

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “**Mathématiques Appliquées**”

Option : **statistique**

Par Mr **Ben charif Abdelmalek Amine**

Titre :

Gestion d'un marché financier

Devant le Jury :

Mme Belmir Imen Dr U. Biskra Président

Mme. Chine Amel Dr U. Biskra Examinatrice

Mme Toubia Sonia Dr U. Biskra Encadreur

Soutenu Publiquement le :11/06/2024

Dédicace

À mon chère PÈRE,

À ma chère MÈRE,

À mes chères frères et mes sœurs.

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements, mon appréciation et mon respect à mon

*Encadreur : **Touba Sonia.***

*Je tiens à remercier les membres du Jury : **Belmir Imen, Chine Amel.***

A tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce cette mémoire.

Merci

Résumé

Une étude approfondie sur les marchés financiers à été réalisé, en particulier les **rendements** d'actifs dont la variance est infinie. La loi normal ne peut pas rendre compte les grandes pertes à la survenance des valeurs extrêmes. Pour cela les lois stables sont les bonnes candidas pour modéliser les rendements et de trouver d'autres théorèmes pour la prévision.

Mots clés : Rendements d'actifs, Loi Normale, Lois alpha-Stables.

Abstract

An in-depth study on the financial markets was carried out, in particular the returns of assets whose variance is infinite. The normal law cannot account for the large losses when extreme values occur. For this, stable laws are the right candidates for modeling returns and finding other theorems for predicting.

Key words: Returns of assets, Normal law, Stable laws.

المخلص

تم إجراء دراسة معمقة للأسواق المالية، ولا سيما عوائد الأصول التي لا نهاية لتباينها. ولا يمكن للقانون العادي أن يفسر الخسائر الكبيرة عند حدوث قيم متطرفة. ولهذا السبب، فإن القوانين المستقرة هي المرشح المناسب لنمذجة العوائد وإيجاد نظريات أخرى للتنبؤ.

الكلمات المفتاحية: عوائد الأصول، القانون العادي، القوانين المستقرة

Notations et symbols

TCL	:	Théorème centrale limite
$i.i.d$:	Indépendantes identiquement distribuées
$v.a.r$:	variable aléatoire réelle
EX	:	Espérance ou moyenne de X
$F(.)$:	Df d'une $v.a.X$
i.e	:	En d'autre terme
\mathbb{R}	:	Ensemble réel
\mathbb{R}^+	:	Ensemble réel positif

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé du mémoire	iii
Notations et symbols	iv
Table des matières	v
Table des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
1 Les marchés financiers	3
1.1 Définition	3
1.2 Les types des marchés financiers	3
1.2.1 Classification organisationnelle :	3
1.2.2 Classification économique :	4

TABLE DES MATIÈRES

1.2.3	Classification par nature d'engagement :	6
1.3	Les principaux acteurs du marché financier	6
1.3.1	Les émetteurs de titres financiers :	6
1.3.2	Les investisseurs :	7
1.4	L'autorité de régulation du marché financier :	8
1.5	Indice boursier :	9
1.5.1	Définition :	9
1.5.2	Exemples des indices boursiers :	9
2	Modélisation des Rendement D'actif	12
2.1	Rendement D'actif :	12
2.1.1	Les différents types de rendements :	13
2.2	Non Normalité des rendements :	14
2.2.1	Test de Normalité des rendements :	14
2.2.2	Conclusion :	21
2.3	La loi $\alpha - stable$:	21
2.3.1	Définitions et fonction caractéristique :	21
2.3.2	Signification des paramètres :	23
2.3.3	La loi $\alpha - stable$ symétrique :	24
2.3.4	Propriétés de la loi α -stable :	24
2.3.5	La fonction de densité :	26
2.3.6	La fonction de distribution :	27
2.3.7	Stabilité :	27
2.3.8	Queues lourdes :	28

TABLE DES MATIÈRES

2.3.9	Calcul des moments :	28
2.3.10	Algorithme de simulation :	29
2.4	Estimation des paramètres de la loi stable :	31
2.4.1	Méthode de McCulloch :	31
	Conclusion	35
	Bibliographie	36

Table des figures

2.1	Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 24/05/2024	15
2.2	Distribution des rendements de l'indice boursier Nazdaq	16
2.3	Modèle normale pour les queues(g) de rendement de l'indice boursier Nazdaq	16
2.4	Modèle normale pour les queues(d) de rendement de l'indice boursier Nazdaq.	17
2.5	Density des rendements de l'indice boursier Nazdaq.	17
2.6	QQ-plot ,quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nazdaq	18
2.7	QQ-plot el abline($v=-3$) ; quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nazdaq	19

Liste des tableaux

2.1	Moyenne et variance théorique d'une variable aléatoire alpha stable.	28
2.2	Estimation des paramètres du loi alpha-stable via l'approche de McCulloch pour 5000 réalisations.	34

Introduction

En modélisation statistique, la loi gaussienne est la loi la plus utilisée pour étudier de nombreux phénomènes physiques et des données de nature variée. Ses différentes propriétés, comme la stabilité, le fait que deux paramètres (moyenne et variance) suffisent à la caractériser ou bien encore le théorème de la limite centrale. Les résultats obtenus à partir d'une telle modélisation sont généralement satisfaisants. Par exemple, l'analyse classique des séries chronologiques traite principalement de l'analyse statistique des processus stationnaires et, en particulier, des processus linéaires où les innovations à valeurs réelles sont indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance finie. Malheureusement la loi normale devient inefficace lorsque l'on a des phénomènes présentant de nombreuses valeurs extrêmes, qui ne peuvent être considérées comme des valeurs aberrantes.

Les lois stables non-gaussiennes sont une alternative car elles sont une généralisation de la loi normale et prennent en compte des queues lourdes.

Depuis les travaux de pionniers de B. Mandelbrot ([3]), et d'autres auteurs tels que Fama et Roll ([2]), les lois stables ont été l'objet d'un intérêt grandissant pour des chercheurs travaillant dans des domaines comme l'économie. Ils se sont attachés à démontrer que les queues de distribution d'une loi normale ne rendent pas compte de façon suffisamment

réaliste de survenance de variations de grandes amplitudes brusques et instantanées. En particulier, les séries financières où la variance empirique se déclare très grande. Donc la

question de savoir si la variance théorique est finie ou infinie, se pose.

Dans le cadre des distributions à variance infinie les lois α -*stables* sont les bonnes candidates en modélisation des rendements des actifs financiers.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, en première partie, nous allons voir la définition des marchés financiers et sont types et principaux acteurs, l'autorité de régulation de cette marché, en deuxième partie nous donnons la définition de Indice boursier et quelque exemples (NASDAQ, CAC40, Dow Jones, S&P 500).

dans Le deuxième chapitre, nous rappelons la définition et les types de Rendement d'actif, et on va tester sa normalité par appliqué les test graphiques, et quelque test statistiques spécifiques (Kolmogorov Smirnov, Shapiro Wilk), enfin on parle sur les loi α -*stables* (définition, propriétés, La fonction de densité, estimation des paramètres).

Chapitre 1

Les marchés financiers

1.1 Définition

Un marché financier est un lieu, physique ou virtuel, où les acteurs du marché (acheteurs, vendeurs) se rencontrent pour négocier des produits financiers (actions, obligations, dérivés, devises. . .). Il permet aux acteurs de l'économie de se financer et aux investisseurs de placer leur épargne.

1.2 Les types des marchés financiers

Il existe plusieurs types de marchés financiers caractérisés selon différents critères :

1.2.1 Classification organisationnelle :

Dans cette catégorie, on distingue les marchés qui sont organisés et les marchés de gré à gré.

1.2.2 Classification économique :

Le marché de capitaux à court term :

Ce marché regroupe deux marchés :

Le marché interbancaire : qui est réservé aux banques pour échanger entre elles des actifs financiers et emprunter/prêter à court terme. Ou encore à la banque centrale qui intervient pour apporter ou reprendre des liquidités (gestion de la masse monétaire pour contrôler l'inflation). C'est sur ce marché que s'établissent notamment les taux d'intérêt à très court terme (au jour le jour ou à 7 jours par exemple).

Le marché monétaire : qui est un marché de capitaux à court et moyen terme. Il permet aux institutions financières -Trésors nationaux, banques centrales, banques, gestionnaires de fonds, assureurs, etc.- et aux grandes entreprises de placer leurs avoirs à court terme ou de se procurer des financements courts. Par "court", on entend généralement moins d'un an.

Le marché de capitaux à long terme :

Ce marché comprend lui aussi deux marchés :

Les marchés des actions : sont des marchés où sont émises et échangées les actions des sociétés cotées.

Le terme usuel est évidemment la bourse (de Paris, de New York, etc.).

Le marché obligataire : est un marché où sont émises et échangées les obligations des entreprises ou des collectivités publiques.

Le marché des changes (forex) :

marché mondial, qui est essentiellement interbancaire, sur lequel s'échangent les devises des différents pays (exemple de produit traité : la parité dinar/dollar.)

Le marché des dérivés :

Marché où s'échangent des instruments financiers dérivés d'un actif support (action, obligation, etc.). Les intervenants sur ces marchés sont des investisseurs professionnels.

Les marchés du neuf et de l'occasion :

Les marchés eux-mêmes sont scindés en deux compartiments : le marché primaire et le marché secondaire.

Marché primaire : pour l'émission des titres

Marché secondaire : pour l'achat et la revente des titres.

Sur le marché primaire sont émises et souscrites les valeurs mobilières nouvelles. Sur le marché secondaire, sont vendues et achetées les valeurs mobilières «anciennes». Le marché secondaire est donc une sorte de marché de «l'occasion», à ceci près que l'on ne peut pas parler d'usure dans le cas d'une valeur mobilière. . .

1.2.3 Classification par nature d'engagement :

On peut distinguer les marchés financiers par la nature de l'engagement pris par les parties prenantes :

Sur le marché au comptant : l'acheteur paye le montant convenu et le vendeur livre le titre financier sous un délai qui est généralement de deux jours après la négociation.

Sur les marchés à terme : l'acheteur et le vendeur s'engagent pour une transaction à une date future sur un produit, une quantité et un prix convenu.

1.3 Les principaux acteurs du marché financier

Emetteurs de titres et investisseurs sont les principaux acteurs du marché financier :

1.3.1 Les émetteurs de titres financiers :

Sont les entreprises cotées, l'Etat et les collectivités locales ainsi que les institutions financières :

Les entreprises :

Pour se procurer des capitaux longs, les entreprises ont plus souvent recours à l'émission d'actions, moins coûteuse que l'émission d'obligations.

L'Etat et les collectivités locales :

Émettent exclusivement des obligations pour se procurer des capitaux à long terme.

Les institutions financières :

Pour se procurer des ressources, les institutions financières, comme les autres agents, ont recours au marché financier.

1.3.2 Les investisseurs :

Qui interviennent sur le marché financier sont des investisseurs privés, des investisseurs institutionnels, des investisseurs étrangers ainsi que des institutions financières :

Les investisseurs privés :

Sont les particuliers qui investissent pour faire fructifier leur épargne et les entreprises qui interviennent en tant qu'investisseurs pour gérer leur trésorerie ou prendre des participations dans d'autres entreprises.

Les investisseurs institutionnels :

Regroupent les compagnies d'assurance, les caisses de retraite et les organismes de placement collectif (SICAV, FCP). Ils placent les fonds qu'ils collectent auprès d'une multitude de petits épargnants. Les masses des fonds qu'ils ont à gérer font d'eux les principaux acquéreurs de titres sur les marchés.

Les investisseurs étrangers :

Sont les investisseurs non résidents qui cherchent à diversifier leurs placements pour diminuer le risque de perte du capital.

Les institutions financières :

Interviennent pour réaliser des placements rémunérateurs.

1.4 L'autorité de régulation du marché financier :

La surveillance et la régulation des marchés financiers en algérie est à la charge de La Commission d'Organisation et de Surveillance des Opérations de Bourse (COSOB).

COSOB est une autorité de régulation indépendante, jouissant de la personnalité morale et de l'autonomie financière. Elle a été instituée par le décret législatif n° 93-10 du 23 mai 1993, modifié et complété, relatif à la bourse des valeurs mobilières.

La COSOB a pour mission d'organiser et de surveiller le marché des valeurs mobilières en veillant notamment :

- à la protection de l'épargne investie en valeurs mobilières ou tout autre produit financier donnant lieu à appel public à l'épargne.

- au bon fonctionnement et à la transparence du marché des valeurs mobilières.

1.5 Indice boursier :

1.5.1 Définition :

Un indice boursier est un outil qui mesure les performances d'un groupe de sociétés cotées en bourse. Il représente l'évolution globale du marché financier. Les indices boursiers sont utilisés comme référence pour évaluer la performance des fonds d'investissement, des portefeuilles individuels et de l'économie globale.

-Les indices boursiers jouent un rôle crucial dans l'analyse et la compréhension des mouvements du marché. Ils permettent aux investisseurs de suivre les tendances et les fluctuations des prix des actions, ce qui les aide à prendre des décisions éclairées en matière d'investissement.

1.5.2 Exemples des indices boursiers :

NASDAQ :

(National Association of Securities Dealers Automated Quotations) Créé en 1971, est une bourse d'échange électronique américaine qui se concentre principalement sur les actions technologiques. Elle permet aux investisseurs d'acheter et de vendre des actions de sociétés cotées en bourse.

Le NASDAQ composite est l'indice boursier rattaché au NASDAQ. Il suit la per-

formance des actions cotées sur la bourse d'échange. Cet indice comprend des entreprises de différents secteurs, mais il est principalement axé sur les entreprises technologiques.

CAC 40 :

(CAC signifiant originellement Compagnie des Agents de Change, aujourd'hui Cotation Assistée en Continu) Créé en 1987,est le principal indice boursier de la Bourse de Paris. C'est un indice flottant pondéré en fonction de la capitalisation boursière qui reflète la performance des 40 actions les plus importantes et les plus activement négociées cotées sur Euronext Paris.

Dow Jones Industrial Average :

Créé en 1896 par Charles Dow et Edward Jones, souvent raccourci en Dow Jones est un indice du New York Stock Exchange. C'est le plus vieil indice boursier du monde.

L'indice repose sur la capitalisation boursière de 30 des plus grosses entreprises cotées au New York Stock Exchange. Les entreprises présentes évoluent avec le temps.

La marque Dow Jones est la propriété de Dow Jones Indexes, une coentreprise détenue à 90 % par CME Group et à 10 % par Dow Jones and Company.

S&P 500 :

(Standard & Poor's 500) Créé le 4 mars 1957, est un indice boursier construit à partir de 500 grandes entreprises cotées sur les bourses américaines (Apple, Microsoft Corp, Amazon, ...) . Il est considéré comme l'indice de référence en ce qui concerne les actions de grandes capitalisations aux états-unis et fait partie des indices les plus largement utilisés.

Chapitre 2

Modélisation des Rendement D'actif

2.1 Rendement D'actif :

Le rendement est défini comme étant le gain ou la perte de valeur d'un actif sur une période donnée. Il est constitué des revenus occasionnés et des gains en capitaux d'un investissement et est habituellement représenté sous la forme d'un pourcentage. Ces derniers peuvent prendre la forme de coupons pour les titres à revenus fixes et de dividendes pour les actions échangées sur les marchés boursiers. Pour un investisseur, le rendement d'un actif est plus important que le prix lui-même car il lui donne une information directe sur les profits (ou pertes) qui peut réaliser.

2.1.1 Les différents types de rendements :

Dans toute la suite on considère une suite de n prix d'un titre financier (X_1, X_2, \dots, X_n)

On définit le prix $X_t > 0$ d'un titre financier observé au temps t .

Le rendement arithmétique :

On appelle rendement arithmétique (ou le rendement discret) la quantité définie par :

$$R_{arith_t} = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}.$$

Le Log-rendement :

Implicitement le prix considéré est celui de la fermeture. On définit aussi le taux de rendement effectif R_t sur une période comprise dans l'intervalle de temps $[t - 1, t]$. C'est le taux composé continument, aussi appelé force d'intérêt, qui aurait occasionné les mêmes gains ou pertes sur un montant déposé en banque au cours de la période concernée.

est définie comme suit :

$$R_{t,t-1} = \log P_{t,t-1} - \log P_t. \quad (2.1)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{t,t-1} : \text{rendement de temps } t - 1 \text{ vers } t. \\ P_{t,t-1} : \text{est la rémunération générée par l'actif entre les dates } t \text{ et } t - 1. \\ P_t : \text{est le prix d'un actif à l'instant } t. \end{array} \right.$$

2.2 Non Normalité des rendements :

Les rendements d'actifs financiers ont été pour longtemps décrits, en vertu du théorème central limite, par la distribution normale, car étant souvent considérés comme résultant du cumul d'un grand nombre d'informations et de décisions individuelles. Mais cette modélisation est contredite, depuis les travaux de Mandelbrot dans les années 60(?). Le modèle normal n'est que l'expression du Théorème Central Limite (TCL) : le rendement sur une période T peut être considéré comme la somme de rendements aux sous périodes de durée $T = n$, avec n le nombre de sous périodes. Si ces rendements sont identiquement distribués et indépendants, alors le Théorème Central Limite s'applique et la distribution du rendement converge vers une loi normale. Il est donc logique de tester cette hypothèse.

2.2.1 Test de Normalité des rendements :

1- Tests graphiques :

-Histogramme .

-Quantile-Quantile.

2-Les tests statistiques spécifiques : test de **Kolmogorov Smirnov**, du **Chi2**. de **Shapiro Wilk**, de **Jarque Bera**.

Type des données :

Les données dont on dispose sont les prix des indices boursiers, en particulier le rendement journalier de l'indice boursier Nasdaq.

L'ensemble de données est composé de 13443 observations des prix de clôture journaliers $(P_t)_{t=0}$, du Nasdaq entre le (05/02/1971) et (24/05/2024) prises de

site Web "www.finance.yahoo.com" .

Les 13443 rendements sont distribués comme la figure (2.1)



FIG. 2.1 – Les prix de fermeture quotidienne de l'indice boursier Nasdaq, de la période allant du 05/02/1971 au 24/05/2024

Histogramme :

Voir les figures (2.2)(2.3)(2.4)(2.5).

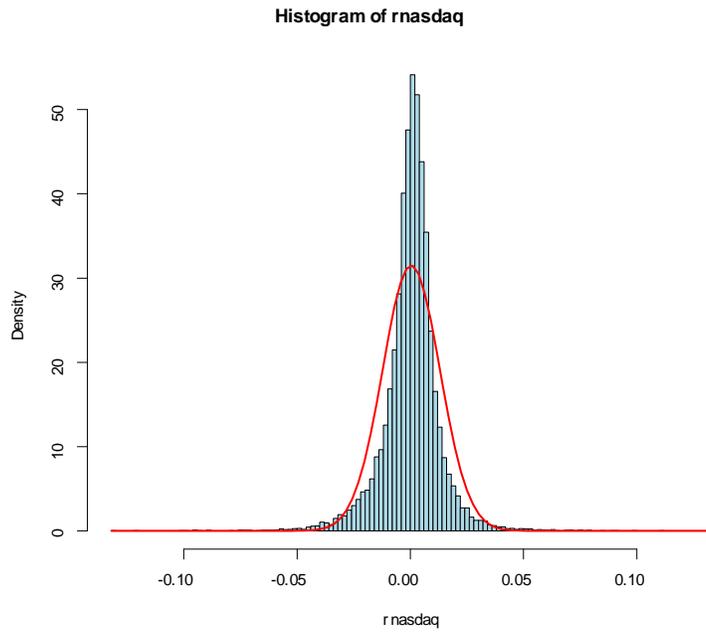
On note que : les rendements faibles sont plus fréquents et queues de distribution épaisses sont : plus fréquentes et de plus grande ampleur.

Quantile-Quantile :

Voir les figures (2.6)(2.7).

Désigné aussi par le terme "**qq-plot**". Un **qqplot** permet de voir rapidement l'adéquation d'un échantillon à une distribution, ou comparer deux échantillons entre eux.

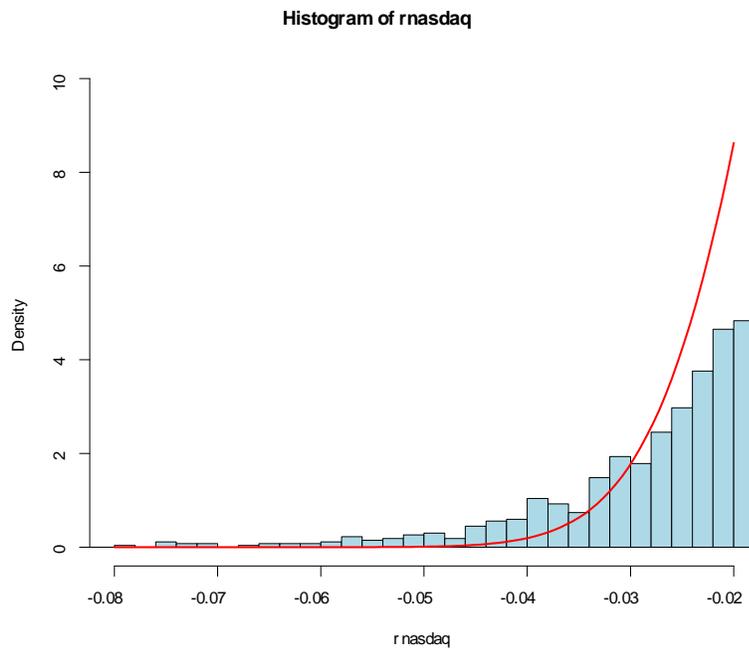
of rnasdaq



3.pdf

FIG. 2.2 – Distribution des rendements de l'indice boursier Nazdaq

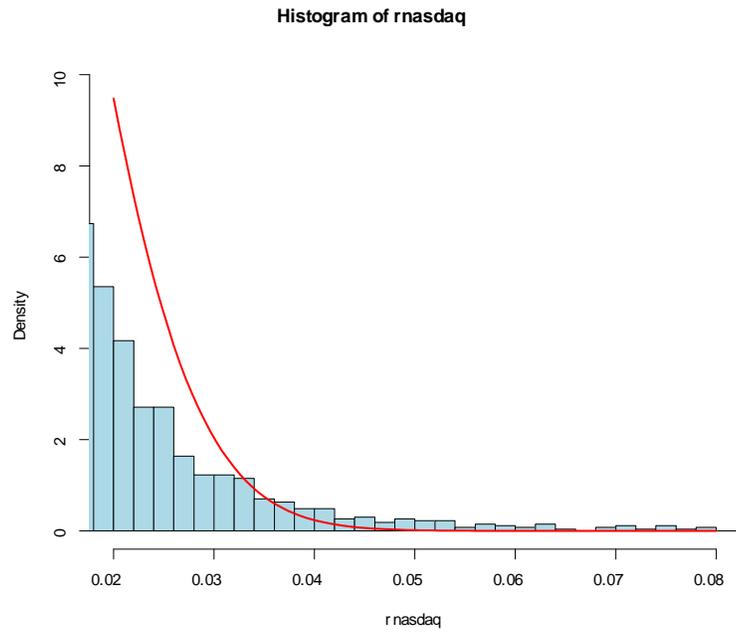
of rnasdaq left



4.pdf

FIG. 2.3 – Modèle normal pour les queues(g) de rendement de l'indice boursier Nazdaq

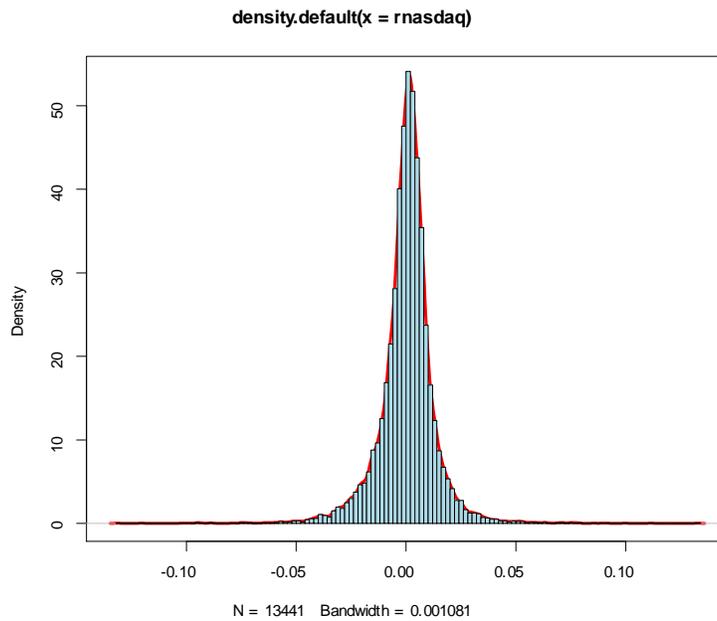
of rnasdaq r



5.pdf

FIG. 2.4 – Modèle normale pour les queues(d) de rendement de l'indice boursier Nazdaq.

of density



6.pdf

FIG. 2.5 – Density des rendements de l'indice boursier Nazdaq.

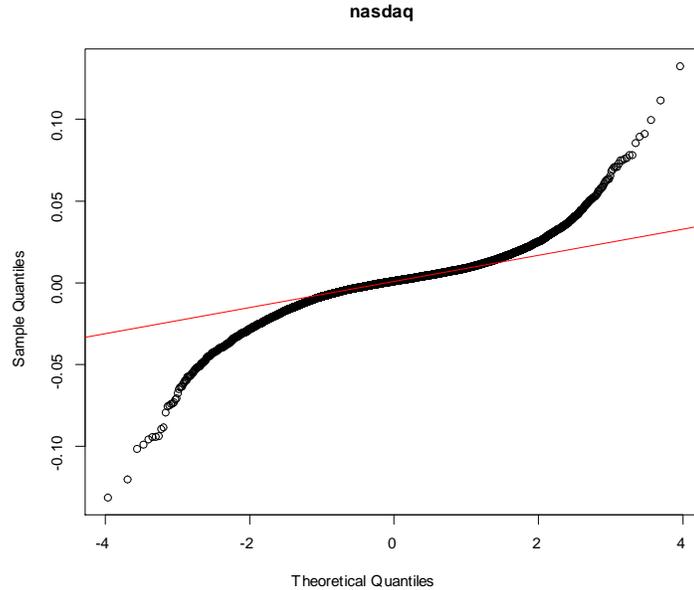


FIG. 2.6 – QQ-plot ,quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nazdaq .

Soient F , la fonction de répartition estimée construite à partir des observations, représentée sur l'axe des y ,

et G la fonction de répartition théorique, représentée sur l'axe x .A chaque observation représentée par l'ordonnée y , on fait correspondre, l'abscisse x , tel que $x = G^{-1}(F(y))$

Si F provient de G , alors $x = G^{-1}(F(y)) \sim y$ et on devrait observer une droite.Dans le cas contraire, en cas de déviations évidentes, on pourra rejeter l'hypothèse de l'adéquation de l'échantillon a la distribution théorique.

R permet de créer des **qqplots** a l'aide des fonctions `qqplot` pour le cas général et `qqnorm` pour une comparaison avec une distribution normale. **qqnorm** utilise une variable centrée

réduite sur l'axe des x qui représente donc les ecarts a la moyenne en nombre de

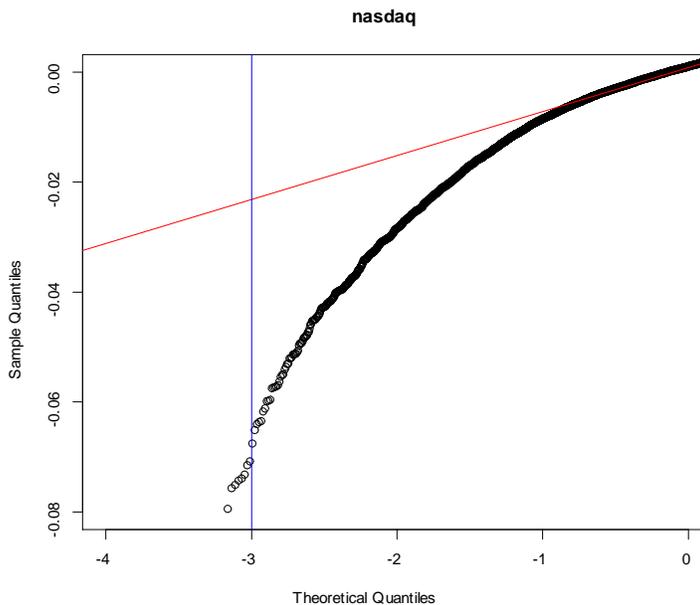


FIG. 2.7 – QQ-plot et $abline(v=-3)$; quantiles normaux contre quantiles empiriques des rendements de l'indice boursier Nazdaq

sigma's.

Conclusion : Il apparaît que les rendements semblent gaussiens au centre de la distribution (de 1 à 3 sigmas en fonction de l'actif et la période), mais s'en écartent aux extrêmes avec

des queues de distribution plus épaisses.

Les tests statistiques :

Dans **R**, La plupart des tests se trouvent dans le package `ctest` pour "classical tests" :

chisq.test() : Test du χ^2 .

ks.test() :Kolmogorov-Smirnov.

shapiro.test() : Shapiro Wilk.

binom.test() : test loi binomiale.

t.test() : test de studen

Test de Kolmogorov Smirnov, voir **ks.test** est la traduction statistique des **qq-plots** :il est basé sur les ecarts entre les fonctions de répartition. **ks.test** est très général

car il permet de comparer deux échantillons, cependant **R** n'inclut pas les corrections nécessaires dans le cas d'une distribution normale dont la variance est inconnue : il

faudrait utiliser les corrections de Lilliefors. On pourra tout de même l'utiliser avec un échantillon théorique générer par **rnorm** avec la moyenne et la variance empiriques.

Ces tests renvoient une probabilité critique, la p-value. La p-value est la probabilité d'obtenir ce type d'échantillon sous l'hypothèse nulle. C'est aussi la probabilité de faire une

erreur si on rejette l'hypothèse nulle.

Dans le cas des tests de normalité, l'hypothèse nulle est : "l'échantillon est issue d'une loi normale", une p-value de 0 :02 signifie que la probabilité de faire une erreur en rejetant

le modèle normal est de 2%. Par exemple, on rejète l'hypothèse nulle au seuil de 5% car 5% est supérieur a la p-value. Par contre, on ne rejète pas au seuil de 1% car la p-value est supérieur a 1%.

On applique le test de **shapiro wilk** et le résultat est :

$$W = 0.9211, p - value < 2.2e - 16$$

On note que : la p-value tand vers 0 , alors on rejète l'hypothèse (que les données suivent une distribution normal).

-Pour le test de Kolmogorov-Smirnov le résultat est :

$$D = 0.35332, p - \text{value} < 2.2e - 16$$

On note que : la p-value tend vers 0 , alors on rejète l'hypothèse (que les données suivent une distribution normal).

2.2.2 Conclusion :

D'après l'étude précédente et la confirmation de Mandelbrot ,les rendements d'actifs sont $\alpha - \text{stables}$ distribuées.

2.3 La loi $\alpha - \text{stable}$:

2.3.1 Définitions et fonction caractéristique :

Il existe plusieurs définitions (conditions) et façons de caractériser une $\alpha - \text{stable}$:

Définition 1 :

Soient a, b deux nombres réels positifs et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Il existe $c \in R^+$ et $d \in R$ qui satisfont :

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \text{ en distribution.}$$

Définition 2 :

Une *v.a.r.* X a une distribution stable \iff pour tout k et toute famille X_1, \dots, X_k *i.i.d.* de même loi que X , il existe

a $k > 0$ et b_k , deux réels, tels que :

$$X_1 + \dots + X_k = a_k X + b_k \text{ en distribution.}$$

Lorsque $b_k = 0$, on parle de distribution strictement stable.

Remarque : Il y a plusieurs représentations pour ' (correspondant aux différentes paramétrisations des lois stables) dont la plus célèbre est donnée par Samorodnitsky et Taqqu([5]) , Weron .

Définition 3 (La fonction caractéristique) :

On dit d'une variable aléatoire réelle X qu'elle suit une loi α -stable de paramètres α, β, γ et δ que l'on note $X \equiv S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme :

$$\varphi_X(t) = \exp \begin{cases} i\delta t - \gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign}(t)) \ln |t|] & , \alpha = 1 \\ i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta(\text{sign}(t)) \tan \frac{\alpha\pi}{2}] & , \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\varphi_1)$$

tel que :

$$\text{sign}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ -1, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Définition 3 (La fonction caractéristique) :

(Cette expression de φ a donné par Zolotarev([6])) On appellera $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$

si la fonction caractéristique de X est définie par :

$$\varphi_X(t) = \exp \begin{cases} i\delta_0 t - \gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(t)) (\ln |t| + \ln \gamma)] & , \alpha = 1 \\ i\delta_0 t + \gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta (\text{sign}(t)) (\tan \frac{\alpha\pi}{2}) ((\gamma |t|)^{1-\alpha} - 1)] & , \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\varphi_2)$$

Les parametres α, β et γ sont les mêmes dans les deux paramétrisations φ_1 et φ_2 ,

d'où les parametres de position sont reliés comme suivant :

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 - \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln \gamma & , \alpha = 1 \\ \delta_0 - \beta (\tan \frac{\alpha\pi}{2}) \gamma & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

2.3.2 Signification des paramètres :

1- α : est l'exposant caractéristique ou l'indice de stabilité qui n'est rien d'autre qu'un coefficient d'aplatissement (Kurtosis), aussi bien pour le mode que pour les queues

$0 < \alpha < 2$. $\alpha = 2$ correspond a une loi stable particulière : la très célèbre loi de Gauss ou loi normale.

2- β : est le paramètre d'asymétrie, mesurant le degré d'asymétrie (skewness) de la distribution, $-1 \leq \beta \leq 1$. $\beta = -1$, $\beta = 0$ et $\beta = 1$ expriment respectivement une distribution totalement asymétrique à gauche, symétrique et totalement asymétrique à droite.

Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne.

3- γ : est le paramètre d'échelle auquel on fait jouer le rôle d'une mesure de dispersion quelque fois, $\gamma \geq 0$, plus γ plus les données sont volatiles. Le paramètre γ permet de cintrer plus

ou moins le corps de la distribution.

4- δ : est le paramètre de localisation ou de translation, traduisant la position de la moyenne lorsque $\alpha > 1, \delta \in \mathbb{R}$. si $\beta = 0$ alors δ est la médiane. Dans les autres cas

le paramètre δ ne peut pas être interprété.

2.3.3 La loi $\alpha - stable$ symétrique :

Nous poursuivons à présent la description de la loi stable dans le cas particulier où les paramètres β et δ sont nuls, on appelle alors cette loi loi symétrique par rapport à β et δ et nous noterons alors $X \sim S\alpha S$ pour indiquer que X suit une loi stable symétrique $S_\alpha(0, 0, \gamma)$. Nous obtenons alors une expression simple de la fonction caractéristique de paramètre γ :

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha), t \in \mathbb{R}$$

Dans le cas où on a $\gamma = 1$ alors la variable aléatoire est dite $S\alpha S$ standard.

2.3.4 Propriétés de la loi $\alpha - stable$:

Lorsque $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = \frac{\sigma^2}{2}$ et $\delta = \mu$, la loi stable n'est rien d'autre que la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ avec une fonction caractéristique de la forme suivant :

$$\varphi(t) = \exp(-\gamma^2 |t|^2 + i\mu t), t \in \mathbb{R}$$

Exemple : Là aussi, certaines des lois connues appartiennent à cette classe.

1- La loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ est une loi $S_2(\delta, \beta, 2\gamma^2)$ (et réciproquement une loi $S_2(\delta, \beta, \gamma)$ est une loi normale $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$).

2- La loi de Cauchy généralisée de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\pi\sigma^2 + (x - \mu)^2}$$

est une loi $S_1(\delta, 0, \gamma)$.

3- La loi de Poisson $P(\lambda)$ n'est pas stable.

Proof : en effet soient X_1 et X_2 deux v.a.r. suivant une loi de Poisson. Supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $\alpha > 0$ et b tels que :

$$X_1 + X_2 = aX + b \text{ en distribution.}$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous trouvons :

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ce qui entraîne une contradiction car $(X_1 + X_2)$ a ses valeurs uniquement dans \mathbb{N} alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'est pas une valeur dans \mathbb{N} .

Proposition 1 :(Propriété arithmétique) :Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi stable $S_\alpha(\beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ et $S_\alpha(\beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ respectivement alors $(X_1 + X_2)$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ telle que :

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta = \frac{\beta_1^\alpha \gamma_1 + \beta_2^\alpha \gamma_2}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Notons que si :

$$\beta_1 = \beta_2 \implies \beta = \beta_1 = \beta_2$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires qui suivent une loi $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$, $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $c \in \mathbb{R}$ alors :

$$aX_1 + bX_2 + c = S_\alpha(\beta, \gamma(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \delta(a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + c) \text{ en distribution}$$

2.3.5 La fonction de densité :

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (normale, Cauchy, gamma, ...). Pour la loi $\alpha - stable$, nous n'avons que la forme explicite de la fonction

caractéristique. A l'aide de la transformée inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi_x(t) dt$$

nous pouvons obtenir f d'une loi $\alpha - stable$ symétrique sous la forme d'une intégrale comme suivant :

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha) \cos[xt + \beta t^\alpha \varpi(t, \alpha)] dt$$

où :

$$\varpi(t, x) = \begin{cases} \tan(\frac{\alpha\pi}{2}) & , \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & , \alpha = 1 \end{cases}$$

2.3.6 La fonction de distribution :

Les seules trois distributions stables qui ont des formes explicites de la fonction de densité sont :

1- La distribution gaussienne $S_2(\gamma, 0, \delta)$ où :

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x - \mu}{2\sigma}\right)^2\right)$$

∞

2- La distribution de Cauchy $S_1(\gamma, 0, \delta)$ où :

$$f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x - \mu)^2 + 4\sigma^2)}$$

.

3- La distribution de Lévy $S_{\frac{1}{2}}(\gamma, 1, \delta)$ où :

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}\right) \mathbf{I}_{] \mu, +\infty[}(x)$$

avec \mathbf{I} la fonction indicatrice.

2.3.7 Stabilité :

Pour $\alpha \neq 0$ nous avons l'équivalence suivante :

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\delta, \beta, \gamma) \iff Y = \frac{X - \delta}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ suit une loi } S_\alpha(0, \beta, 1) \quad (2.2)$$

2.3.8 Queues lourdes :

Soit X une *v.a.r* . $S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ on a les deux résultats suivants :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X > t) = \gamma C(\alpha)^{\frac{1+\beta}{2}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha P(X < -t) = \gamma C(\alpha)^{\frac{1-\beta}{2}} \end{cases}$$

où :

$$C(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1}$$

La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu([5]) (1994, pages 16–18).

2.3.9 Calcul des moments :

Soit X une *v.a.r* suit la loi $S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ les moments d'ordre p sont comme suivant :

$$\begin{cases} \text{si } \alpha = 2, \forall p, & E |X|^p < +\infty \\ \text{si } 0 < \alpha < 2, & \begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, & E |X|^p < +\infty \\ \forall p \geq \alpha, & E |X|^p = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

En particulier, pour la moyenne EX et la variance $VarX$, on obtient les résultats suivants :

	$0 \leq \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$
EX	∞	∞	μ
$VarX$	∞	∞	$2\sigma^2$

TAB. 2.1 – Moyenne et variance théorique d'une variable aléatoire alpha stable.

2.3.10 Algorithme de simulation :

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers et al. (1976)([1]). Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$ Pour obtenir une loi $S_\alpha(\delta, \beta, \gamma)$ il suffit de faire un changement de variables([2]).

Première étape :

Elle consiste à générer une loi Φ uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et une loi W exponentielle de paramètre 1. Pour cela, il faut d'abord générer 2 *V.A.R.* uniformes sur $]0, 1[$ (notées U_1 et U_2). Puis en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W = -\log(1 - U_2) \end{cases}$$

on obtient bien le résultat désiré (la démonstration ne pose aucun problème).

Deuxième étape :

Elle consiste à calculer différentes quantités (fonction de Φ et W).

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 - \alpha, \\ a = \tan \frac{\Phi}{2}, \\ b = \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2}, \\ \tau = -\varepsilon \tan(\alpha \Phi_0), \\ B = \frac{b}{\frac{\varepsilon \Phi}{2}}, \\ d = z^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - 1, \\ z = \frac{\cos(\varepsilon \Phi) - \tan(\alpha \Phi_0) \sin(\varepsilon \Phi)}{W \cos \Phi}. \end{array} \right.$$

Troisième étape :

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(1, \beta, 0)$ our obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante :

Proposition : soit Φ une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons :

$$\text{pour } \alpha = 1, Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2} \pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } \alpha \neq 1, Y &= \left[(\cos(\alpha \Phi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi \tau B (b(1-a^2) - 2a)}{(1-a^2)(1+b^2)} (1 + \varepsilon d) + \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right. \\ &= \frac{\sin(\Phi - \Phi_0)}{(\cos \Phi)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \Phi_0))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \Phi_0 = \frac{\pi \beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha}.$$

alors la variable Y suit une loi $S_\alpha(1, \beta, 0)$.

2.4 Estimation des paramètres de la loi stable :

Une loi α – *stable* est caractérisée par quatre paramètres d'où on peut les estimer, mais le vrai inconvénient dans cette estimation est l'absence d'une forme explicite de la fonction

de densité. Cependant, un grand nombre des procédures numériques ont été proposé par plusieurs approches (Maximum de vraisemblance, régression utilisant la fonction

caractéristique, la méthode des quantiles (McCulloch) et la méthode des moments).

Dans cette section, on suppose que l'on dispose d'un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de variables aléatoires stables, indépendantes et identiquement distribuées, avec $X_i \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$.

2.4.1 Méthode de McCulloch :

Fama et Roll([2]) dans ont proposé une méthode basée sur les quantiles empiriques pour l'estimation des paramètres α et γ des lois symétriques stables, lorsque $1 < \alpha \leq 2$. La méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle a le désavantage que les estimateurs obtenus sont asymptotiquement biaisés; de plus, les conditions imposées aux paramètres sont très restrictives.

McCulloch([4]) a généralisé cette méthode en utilisant les quantiles empiriques. Il a obtenu des estimateurs pour les quatre paramètres pour une région très grande de l'espace paramétrique.

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire stable $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$, et soit x_p le quantile d'ordre p , c'est-à-dire, $F(x_p) = p$, et \hat{x}_p le quantile empirique

correspondant.

McCulloch définit :

$$v_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

$$v_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

et montre que ces indices ne dépendent pas de γ et δ . De plus ils sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de α et β . Cette relation peut s'inverser, donc les paramètres α et β peuvent être vus comme des fonctions de v_α et v_β , soit :

$$\alpha = \Phi_1(v_\alpha, v_\beta), \beta = \Phi_2(v_\alpha, v_\beta)$$

McCulloch construit ensuite deux nouveaux indices :

$$v_\gamma = \frac{x_{0.75} - x_{0.5}}{\gamma}$$

et

$$v_\zeta = \frac{\zeta - x_{0.5}}{\gamma}$$

où :

$$\zeta = \begin{cases} \delta + \beta\gamma \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & , \alpha \neq 1 \\ \delta & , \alpha = 1 \end{cases}$$

Nous pouvons voir que v_γ et v_ζ dépendent seulement de α et β c'est-à-dire :

$$v_\gamma = \Phi_3(\alpha, \beta) \text{ et } v_\zeta = \Phi_4(\alpha, \beta).$$

Si les fonctions $\Phi_i, i = 1, 2, 3, 4$, sont connues, alors l'algorithme d'estimation des quatre paramètres peut être défini comme ci-dessous :

Procédure concrète de l'algorithme :

- Ordonner l'échantillon.
- Calculer les quantiles empiriques $\hat{x}_{0.05}, \hat{x}_{0.25}, \hat{x}_{0.5}, \hat{x}_{0.75}$ et $\hat{x}_{0.95}$.
- Estimer les indices v_α et v_β :

$$\begin{cases} \hat{v}_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \\ \hat{v}_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} + 2\hat{x}_{0.5}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}} \end{cases}$$

- Estimer α et β :

$$\hat{\alpha} = \Phi_1(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta), \hat{\beta} = \Phi_2(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_\beta)$$

- Estimer γ :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\Phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

- Estimer ζ :

$$\hat{\zeta} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\gamma}\Phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

- Estimer δ :

$$\hat{\delta} = \hat{\zeta} - \hat{\beta}\hat{\gamma}\tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right)$$

Caractéristiques de la méthode :

Comme \hat{x}_p est un estimateur convergent et asymptotiquement de loi normale de x_p et que les fonctions f_α sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont convergents et asymptotiquement de loi normale.

Le point clé de la méthode est le calcul des fonctions Φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, On peut construire des tables pour un réseau de points et interpoler bilinéairement, en principe les tables de DuMouchel peuvent être utilisées. Sans considérer le travail préliminaire de génération de ces tables, la méthode est facile à implémenter.

Exemple : On va simuler 5000 réalisation des $v.a$ qui suivent la loi α -stable pour différentes valeurs de α et β . On trouve les résultats suivants :

α	2	1.75	1.5	1.25	1
β	0	-0.5	0.5	0.8	1
v_α	2.46	2.67	3.16	3.80	5
v_β	-0.01	-0.12	0.23	0.51	0
$\hat{\alpha}$	2	1.73	1.47	1.21	1.1
$\hat{\beta}$	0	-0.48	0.41	0.68	0.99

TAB. 2.2 – Estimation des paramètres du loi alpha-stable via l'approche de McCulloch pour 5000 réalisations.

Conclusion

On conclusion, on a constaté que les lois $\alpha - stables$ sont les lois appropriées pour modéliser les rendements d'actif. D'ou les méthodes classiques ne fonctionnes pas avec se genre de distributions à queues lourdes (loi de pareto). Donc il y a d'autre théorème qui nous aide a la prévision .

Bibliographie

- [1] Chambers J.M., Mallows C.L., Stuck B.W., 1976. A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71, p. 340-344.
- [2] Fama, E.F. et Roll, R. (1971). Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 331-338.
- [3] Mandelbrot Benoit, (1963). The variation of certain speculative prices. *The journal of Business*, volume 36, Issue 4 (Oct. , 1963), 394-419.
- [4] McCulloch, H. J. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in statistics - simulations* Vol. 15, 1109-1136.
- [5] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M.S., 1994. *Stable non-Gaussian random processes : Stochastic models with infinite variance*. Chapman & Hall, New York.
- [6] Zolotarev, V. M., 1986. *One-dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.132