,a)\mu_s^\theta(da)\right)ds\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^t\left(\int_U \sigma(s,x_s^\theta,a)\mu_s^\theta(da)-\int_U \sigma(s,x_s^\mu,a)\mu_s^\theta(da)\right)dB_s\\&=\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_U(b(s,x_s^\theta,a)-b(s,x_s^\mu,a))(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)ds\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_U(\sigma(s,x_s^\theta,a)-\sigma(s,x_s^\mu,a))(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)dB_s.\end{aligned}$$

Après le dévelopment, on a:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta}\int_0^t\left(\int_U(b(s,x_s^\theta,a)-b(s,x_s^\mu,a))(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)\right)ds\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_U(\sigma(s,x_s^\theta,a)-\sigma(s,x_s^\mu,a))(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)dB_s\\&=\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\left(\int_U b_x(s,x_s^\theta+\lambda(x_s^\theta-x_s^\mu),a)(x_s^\theta-x_s^\mu)(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)\right)ds\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\left(\int_U \sigma_x(s,x_s^\theta+\lambda(x_s^\theta-x_s^\mu),a)(x_s^\theta-x_s^\mu)(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)\right)dB_s\\&=\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\left(\int_U b_x(s,\Gamma_s^\theta,a)\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_t)(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)\right)ds\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^t\int_0^1\left(\int_U \sigma_x(s,\Gamma_s^\theta,a)\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_t)(\mu_s+\theta(q_s-\mu_s))(da)\right)dB_s\end{aligned}\tag{2.19}$$

où $(s,\Gamma_s^\theta,a):=(s,x_s^\theta+\lambda\theta(X_s^\theta+\tilde{x}_t),a)$. Remplacant (2.18) dans (2.17) et passant à l'esperence, on obtaint:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\left|X_t^\theta\right|^2]\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1\int_U\mid b_x(s,\Gamma_s^\theta,a)X_t^\theta\mid^2\mu_s(da)d\lambda ds\right]\\&+C\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^1\int_U\mid \sigma_x(s,\Gamma_s^\theta,a)X_t^\theta\mid^2\mu_s(da)d\lambda ds\right]+C\mathbb{E}[\left|\Phi_t^\theta\right|^2],\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_t^\theta = & \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, \Gamma_s^\theta, a)(x_s^\theta - x_s^\mu) q_s(da) d\lambda ds \\
& - \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, \Gamma_s^\theta, a)(x_s^\theta - x_s^\mu) \mu_s(da) d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_U b_x(s, \Gamma_s^\theta, a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda ds \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, \Gamma_s^\theta, a)(x_s^\theta - x_s^\mu) q_s(da) d\lambda dB_s \\
& - \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, \Gamma_s^\theta, a)(x_s^\theta - x_s^\mu) \mu_s(da) d\lambda dB_s \\
& + \int_0^t \int_0^1 \int_U \sigma_x(s, \Gamma_s^\theta, a) \tilde{x}_s \mu_s(da) d\lambda dB_s \\
& - \int_0^t \int_U b_x(s, \Gamma_s^\theta, a) \tilde{x}_s \mu_s(da) ds \\
& - \int_0^t \int_U \int_U \sigma_x(s, \Gamma_s^\theta, a) \tilde{x}_s \mu_s(da) dB_s,
\end{aligned}$$

commee b_x et σ_x sont continues et bornées, on a:

$$\mathbb{E}[\mid X_t^\theta \mid^2] = C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_s^\theta\right|^2 ds\right] + C\mathbb{E}[\left|\Phi_t^\theta\right|^2], \tag{2.20}$$

et

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E}[\left|\Phi_t^\theta\right|^2] = 0. \tag{2.21}$$

Utilisant (2.20), lemme de Granwall et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy dans (2.19), on trouve (2.13). ■

Par la même méthode de preuve de (2.13), on peut prouver (2.14) et (2.15).

2.3.2 Inégalité variationnele

Lemma 2.3.3 *Soient μ un contrôle relaxé optimal minimisant le fonctionnel $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{R}$, et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$ la solution de (2.1) associée à μ. Alors pour tout $q \in \mathcal{R}$, nous* *avons*

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[g_x\left(x_T^\mu\right)\tilde{x}_T\right]+\mathbb{E}\left[h_y\left(y_0^\mu\right)\tilde{y}_0\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left[\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)q_t(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\right]dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left[\int_U l_x\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\tilde{x}_t-\int_U l_y\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\tilde{y}_t\right]dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_U l_z\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\tilde{z}_t dt\right].
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Proof. *Soit μ un contrôle relaxé optimal minimisant le coût $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{R}$, alors nous obtenons*

$$0 \leq \mathcal{J}(\mu_\cdot^\theta)-\mathcal{J}(\mu_\cdot),$$

donc

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right)-g\left(x_T^\mu\right)\right]+\mathbb{E}\left[h\left(y_0^\theta\right)-h\left(y_0^\mu\right)\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a\right)\mu_t^\theta(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\right)dt\right] \\
&=\mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right)-g\left(x_T^\mu\right)\right]+\mathbb{E}\left[h\left(y_0^\theta\right)-h\left(y_0^\mu\right)\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a\right)\mu_t^\theta(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t^\theta(da)\right)dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t^\theta(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

Divisant par θ et par la définition de μ^θ nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[g\left(x_T^\theta\right)-g\left(x_T^\mu\right)\right]+\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[h\left(y_0^\theta\right)-h\left(y_0^\mu\right)\right] \\
&+\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t,x_t^\theta,y_t^\theta,z_t^\theta,a\right)\mu_t^\theta(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t^\theta(da)\right)dt\right] \\
&+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)q_t(da)-\int_U l\left(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a\right)\mu_t(da)\right)dt\right].
\end{aligned}
$$

Passant au dévelopement, on trouve

$$\begin{aligned}
0 \leq & \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left[g_x\left(x_T^\mu + \lambda\theta\left(\tilde{x}_T + X_T^\theta\right)\right)\tilde{x}_T\right] d\lambda\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left[h_y\left(y_0^\mu + \lambda\theta\left(\tilde{y}_0 + Y_T^\theta\right)\right)\tilde{y}_0\right] d\lambda\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(l_x\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\tilde{x}_t + l_y\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\tilde{y}_t + l_z\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\tilde{z}_t\right)\mu_t(da)\, d\lambda dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right) q_t(da) - \int_U l\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a\right)\mu_t(da)\right) dt\right] + \rho_t^\theta,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où ρ_t^θ est donné par

$$\begin{aligned}
\rho_t^\theta = & \mathbb{E}\int_0^1 \left[g_x\left(x_T^\mu + \lambda\theta\left(\tilde{x}_T + X_T^\theta\right)\right)X_T^\theta\right] d\lambda \\
& + \mathbb{E}\int_0^1 \left[h_y\left(y_0^\mu + \lambda\theta\left(\tilde{y}_0 + Y_T^\theta\right)\right)Y_T^\theta\right] d\lambda \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(l_x\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(x_t^\theta - x_t^u\right) + l_y\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(y_t^\theta - y_t^u\right)\right.\right. \\
& \left.\left. + l_z\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(z_t^\theta - z_t^u\right)\right) q_t(da)\, d\lambda dt\right] \\
& - \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(l_x\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(x_t^\theta - x_t^u\right) + l_y\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(y_t^\theta - y_t^u\right)\right.\right. \\
& \left.\left. + l_z\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)\left(z_t^\theta - z_t^u\right)\right) \mu_t(da)\, d\lambda dt\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^1 \int_U \left(l_x\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)X_T^\theta + l_y\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)Y_t^\theta + l_z\left(s, \Lambda_s^\theta, a\right)Z_t^\theta\right)\mu_t(da)\, d\lambda dt\right].
\end{aligned}$$

Puisque les dérivées g_x, h_y, l_x, l_y et l_z sont bornées, alors en utilisant l'inégalité de ***Cauchy-Schwartz****, nous avons*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\rho_t^\theta\right|^2\right] \leq & C\mathbb{E}\left[\left|X_T^\theta\right|^2\right] + C\mathbb{E}\left[\left|Y_0^\theta\right|^2\right] \\
& + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|x_t^\theta - x_t^u\right|^2 dt\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|y_t^\theta - y_t^u\right|^2 dt\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|z_t^\theta - z_t^u\right|^2 dt\right] \\
& + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|X_t^\theta\right|^2 dt\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Y_t^\theta\right|^2 dt\right] + C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t^\theta\right|^2 dt\right].
\end{aligned}$$

En utilisant (2.4), (2.5), (2.6), (2.13), (2.14), (2.15), nous obtenons

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left|\rho_t^\theta\right|^2\right] = 0. \tag{2.24}$$

D'près g_x, h_y, l_x, l_y et l_z sont continues, par passage à la limite lorsque θ tend vers 0 *dans (2.22) et utilisant (2.23) on trouve l'inégalité variationnelle (2.21).* ■

2.4 Les conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles relaxés

À partir de l'inégalité variationnelle (2.21), nous pouvons maintenant énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de contrôle relaxé {(2.1),(2.2),(2.3)} sous forme d'un principe de maximum.

Theorem 2.4.1 *(Les conditions nécessaires pour les contrôles relaxés) Soit μ un contrôle relaxé optimal minimisant la fonction de coût $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{R}$ et $(x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu)$ la solution de (2.1) contrôlée par μ. Alors, il existe trois processus adaptés (k^μ, p^μ, P^μ), solution unique du système EDSPR suivant (appelé équations adjointes)*

$$\begin{cases} dk_t^\mu = \mathcal{H}_y\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, k_t^\mu, p_t^\mu, P_t^\mu\right) dt \\ \qquad\qquad + \mathcal{H}_z\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, k_t^\mu, p_t^\mu, P_t^\mu\right) dW_t, \\ k_0^\mu = h_y\left(y_0^\mu\right) \\ dp_t^\mu = -\mathcal{H}_x\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, k_t^\mu, p_t^\mu, P_t^\mu\right) dt + P_t^\mu dW_t, \\ p_T^\mu = g_x\left(x_T^\mu\right) + \varphi_x\left(x_T^\mu\right) k_t^\mu, \end{cases} \tag{2.25}$$

tels que pour chaque $q_t \in \mathbb{P}(U)$. Alors

$$\mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, \mu_t, p_t^\mu, k_t^\mu, P_t^\mu\right) \leq \mathcal{H}\left(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, q_t, k_t^\mu, p_t^\mu, P_t^\mu\right), \mathbb{P}.s, \tag{2.26}$$

où le Hamiltonien $\mathcal{H}$ est défini à partir $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times M_{m\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t,x,y,z,q,k,p,P) = & \int_U l(t,x,y,z,a)\, q_t(da) + p \int_U b(t,x,a)\, q_t(da) \\ & + P \int_U \sigma(t,x,a)\, q_t(da) + k \int_U f(t,x,y,z,a)\, q_t(da).\end{aligned}$$

Proof. Puisque $k_0^\mu = h_y(y_0^\mu)$ et $P_T^\mu = g_x(x_T^\mu) + \varphi_x(x_T^\mu)\, k_t^\mu$, alors (2.21) devient

$$0 \leq \mathbb{E}[p_T^\mu \tilde{x}_T] + \mathbb{E}[k_0^\mu \tilde{y}_0] - \mathbb{E}[\varphi_x(x_T^\mu)\, k_T^\mu] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U l_x(t, x_t^\mu, y_t^\mu, z_t^\mu, a)\, \tilde{x}_t \mu_t(da)\, dt\right] \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}& + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U (l_y(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, \tilde{y}_t + l_z(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, \tilde{z}_t)\, \mu_t(da)\, dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, q_t(da) - \int_U l(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, \mu_t(da)\right) dt\right].\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Itô à $(p_t^\mu \tilde{x}_t)$ et $(k_t^\mu \tilde{y}_t)$, on trouve

$$\mathbb{E}[p_T^\mu \tilde{x}_T] = \tag{2.28}$$

$$- \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U f_x(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, \mu_t(da)\, k_t^\mu + \int_U l_x(t,x_t^\mu,y_t^\mu,z_t^\mu,a)\, \mu_t(da)\right) \tilde{x}_t dt\right] \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}& + \mathbb{E}\left[\int_0^T p_t^\mu \left(\int_U b(t,x_t^\mu,a)\, q_t(da) - b(t,x_t^\mu,a)\, \mu_t(da)\right) dt\right] \\ & + \mathbb{E}\left[\int_0^T P_t^\mu \left(\int_U \sigma(t,x_t^\mu,a)\, q_t(da) - \int_U \sigma(t,x_t^\mu,a)\, \mu_t(da)\right) dt\right].\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[k_0^{\mu}\tilde{y}_0\right] &= \mathbb{E}\left[k_T^{\mu}\tilde{y}_T\right] \qquad (2.30)\\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_U l_y\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\tilde{y}_t + \int_U f_x\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\tilde{x}_t\right)k_t^{\mu}dt\right]\\
&+ \mathbb{E}\int_0^T k_t^{\mu}\left[\int_U f\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a\right)q_t\left(da\right) - \int_U f\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\right]dt\\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_U l_z\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},a\right)\mu_t\left(da\right)\tilde{z}_t dt\right].
\end{aligned}
$$

Remplacant (2.27) et (2.28) dans (2.26), on trouve pour chaque $q \in \mathcal{R}$:

$$
0 \leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},q_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right) - \mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},\mu_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right)\right]dt.
$$

Maintenant, laissons $q \in \mathcal{R}$ et F être un élément arbitraire de $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t$, et définissons

$$
\pi_t = q_t\mathbf{1}_F + \mu_t\mathbf{1}_{\Omega-F}.
$$

Il est évident que π est un contrôle relaxé admissible. En appliquant l'inégalité ci-dessus avec π_t, nous obtenons

$$
0 \leq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_F\left\{\mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},q_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right) - \mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},\mu_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right)\right\}\right], \forall F \in \mathcal{F}_t.
$$

Ce qui implique que

$$
0 \leq \mathbb{E}\left[\mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},q_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right) - \mathcal{H}\left(t,x_t^{\mu},y_t^{\mu},z_t^{\mu},\mu_t,k_t^{\mu},p_t^{\mu},P_t^{\mu}\right)/\mathcal{F}_t\right].
$$

La quantité à l'intérieur de l'espérance conditionnelle est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$, et donc le résultat découle immédiatement. ■

Conclusion

Les contrôles relaxés se distinguent par deux propriétés importantes: la compacité et la convexité. La compacité signifie que cette classe de processus est "bien fermée" dans un certain sens, ce qui peut faciliter l'analyse mathématique et la résolution de problèmes. La convexité, d'autre part, implique que les combinaisons linéaires de deux processus quelconques de cette classe appartiennent également à la classe, ce qui offre des propriétés de régularité supplémentaires et facilite encore la résolution des problèmes de contrôle.

Donc, l'utilisation de ces contrôles relaxés offre une approche mathématique structurée et puissante pour résoudre les problèmes de contrôle stochastique, ce qui facilite l'analyse et la recherche de solutions.

L'objectif de ce type de problème de contrôle stochastique est d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité des contrôles sous la forme du principe de maximum stochastique de Pontryagin.

Le principe de maximum stochastique de Pontryagin est une extension du principe de maximum classique de Pontryagin aux problèmes de contrôle stochastique.

Dans ce travail, on a établi les conditions nécessaires d'optimalité satisfaites par un contrôle stochastique relaxé pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques progressives rétrogrades non linéaires. Pour réalisé cet objectif, nous utilisant le fait que l'ensemble des contrôles relaxés est convexe, et nous appliquons la méthode de perturbation convexe (faible).

Bibliography

[1] F. Antonelli, backward-forward stochastic differential equations, The Annals of Applied Probability, Vol 3. No 3, 777-793. (1993).

[2] S. Bahlali, Necessary and sufficient optimality conditions for relaxed and strict control problems. SIAM. J. Control. Optimal., Vol. 47, pp. 2078-2095. (2008).

[3] A.Ben sacia, Principe du maximum en contrôle stochastique pour des diffusions singulières à coefficients non linéaires, Thèse de doctorat Université Kasdi merbah de Ouargla.(2021).

[4] Bernoulli, Jacob (1695), "Explicationes, Annotationes & Additiones ad ea, quae in Actis sup. de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & paratim controversa legundur; ubi de Linea mediarum directionum, alliisque novis", Acta Eruditorum

[5] J.M Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Anal. Appl, 44, 384-404. (1973).

[6] Hairer, Ernst; Nørsett, Syvert Paul; Wanner, Gerhard (1993), Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-56670-0.

[7] M.Jeanblanc, Cours de Calcul stochastique Université d'Évry, France (2016).

[8] A. Ninouh, Some results on the stochastic control of backward doubly stochastic diffierential equations, thèse de Doctorat, university Mohamed Khider de Biskra (2021).

[9] Newton, Isaac. (c.1671). Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series), published in 1736 [Opuscula, 1744, Vol. I. p. 66].

[10] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Syst. Control Lett. 14, No.1, 55–61. (1990).

[11] Yong, J. M., Zhou, X. Y.: Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations, Springer-Verlag, New York, (1999)

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les conditions nécessaires d'optimalité des contrôles relaxé pour les équations différentielles stochastique progressives et rétrogrades (EDSPR) non linéaires. Dans le premier chapitre, nous donnons quelques généralités de calcul stochastique ainsi que les différents types des contrôles stochastique . Dans le deuxième chapitre nous établirons les conditions nécessaires d'optimalités sous forme d'un principe de maximum stochastique pour le contrôle relaxé des systèmes des EDSPR non linéaires .

ABSTRACT

In this work we study the necessary optimality conditions of relaxed controls for nonlineair forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs). In the first chapter, we give some generalities of stohastic calculus as well as the differents types of stochastic control . In the second chapter, we establish the necessary optimality conditions in the form of a stochastic maximum principle for relaxed controls for system of nonlineair FBSDEs.

الملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة الشروط اللازمة للتحكم المرخي للمعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية التقدمية التراجعية غير الخطية، وفي الفصل الأول نقوم بتقديم بعض المفاهيم العامة في الحساب العشوائي الزمني وكذا مختلف انواع التحكم العشوائي. في الفصل الثاني ندرس الشروط اللازمة لهذا النظام في شكل مبدأ أقصى عشوائي لعناصر التحكم المرخي.