

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Analyse

Par

NOM Prénom

DRAOU HASNA

Titre :

**Etude variationnelle des équations différentielles partielles  
elliptiques**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	BERBICHE MOHAMED	UMKB	Président
Pr.	BENBRAIKA SOUAD	UMKB	Encadreur
Dr.	SENOUCI ASSIA	UMKB	Examineur (rice)

Juin 2024

## Dédicace

*Je dédie ce humble travail À*

- Mes parents

- Mon mari et mes enfants, Mohamed et Laith

- Mes frères

- Mes sœurs, et toute ma famille

- À mes chères amies Imen Hadji, Lobna Rehab, Wafa merzougui, Massouda

Reghais et toutes mes amies

Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion et tous mes professeurs.

## REMERCIEMENTS

A l'issue de ce modeste travail, nous tenons à remercier tout d'abord Dieu de nous avoir offert tout ce que nous possédons.

Nous tenons à remercier on particulier :

Notre promotrice Madame BENBRAIKA SOUAD. Qui a pris tout le soin de nous orienter et nous faire part de ses précieuses remarques surtout ses encouragements et sa disponibilité qui ont grandement contribuer à l'élaboration de ce mémoire.et

Et merci aussi aux professeurs BERBICHE MOHAMED et SENOUCI ASSIA pour leur dévouement à étudier et corriger ce mémoire.

A tous les enseignants du département MATH- sans exceptions qui ont contribué à notre formation. A toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail par leurs d'encouragements.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur Les équations différentielles et les distributions</b>	<b>3</b>
1.1 Équations aux dérivées partielles (EDP) . . . . .	4
1.1.1 EDP linéaire du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	5
1.1.2 EDP linéaire du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	5
1.2 Classification des EDP du 2 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	6
1.3 Equations Elliptiques . . . . .	7
1.4 Les Conditions aux limites . . . . .	8
1.5 Distributions . . . . .	9
1.5.1 Dualité : . . . . .	9
1.5.2 Définitions et Propriétés des distributions . . . . .	10
1.5.3 Convergence des distributions . . . . .	11
1.5.4 Dérivation faible . . . . .	12
<b>2 Espace de Sobolev</b>	<b>14</b>

2.1	Rappel sur les espaces $L^p$	14
2.2	Définition et Propriété principale	17
2.2.1	L'espace $W^{m,p}(\Omega)$	17
2.2.2	L'espace $H_0^1(\Omega)$	22
2.3	Théorème de Traces et Formules de Green	24
2.3.1	Théorème de Trace	24
2.3.2	formules de Green	24
<b>3</b>	<b>Formulation Variationnelle</b>	<b>26</b>
3.1	Formes linéaire et bilinéaire	26
3.2	Approche Variationnelle	28
3.2.1	Formulation variationnelle	28
3.3	Théorème de Lax Milgram	29
3.4	L'approximation Variationnelle	32
3.4.1	Étapes de l'Approximation Variationnelle	32
<b>4</b>	<b>Application</b>	<b>35</b>
4.1	Problème de Dirichlet	36
4.2	Problème de Neumann	42
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Introduction

Les équations différentielles elliptiques constituent une partie essentielle des mathématiques appliquées, utilisées dans la modélisation de divers phénomènes. Cette étude se concentre sur l'analyse mathématique de ces équations à travers une approche variationnelle visant à comprendre la nature des solutions et leur existence.

Les EDP elliptiques sont principalement utilisées pour décrire des phénomènes stationnaires qui ne changent pas avec le temps, comme l'équation de la chaleur dans un corps fixe ou le comportement électrostatique. La résolution de ces équations est une étape fondamentale pour comprendre les phénomènes physiques complexes et fournir des modèles précis de ces phénomènes.

L'étude est consacré sur l'analyse mathématique des équations différentielles elliptiques, en particulier celles qui sont linéaires. Nous examinerons l'existence et l'unicité des solutions, en utilisant une approche variationnelle basée sur des théorèmes basiques puissants tels que le théorème de Lax-Milgram, formule de Green, l'inégalité de Poincaré et formule de trace.

Ce travail est structuré en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous représentons les concepts et les résultats de base qui garantissent l'absence de l'ambiguïté sur la suite de l'étude. Le deuxième chapitre est consacré sur les espaces de Sobolev et ses propriétés.

Le troisième chapitre est consacré de l'approche variationnelle, où nous appliquons des

résultats théoriques à des équations elliptiques.

Dans le dernier chapitre, nous représentons la formulation variationnelle de certains problèmes elliptiques et les résolvons en utilisant les techniques de l'analyse variationnelle.

# Chapitre 1

## Généralités sur Les équations différentielles et les distributions

Les EDP sont des équations qui modélisent des phénomènes physiques et mathématiques complexes. Ils sont des équations qui impliquent des dérivées partielles d'une fonction inconnue à plusieurs variables.

L'étude de ce type d'équations nécessite de la linéarité, l'ordre, la classification et les conditions aux limites.

Dans ce chapitre, on considère les notations suivantes :

Un multi-indice  $\alpha$  est une suite  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  avec  $\alpha_i \geq 0$  entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{et} \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} f.$$

### Définition 1.0.1 "Le gradient"

Le gradient de la fonction  $u$  de classe  $C^1$ , noté  $\nabla u$  ou  $\overrightarrow{\text{grad}} u$  est défini comme suit :

$$\nabla u(x) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right)^t.$$



**Définition 1.0.2 "Le Laplacien"**

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^2$ , le Laplacien de  $u$  est défini comme :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$$

## 1.1 Équations aux dérivées partielles (EDP)

Pour une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

une équation aux dérivées partielles (EDP), pour la fonction  $u$  est une expression qui lie la fonction  $u$  et ses dérivées partielles :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, D_1 u, D_2 u, \dots, D_n u, D_1 D_2 u, \dots, D_1 D_n u, \dots, D^\alpha u) = 0,$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

**Définition 1.1.1** *l'ordre d'EDP est défini comme le degré le plus élevé parmi les dérivées partielles.*

**Exemple 1.1.1** *soit l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ 1}^{\text{er}} \text{ ordre}$$

**Définition 1.1.2** *si  $u$  et ses dérivées partielles apparaissant séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP. Celle-ci est dite linéaire.*

**Exemple 1.1.2**  $u = u(x, y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  1<sup>er</sup> ordre linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$  1<sup>er</sup> ordre non-linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  2<sup>ème</sup> ordre non-linéaire.
- pour une EDP linéaire homogène :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \text{ solution} \\ u_2 \text{ solution} \end{array} \right\} \lambda u_1 + \lambda u_2 \text{ est solution}$$

### 1.1.1 EDP linéaire du 1<sup>er</sup> ordre

**Définition 1.1.3**

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

est la forme la plus générale pour une EDP linéaire 1<sup>er</sup> ordre.

$\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  avec  $u = u(x, y)$  est une EDP 1<sup>er</sup> ordre, linéaire, homogène

$$\left\{ \begin{array}{l} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ = (-y dx + dy) \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

si  $du$  et  $dx$  sont reliés par  $-y dx + dy = 0$ , alors  $du = 0$ .

### 1.1.2 EDP linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre

une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre de deux variables  $(x)$  et  $(y)$  est définie comme suit :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + 2E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + u.F(x, y) = H(x, y)$$

un cas important de cette équation est lorsque  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont des constantes. comme doit être des fonctions

**Exemple 1.1.3** *quelques exemples fondamentaux d'EDP du second ordre*

1. En démentions  $n$ , on cherche  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans un ouvert } \Omega \\ u = y \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$$

2. Pour un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on cherche  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$  telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, t = 0) = v_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_1(x) \end{cases}$$

Ces équations peuvent être exprimées de manière plus compacte.

## 1.2 Classification des EDP du 2<sup>ème</sup> ordre

Nous explorons une équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des constantes.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre peuvent être classées comme elliptiques, hyperboliques ou paraboliques en fonction du déterminant  $B^2 - 4AC$ . Comme la suite :

- si  $B^2 - 4AC < 0$  sur le domaine  $D$ , l'équation est elliptique.
- si  $B^2 - 4AC = 0$  sur le domaine  $D$ , l'équation est parabolique.
- si  $B^2 - 4AC > 0$  sur le domaine  $D$ , l'équation est hyperbolique.

Pour une meilleure formulation, considérons un exemple avec  $C > 0$  :

(i)  $A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

- on remarque que  $B^2 - 4AC > 0$ , donc cette équation est hyperbolique.

(ii)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

- on remarque que  $B^2 - 4AC = 0$ , donc l'équation de la diffusion est parabolique.

(iii)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

- on remarque que  $B^2 - 4AC = -4 < 0$ , alors l'équation de Laplace est elliptique.

De même, pour une équation comme :

(iv)  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ; s'appelle l'équation de Tricomi

- si  $y > 0$ , l'équation est hyperbolique.
- si  $y = 0$ , elle est parabolique.
- si  $y < 0$ , elle est elliptique.

### 1.3 Equations Elliptiques

les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires et d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné avec une frontière  $\Gamma$  où l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, souvent de type Dirichlet ou Neumann ou les deux (Robin).

Un exemple classique de problème elliptique est celui donné par l'équation de Laplace

(ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, telles que celles de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = u_0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

- L'équation de la chaleur en régime stationnaire ((température d'équilibre).
- Le déplacement vertical d'une membrane dont le bord est fixé.
- En mécanique des fluides, dans le cas d'un écoulement plan et permanent d'un fluide parfait incompressible, le potentiel des vitesses vérifie une équation de Laplace.

## 1.4 Les Conditions aux limites

**Définition 1.4.1** *une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des EDP sur une frontière. Ces conditions imposent une valeur de  $u$  ou de ses dérivées au bord du domaine.*

il existe plusieurs types de conditions aux limites, notamment

- Dirichlet-valeurs aux bord :

dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

**Exemple 1.4.1**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = d \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $d$  est une fonction ,si  $d = 0$  on qualifera le problème d'homogène, dans le cas contraire il sera dit non homogène.

- Neumann-Grandients aux bord :

la variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais ses dérivées est bien définie.

**Exemple 1.4.2**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ sur } \partial\Omega \text{ } (\eta \text{ vecteur normale exterieur}) \end{array} \right.$$

où  $g$  est une fonction.

– Mixtes-Gradients et valeurs aux bord :

cette condition est composée des deux première conditions imposée sur la frontière.

**Exemple 1.4.3** on note  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = d \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \end{array} \right.$$

## 1.5 Distributions

### 1.5.1 Dualité :

on rappelle que  $E$  un espace de Hilbert, on note  $E'$  son dual ,l'ensemble des formes linéaires continues sur  $E$ .

De plus , pour  $L$  dans le dual  $E'$  et  $v$  dans  $E$  ,on note

$$\langle L, v \rangle = L(v).$$

L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est appelée crochet de dualité .celle-ci permet de mettre en avant le fait que  $L(v)$  peut être vu comme un produit scalaire d'après le théoreme de

représentation de Riesz et Riesz-Fréchet que l'on rappelle ci-dessous :

**Théorème 1.5.1** (*théorème de représentation de Riesz*)

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 < p < \infty$  et  $L \in (L^p(\Omega))'$  alors, il existe une unique fonction  $f \in L^{p'}(\Omega)$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  tel que :

$$\forall u \in L^p(\Omega), \langle L, u \rangle = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$$

et on a

$$\|f\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|L\|_{L^p(\Omega)'}$$

## 1.5.2 Définitions et Propriétés des distributions

Une application  $f$  de  $D(\Omega)$  dans  $\mathbb{C}$  est appelée fonctionnelle et est notée  $\langle f, \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ .

Une fonctionnelle linéaire  $f$  définie sur  $D(\Omega)$  est dite continue si pour toute suite de fonctions tests  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers la fonction nulle dans  $D(\Omega)$ , la suite numérique  $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers zéro.

Une distribution définie sur  $\Omega$  est toute applications linéaires et continues sur  $D(\Omega)$ .

L'espace de toutes les distributions définies sur  $\Omega$  est appelé espace des distributions et est noté  $D'(\Omega)$  ou simplement  $D'$ .

Si  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors  $\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ .

- **Linéarité :**

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

$$\langle T, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

**- Continuité :**

Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  (dans  $D$ ), alors  $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ .

C'est-à-dire  $\varphi_j \rightarrow \varphi \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_j - \varphi \rangle = 0$

**Proposition 1.5.1**

Les distributions définies sur  $\Omega$  forment un espace vectoriel réel, qui est l'espace dual de  $D(\Omega)$ .

**Remarque 1.5.1**

Pour simplifier les formules, on considère souvent des intégrales multiples, les dérivées partielles, et les ensembles bornés  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$  comme étant bornés dans  $\mathbb{R}^n$

**1.5.3 Convergence des distributions**

**Définition 1.5.1 (L'espace  $C_c(\Omega)$ )**

L'espace  $C_c(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions continues  $f$  sur  $\Omega$  à support compact c'est-à-dire :

$$C_c(\Omega) = \{f : \text{supp } f \subset C \subset \Omega\}$$

**Définition 1.5.2**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . On appelle une fonction de test si  $f$  appartient à et si son support  $\text{supp } f$  est un ensemble compact inclus dans  $\Omega$ . Cet espace est noté  $D(\Omega)$  :

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ est compact dans } \Omega\}$$



**Définition 1.5.3**

On dit qu'une suite de distributions  $(T_n)$  converge dans  $D'$  vers une distribution  $T$  si, pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ , la suite  $\langle T_n, \varphi \rangle$  converge dans  $\mathbb{C}$  vers le nombre  $\langle T, \varphi \rangle$ . Autrement dit :

$$T_n \xrightarrow{D'} T \iff \forall \varphi \in D : \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T, \varphi \rangle$$

On dit qu'une série de distributions  $\sum_{n \geq 0} T_n$  converge dans  $D'$  et a pour somme la distribution  $T$ , si pour tout  $\varphi \in D$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \langle T_n, \varphi \rangle$  converge dans  $\mathbb{C}$  et a pour somme le nombre  $\langle T, \varphi \rangle$ . En d'autres termes :

$$\sum_{n \geq 0} T_n \xrightarrow{D'} T \iff \forall \varphi \in D : \sum_{n \geq 0} \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T, \varphi \rangle$$

Il s'agit de la convergence simple dans  $D'$ .

**Proposition 1.5.2**

Si  $f_n \in L^1_{loc}$  et  $f_n \xrightarrow{unif} f$ , alors  $f \in L^1_{loc}$  et  $f_n$  converge vers la distribution  $f$  associée à la fonction  $f$ .

**1.5.4 Dérivation faible**

pour une fonction  $v$  dans  $L^2(\Omega)$ , elle est considérée comme ayant une dérivée partielle au sens faible en  $x$  si et seulement si les fonction  $w_i$  dans  $L^2(\Omega)$  existe telle que :

Pour tout fonction de test  $\phi$  dans  $C_c^\infty(\Omega)$  l'égalité suivant est satisfait

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx$$

lorsque  $v$  a des dérivées partielles notée  $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$  au sens faible dans toutes les directions, on considère  $v$  comme étant dérivable au sens faible, et les fonctions  $w_i$  sont uniques.

soit  $v \in L^2(\Omega)$ ,

$\exists C > 0$  ( $C$  constante),  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

Cela implique que  $v$  est dérivable au sens faible.

- Si  $f \in C^1(\Omega)$ , alors elle est également dérivable au sens faible.
- Les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , par morceaux sont également définies comme étant dérivables au sens faible.

Pour un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( au moins dans une direction ), il existe une constante  $c > 0$  tel que pour toutes fonctions  $v$  de  $C^1(\Omega)$  nulle sur le bord  $\partial\Omega$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \preceq c \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx, \tag{1.2}$$

# Chapitre 2

## Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels fondamentaux introduits par Sergei Sobolev dans les années 1930. Ils généralisent la notion de dérivée à des fonctions moins régulières, utiles pour étudier les solutions d'équations aux dérivées partielles. Ces espaces mesurent à la fois la régularité spatiale d'une fonction et celle de ses dérivées, les rendant essentiels pour résoudre des problèmes dans des espaces fonctionnels plus généraux que les espaces classiques.

Dans ce chapitre, on considère les notations suivantes :

### 2.1 Rappel sur les espaces $L^p$

**Définition 2.1.1** (*Espace de Lebesgue*)

Pour  $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$ , on définit l'espace  $L^p(\Omega)$  l'ensemble :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable}\}$$

$\forall f \in L^p(\Omega)$ , on note :

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

si  $p = \infty$  et  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  est mesurable, donc on définit  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ \alpha : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p.} \}$$

**1**  $L^p$  est un espace vectoriel muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^p}$  pour tout  $1 \preceq p \prec \infty$ .

**2**  $L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \preceq p \preceq \infty$ .

**3**  $L^p$  est séparable pour tout  $1 \preceq p \prec \infty$ .

**Théorème 2.1.1 (Convergence Dominée)**

soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables telles que  $|f_n| \preceq g$  presque partout ,où  $g$  est une fonction intégrable.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  p.p. Alors  $f$  est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

**Théorème 2.1.2 (Théorème de densité)**

Pour tout  $1 \preceq p \preceq \infty$  ;l'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ .En d'autres termes, pour tout fonction  $f$  de  $L^p(\Omega)$  et pour tout  $\epsilon \succ 0$  il existe une fonction  $f_n$  dans  $C_c^\infty(\Omega)$ , telle que  $\|f - f_n\|_{L^p} \prec \epsilon$ .

**Remarque 2.1.1** *Le théorème précédent n'est pas applicable lorsque  $p = \infty$ .En effet , si une suite des fonctions continues  $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$  ,converge vers une fonction  $f$  dans  $L^\infty(\Omega)$  , alors  $f$  est elle-même continue.*

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} \prec \epsilon$$

et donc  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ , assurant ainsi la continuité de  $f$ . Par conséquent, une fonction de  $L^\infty$  discontinue sur un ensemble de mesure non nul ne peut pas être approchée par une suite de fonctions continues  $f_n$  de  $C_c^\infty(\Omega)$  convergente vers  $f$  dans  $L^\infty$ .

**Théorème 2.1.3 (Inégalité de Holder)**

Soit  $f \in L^p$  et  $g \in L^{p'}$ . Alors  $f \cdot g \in L^1$  et

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

**Théorème 2.1.4 "Inégalité de Minkowski"**

Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables. L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

En particulier, pour  $f, g \in L^p(X, M, \mu)$  on a  $f + g \in L^p(X, M, \mu)$ .

Cette inégalité traduit essentiellement la propriété de l'inégalité triangulaire dans l'espace des fonctions mesurables, ce qui est une conséquence importante des propriétés de norme et de mesure dans les espaces fonctionnels.

**Lemme 2.1.1 "Inégalité de Cauchy-Schwarz"**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions appartenant à  $L^2(\Omega)$ , donc  $uv \in L^1(\Omega)$  et l'inégalité suivante vérifiée :

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de Hölder.

**Lemme 2.1.2**

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0 \tag{2.1}$$

Alors

$$f(x) = 0 \text{ p.p sur } \Omega$$

## 2.2 Définition et Propriété principale

### 2.2.1 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 2.2.1** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et soit  $p$  un réel tel que  $1 \leq p < +\infty$  et  $m \in \mathbb{N}$ . L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; D^\alpha u \in L^p, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

**Proposition 2.2.1**

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

**Remarque 2.2.1**

On peut étendre la définition des espaces de Sobolev à des ordres entiers quelconques  $m > 0$ . Ainsi,  $W^{m,p}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L^p(\Omega)$ , dont les dérivées partielles (au sens faible)  $D^\alpha u$  jusqu'à l'ordre  $m$  appartiennent à  $L^p(\Omega)$  pour tout multi-indice  $\alpha$  vérifiant  $|\alpha| \leq m$ .

**Propriété 2.2.1**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $1 \leq p < +\infty$  et  $k \geq 1$ .

1.  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$  est un espace de Banach, séparable si  $1 < p < \infty$  et réflexif si  $1 < p < \infty$ .
2.  $W^{1,2}(\Omega)$  est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx.$$

**Cas particulier de  $W^{m,p}(\Omega)$  :**

**L'espace  $H^m(\Omega)$**

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $m$  un nombre entier, on définit l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; \forall a \in \mathbb{N}^n, |a| \leq m, D^a u \in L^2(\Omega)\}$$

Sachant que  $D^a u$  la dérivée partielle de  $u$  en sens faible .

$H^m(\Omega)$  espace hilbertien de produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|a| \leq m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}.$$

et se norme définit par

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|a| \leq m} \|D^a u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

si  $m = 1$  ;

### Espace $H^1(\Omega)$

L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini comme l'ensemble des fonctions  $u$  appartenant à  $L^2(\Omega)$  et ayant des dérivées au sens des distributions dans  $L^2(\Omega)$ .

Les dérivées, notées  $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$  sont des éléments de  $L^2(\Omega)$  et sont interprétées dans le sens des distributions.

$$H^1(\Omega) = \left\{ u; u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni d'un produit scalaire défini comme suit :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (2.2)$$

La norme dans  $H^1(\Omega)$  est donnée par :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Remarque 2.2.2

1.  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$
2.  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$
3.  $L^2(\Omega) = W^{0,2}(\Omega)$

**Exemple 2.2.1** si  $\Omega$  est un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ , toute fonction continue sur  $\bar{\Omega}$  et à dérivées continues par morceau sur  $\bar{\Omega}$  appartient à  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.2.3** les fonctions à dérivées non continues sur  $\bar{\Omega}$  ne sont pas nécessairement dans  $H^1(\Omega)$ .

**Exemple 2.2.2** soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , contenant l'intervalle  $[a, b]$  et soit  $u$  la fonc-



tion indicatrice définie par

$$u(x) = 1_{]a,b[}(x)$$

c'est à dire

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]a, b[ \\ 0 & \text{si } x \notin ]a, b[ \end{cases}$$

alors la fonction  $u \notin H^1(\Omega)$ .

en effet ,pronons  $\Omega = ]c, d[$  , avec  $c \prec a$  et  $b \prec d$  . D'où  $[a, b] \subset ]c, d[$  .

la fonction  $u \in L^2(\Omega)$  car , on a

$$\begin{aligned} \int_d^c |u(x)|^2 dx &= \int_c^a |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_b^d |u(x)|^2 dx \\ &= 0 + \int_a^b 1 dx + 0 = b - a \prec \infty. \end{aligned}$$

la fonction  $u$  est continue ,dérivable au sens usuel sauf aux points  $a$  et  $b$  ,où elle admet une discontinuité de première espèce, alors

$$\begin{aligned} u'_{D'} &= [u']_{usuel} + \sum_{i=1}^n [u(a_i + 0) - u(a_i - 0)] \delta_{a_i} \\ u'_{D'} &= 0 + 1 \cdot \delta_a - 1 \cdot \delta_b = \delta_a - \delta_b \notin H^1(]c, d[) \end{aligned}$$

**Théorème 2.2.1** *l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire (2.2), ce qui signifie qu'il est complet et possède toutes les propriétés associées à un espace de Hilbert.*

**Preuve.** soit  $u_n$  une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$  c'est à dire

$\forall \epsilon \succ 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p, q \succ N$ , on a

$$\|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} \prec \epsilon.$$

En d'autre terme

$$\|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \prec \epsilon$$

D'où les suite  $u_n$  et  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  sont de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ , qui est un espace comlet, il en résulte l'existence d'une fonction  $u$  de  $L^2(\Omega)$  limite dans  $L^2(\Omega)$  de la suite  $u_n$  et une fonction  $v_i$  de  $L^2(\Omega)$  de la suite  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = v_i$ , dans l'espace  $L^2(\Omega)$ .

l'injection de l'espace  $L^2(\Omega)$  Dans l'espace  $D'(\Omega)$

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

Assure la convergence de la suite  $u_n$  vers  $u$  ainsi que la dérivée  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  vers  $u_i$  dans  $D$

L'opérateur de dérivation étant continu dans  $D'(\Omega)$ , alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} - \left\langle u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega). \end{aligned}$$

D'où on obtient

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \text{ dans } D'(\Omega).$$

et en vertu de l'unicité de la limite dans l'espace  $D'(\Omega)$ , on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^2(\Omega).$$

D'où la convergence de  $u_n$  vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ . ■

### 2.2.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

La fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  est un sous espace de  $H^1(\Omega)$  noté  $H_0^1(\Omega)$ .

(muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ) en d'autres termes

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \left\{ v \in H^1(\Omega), \exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0 \right\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.2** *cette espace est un espace de Hilbert pour le produit  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ . on peut définir un autre produit scalaire plus simple sur cette espace .*

muni du produit scalaire (2.2) de  $H^1(\Omega)$ , l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert .

**Preuve.** par définition  $H_0^1(\Omega)$  est un sous espace fermé de  $H^1(\Omega)$  (qui est un espace de Hilbert) ,donc c'est aussi un espace de Hilbert.

soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace .Alors la semi-norme

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme usuelle induite par celle  $H_0^1(\Omega)$ . ■

### Inégalité de Poincaré

**Théorème 2.2.2** *soit  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un constante  $c > 0$  tel que :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

**Preuve. méthode 1** :supposons  $v$  fonction de  $H_0^1(\Omega)$ , de la densité de  $D(\Omega)$  sur

$H_0^1(\Omega)$ , alors il existe une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de les élément  $D(\Omega)$  pour que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |v_n - v|^2 + |\nabla(v_n - v)|^2 dx = 0$$

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

on appliquant la théorème (??) ,on vérifier que :

$$\exists c > 0; \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx,$$

en rapprochant a la fin pour  $n \rightarrow +\infty$ ,on a

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

soit  $\Omega$  un ouvert limité de  $\mathbb{R}^n$  (ou limité au moins dans un direction). alors la demi-droite définie

$$|v(x)|_{H_0^1(\Omega)} + \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalent à la norme usuelle de l'espace  $H^1(\Omega)$ . ■

**Preuve. méthode 2** :soit  $v$  de  $H_0^1(\Omega)$  ,on a

$$|v(x)|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v(x)\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, solen l'inégalité de Poincaré nous avons :

$$\|v(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq (c+1) \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = (c+1) |v(x)|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Alors  $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$  norme équivalente de  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ . ■

## 2.3 Théorème de Traces et Formules de Green

### 2.3.1 Théorème de Trace

#### Théorème 2.3.1

soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . On définit l'opérateur de trace  $\gamma_0$  par :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\bar{\partial\Omega}) \\ &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

Prolongement par continuité de  $\gamma_0$  est une application continue de  $H^1(\Omega)$  vers  $L^2(\partial\Omega)$ , que l'on note également par  $\gamma_0$ .

Dire que  $\gamma_0$  est continue signifie qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'application  $\gamma_0$  est défini comme suit :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \gamma_0(v) = \begin{cases} v|_{\partial\Omega} & \text{si } u \in D(\bar{\Omega}), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_k & \text{sinon} \end{cases}$$

### 2.3.2 formules de Green

#### Théorème 2.3.2

soit  $\Omega$  ouvert et régulier de la classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  .pour tout  $u, v$  de  $H^1(\Omega)$  on a :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \eta_i(x) ds$$

où  $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ .

**Preuve.** Soient  $u$  et  $v$  appartenant à  $H^1(\Omega)$ . Par densité de  $D(\bar{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$ , il existe des suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $D(\bar{\Omega})$  convergeant vers  $u$  et  $v$  respectivement dans l'espace  $H^1(\Omega)$ .

Nous avons :

$$\int_{\Omega} u_k(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v_k(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u_k(x)v_k(x) \eta_i(x) ds.$$

En passant à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , nous obtenons :

$$\lim_k \int_{\Omega} u_k(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx,$$

$$\lim_k \int_{\Omega} v_k(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx,$$

Grâce à la continuité de l'opérateur de trace  $\gamma_0$ , on sait que  $\gamma_0(u_k)$  et  $\gamma_0(v_k)$  convergent respectivement vers  $\gamma_0(u)$  et  $\gamma_0(v)$  dans l'espace  $L^2(\partial\Omega)$ .

En passant également à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\lim_k \int_{\partial\Omega} u_k(x)v_k(x) \eta_i(x) ds = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \eta_i(x) ds. \quad (2.3)$$

de (2.1), (2.2) et (2.3) nous déduisons que :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \eta_i(x) ds.$$

■

# Chapitre 3

## Formulation Variationnelle

la formule variationnelle est une approche mathématique utilisée pour résoudre des problèmes de types elliptiques, notamment les équations aux dérivées partielles (EDP). Au but de trouver une solution de l'EDP, on reformule le problème en termes d'une équation intégrale appelée "formulation variationnelle". Cette formule permet d'exprimer le problème sous la forme d'un problème d'optimisation (minimisation), ce qui facilite souvent la résolution.

l'avantage principale de la formulation variationnelle est sa flexibilité pour traiter une variété de conditions aux limites, y compris des conditions non homogènes ou mixtes. De plus, elle permet de résoudre des problèmes avec des géométries complexes.

Cette approche est largement utilisée dans de nombreux domaines, notamment en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en mécanique des structures.

### 3.1 Formes linéaire et bilinéaire

**Définition 3.1.1** *une forme linéaire  $l(\cdot)$  sur un espace de Hilbert  $H$  est une fonctionnelle linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

$$- l(\alpha w) = \alpha l(w) \quad \forall w \in H \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

–  $l(w_1 + w_2) = l(w_1) + l(w_2)$  pour tout  $w_1, w_2$  dans  $H$ .

**Définition 3.1.2** une forme linéaire  $l(\cdot)$  sur  $H$  est dite continue s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$l(w) \leq C \|w\|_H \quad \forall w \in H \quad (3.1)$$

**Exemple 3.1.1** la continuité de la fonctionnelle dans l'exemple précédent peut être démontrée à partir de l'inégalité de Cauchy. En appliquant cette inégalité de manière rigoureuse,

$$|l_f| = \left| \int_{\Omega} f(z)w(z)dv \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega}$$

on obtient l'inégalité 3.1, en pose  $C = \|f\|_{0,\Omega}$ .

**Définition 3.1.3** une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur un espace de Hilbert  $H$  est une application qui associe à chaque couple  $(u, w)$  de  $H \times H$ , un scalaire  $a(u, w)$  vérifiant :

$$\mathbf{1} \quad a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, w) = \lambda_1 a(u_1, w) + \lambda_2 a(u_2, w) \quad \forall u_1, u_2, w \in H \text{ et } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{2} \quad a(u, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 a(u, w_1) + \lambda_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in H \text{ et } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Une forme bilinéaire est donc additivement linéaire et homogène de degré 1 dans chacun de ses deux arguments.

**Définition 3.1.4** On dit qu'une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H \times H$  s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|a(u, w)| \leq C \|u\|_H \cdot \|w\|_H \quad \forall u, w \in H \quad (3.2)$$

**Définition 3.1.5** une forme  $a(\cdot, \cdot)$  bilinéaire est dite symétrique si :

$$a(u, w) = a(w, u) \quad \forall w \in H$$



**Définition 3.1.6** *une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique si elle satisfait à la condition suivante : il existe une constante strictement positive  $\alpha$  telle que*

$$a(w, w) \succeq \alpha \|w\|_H^2 \quad \forall w \in H \quad (3.3)$$

## 3.2 Approche Variationnelle

Le concept de l'approche variationnelle dans la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques consiste à transformer l'équation en une formule alternative, appelée formulation variationnelle, obtenue par l'intégration de l'équation multipliée par une fonction de test arbitraire.

Tout d'abord, nous parlons de quelque concept :

### 3.2.1 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  est borné et régulier, et que le second membre  $f$  de [1.1](#) est continue sur  $\bar{\Omega}$ . Le résultat principal de cette sous-section est la proposition suivante :

#### Proposition 3.2.1

soit  $u$  une fonction de classe  $C^2(\bar{\Omega})$  considérons l'espace  $X$  défini par :

$$X = \{ \phi \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Alors  $u$  est une solution du problème aux limite [1.1](#), si et seulement si  $u$  appartient à  $X$  et satisfait l'équation à vérifier l'égalité .

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad , \forall v \in X \quad (3.4)$$

L'égalité 3.4 est appelée **la formulation variationnelle** du problème aux limites 1.1.

### 3.3 Théorème de Lax Milgram

#### Théorème 3.3.1 (de Stampacchia)

soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\exists c > 0 / \forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$
2.  $\exists \alpha > 0 / \forall v \in H, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$

Soit  $\mathbb{k}$  un convexe fermé non vide de  $H$ . Pour tout  $f \in H'$ , il existe  $u \in \mathbb{k}$  tel que

$$\forall v \in \mathbb{k}, \alpha(u, u - v) \geq \langle f, v - u \rangle$$

si de plus  $\alpha$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathbb{k} \\ \frac{1}{2}\alpha(u, u) - \langle f, v \rangle = \min_{v \in \mathbb{k}} \left\{ \frac{1}{2}\alpha(v, v) - \langle f, v \rangle \right\} \end{array} \right.$$

#### Théorème 3.3.2 (de Lax-Milgram)

soit  $H$  un espace de Hilbert,  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$  et  $L$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors, il existe un unique élément  $u \in H$  tel que :

$$\{a(u, v) = L(v), \forall v \in H\} \tag{3.5}$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est la solution unique du problème variationnelle suivant :

$$\begin{cases} u \in H, \\ J(u) \leq J(v). \end{cases} \quad (3.6)$$

et  $J$  est de  $H$  dans  $\mathbb{R}$  défini par :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v) \quad (3.7)$$

**Preuve.** En appliquant le théorème de Riesz à la forme linéaire continue  $L$ , il existe un élément  $f$  de  $H$  tel que :

$$L(v) = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

De même, on appliquant le théorème de Riesz à la forme bilinéaire continue  $a$ , il existe un opérateur linéaire continue  $A$  appartient à l'espace des fonction linéaire de  $H$ , tel que :

$$a(u, v) = \langle Av, v \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

Alors, on montre que  $A$  est bijective.

### Injection et Surjection

la coerrcivité de la forme bilinéaire  $a$  implique qu'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$\forall v \in H, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2,$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v \rangle \leq \|Av\| \|v\|.$$

Ainsi,

$$\|Av\| \geq \alpha \|v\|.$$

Cela prouve que  $A$  est injective et que son image est fermée. Pour démontrer que  $A$  est surjectif, nous utilisons le fait que  $\text{Im}(A) = G$  est fermé. Selon le théorème de l'orthogonal complémentaire, nous avons :

$$H = G \oplus G^T$$

Soit  $w \in G^T$ , alors :

$$0 = \langle Aw, w \rangle = a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2,$$

Ce qui implique que  $w = 0$ . Donc  $G^T = \{0\}$  et alors  $G = H$ , par conséquent  $A$  est surjectif.

Ainsi, il existe un unique  $u \in H$  tel que :

$$Au = f,$$

ce qui conclut la preuve.

### **Coercivité et symétrie**

Si la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, alors pour tout  $w$  dans  $H$ , nous avons :

$$J(u + w) = J(u) + [a(u, w) - T(w)]$$

puisque  $u$  est la solution unique de [3.5](#), nous en déduisons que :

$$J(u + w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w, w)$$

Et que  $a$  est coercive on a :

$$J(u, w) \geq J(u) + \frac{1}{2} \|w\|^2.$$

Alors

$$\forall v \in H, J(u) \leq J(v).$$

Donc

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution  $u$  sont assurées par la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire  $a$ , et la symétrie de  $a$  garantit que  $u$  minimise le fonctionnel  $J(v)$ . ■

## 3.4 L'approximation Variationnelle

### 3.4.1 Étapes de l'Approximation Variationnelle

#### 1. Formulation du Problème Variationnel

##### a. Définir l'Espace Fonctionnel Approprié

- **Choix de l'espace** : On détermine l'espace de Hilbert  $V$  qui convient à la nature du problème. Dans de nombreux cas, l'espace utilisé est  $H^1(\Omega)$ , qui est un espace de Sobolev composé de fonctions ayant des dérivées faibles de premier ordre qui sont carrément intégrables.

- **Conditions aux limites** : On définit les conditions aux limites que les fonctions dans cet espace doivent satisfaire.

##### b. Formuler les Formes Linéaire et Bilinéaire

- **Forme bilinéaire**  $a(u, v)$  : On définit la forme bilinéaire qui lie deux fonctions  $u$  et  $v$  dans l'espace  $V$ . Par exemple, pour l'équation de Poisson, la forme bilinéaire

est :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

- **Forme linéaire**  $F(v)$  : On définit la forme linéaire qui relie la fonction  $v$  aux données sources du problème. Par exemple, pour l'équation de Poisson avec une source  $f$ , la forme linéaire est :

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

## 2. Preuve d'Existence et d'Unicité

### a. Théorème de Lax-Milgram

- **Hypothèses du théorème** : Pour garantir l'application du théorème de Lax-Milgram, la forme bilinéaire  $a(u, v)$  doit être continue et coercitive. Cela signifie :

- Continuité : Il existe une constante  $M \succ 0$ , telle que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

- Coercivité : Il existe une constante  $m \succ 0$  telle que :

$$a(u, u) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

- Conclusions du théorème : Si ces conditions sont remplies, il existe une solution unique  $u \in V$  au problème variationnel.

## 3. Équivalence entre les Formulations

### a. Démonstration de l'Équivalence

- **Convergence faible** : On utilise les concepts de convergence faible pour montrer qu'une suite de solutions approchées dans l'espace  $V$  converge vers la solution

faible du problème original. Cela signifie que si  $u$  faiblement dans  $V$ , alors  $u$  est la solution recherchée.

- **Dérivées faibles** : On vérifie que les dérivées faibles de la solution variationnelle satisfont les équations différentielles du problème classique. Par exemple, si  $u \in H^1(\Omega)$  est une solution variationnelle, ses dérivées faibles.
- **Vérification** : On s'assure que la solution variationnelle satisfait les conditions aux limites et les équations différentielles du problème original. Cela nécessite de vérifier que la solution satisfait l'équation originale lorsqu'elle est testée avec des fonctions de test appropriées et qu'elle satisfait les conditions aux limites imposées sur  $\partial\Omega$ .

# Chapitre 4

## Application

Ce chapitre est consacré sur l'analyse variationnelle sur les problèmes aux limites partiels, en examinant l'existence, l'unicité et les propriétés des solutions pour les EDP elliptiques. Nous expliquons en détail la méthode de l'approximation variationnelle, en trois étapes principaux :

### **Construction de la Formulation Variationnelle :**

A partir du problème classique, nous définirons une forme bilinéaire et une forme linéaire sur un espace de Hilbert. Nous montrons comment ces formes permettent de reformuler le problème de variationnelle.

### **Résolution de la Formulation Variationnelle :**

Nous démontrons que la formulation variationnelle vérifié les conditions du théorème de Lax-Milgram qui assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution.

### **Équivalence entre les Formulations :**

Nous prouverons que la solution obtenue par la formulation variationnelle est également une solution du problème proposé. Pour cela, nous utilisons des concepts de convergence faible et de dérivées faibles pour établir cette équivalence.



## 4.1 Problème de Dirichlet

Considérons un domaine ouvert et borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) et soit  $f \in L^2(\Omega)$  une fonction donnée.

Nous cherchons la solution  $u$  du problème aux limites suivante :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

### Interprétation physique

En dimension 2, ce problème modélise la déformation d'une plaque sous l'effet d'une force  $f$  ou  $u(x)$  représente le déplacement vertical en un point  $x$  de la plaque. Les conditions aux limites [4.1](#) indiquent que la plaque est fixée sans rotation sur ses bords.

Nous supposons que la solution  $u$  de ce problème existe et est régulière, c'est-à-dire  $u \in H^2(\Omega)$ .

### Approximation variationnelle du problème (P) en trois étapes

#### Première étape : formulation variationnelle

Pour établir une formulation variationnelle du problème, nous considérons une fonction test  $v \in D(\Omega)$  et multiplions l'équation différentielle par  $v$ , puis intégrons sur  $\Omega$  :

$$-\Delta u \cdot v = f \cdot v \Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

En appliquant la formule de Green sur la partie 1 de la formule ci-dessus, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx - \int_{\Gamma} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

On a  $v \in D(\Omega)$ , alors

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

Donc

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx. \quad (4.2)$$

Nous choisissons un espace de Hilbert  $v$  tel que  $D(\Omega)$  soit dense dans  $V$  et nul sur le bord. Le terme de gauche de l'équation [4.2](#) a du sens si  $\nabla u \in L^2(\Omega)$  et  $\nabla v \in L^2(\Omega)$ , tandis que le terme de droite a du sens si  $f \in L^2(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega)$ . Par conséquent, nous définissons :

$$\begin{aligned} V &= \{v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\} \\ &= \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\} \\ &= H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Nous trouvons qu'il est préférable de choisir ce qui suit

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \\ F(v) &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx. \end{aligned}$$

**Deuxième étape : Existence et unicité de la solution de formulation variationnelle**

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel, nous utilisons le théorème de Lax-Milgram.

**Vérification des conditions du théorème de Lax-Milgram**

$H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert

- 1. Continuité :** La forme bilinéaire  $a(u, v)$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C \succ 0$  telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

- 2. Coercivité :** La forme bilinéaire  $a(u, v)$  est coercitive, ce qui signifie qu'il existe une constante  $\alpha \succ 0$  telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

- 3. La continuité de  $F$  :** La forme linéaire  $F(v)$  est continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M \succ 0$  telle que :

$$|F(v)| \leq M \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En utilisant ces propriétés et le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que le problème variationnel [4.2](#) admet une solution unique dans  $V = H_0^1(\Omega)$ .

**Troisième étape : Équivalence entre le problème (P) et [4.2](#)**

Pour démontrer l'équivalence entre le problème (P) et [4.2](#), nous considérons deux cas :

**Premier cas :**  $\Omega$  régulière,  $u \in H^2(\Omega)$

Supposons que la solution de la formulation variationnelle soit régulière. Par conséquent, nous pouvons appliquer la formule de Green

De cette manière, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds$$

En substituant cette équation dans [4.2](#), nous trouvons :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

D'où :  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$v|_{\Gamma} = 0$$

Donc

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds = 0$$

Alors

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Puisque  $v \in H_0^1(\Omega)$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u(x) - f(x)) v(x) dx &= 0 \quad \forall v \in D(\Omega) \\ \Rightarrow -\Delta u - f &= 0 \quad \text{p.p sur } \Omega \end{aligned}$$

On a  $u \in H^2(\Omega)$  alors  $\nabla u \in H^1(\Omega)$ , donc  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$

Donc

$$(-\Delta u - f) \in L^2(\Omega)$$

alors, d'après le lemme [2.1](#), nous trouvons :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

Et comme  $u$  solution de formulation variationnelle et  $u \in H^1(\Omega)$ . Ainsi, nous obtenons les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\Rightarrow u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

**Deuxième cas**  $\Omega$  non régulière

Supposons que la solution de la formulation variationnelle n'est pas régulière. Dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer l'identité de Green.

Nous considérons dans l'équation [4.2](#) le changement de variable  $\sigma = \nabla u$ , qui est un champ vectoriel dans  $(L^2(\Omega))^n$ . Ainsi :

$$\int_{\Omega} \sigma(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \tag{4.3}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sigma(x) \nabla v(x) dx \right| &= \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{d'après Cauchy-Schwartz}) \\ &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (f \in L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

et comme  $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , donc  $\sigma$  admet une divergence au sens faible dans  $L^2(\Omega)$

C'est-à-dire

$$\exists \operatorname{div}(\sigma) \quad \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) v dx$$

On a

$$\operatorname{div}(\sigma) = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$$

En substituant dans l'équation [4.3](#), Nous trouvons

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Signifie

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) - f(x)) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in D(\Omega)$$

On a  $(-\Delta u - f \in L^2(\Omega))$  comme  $u \in H^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$

Puisque  $f \in L^2(\Omega)$ , en utilisant les propriétés de l'espace :

$$\Rightarrow -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

Donc, nous trouvons que l'équivalence entre le problème (P) et la formulation variationnelle [4.2](#) est vérifiée. où solution de F.V est la solution faible de problème (P).

**Conclusion :**

En utilisant l'analyse ci-dessus, nous prouvons que les deux formulations (P) et [4.2](#) sont équivalentes dans les cas réguliers et non réguliers, garantissant que la solution satisfait les conditions physiques et mathématiques posées par le problème original.

## 4.2 Problème de Neumann

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $n \geq 2$  et  $C \in C(\bar{\Omega})$  vérifiée  $C(x) \geq C_0 > 0$  de  $x \in \Omega$  et  $f \in L^2(\Omega)$ . Nous étudions le problème de Neumann (P.N) suivant :

$$-\Delta u + Cu = f \quad \text{dans } \Omega \quad (4.4)$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.5)$$

où  $C(x)$  est une fonction donnée. Nous cherchons une solution  $u$  pour ce problème. Par l'approche variationnelle

### Première Étape : Obtention de la Formulation Variationnelle du Problème

Nous multiplions l'équation différentielle [4.4](#) par une fonction test  $v \in D(\Omega)$  et intégrons sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} C(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

En utilisant le théorème de Green, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx = \int_{\Gamma} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)dx$$

Si

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0$$

Alors

$$\int_{\Gamma} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds = 0$$

Et comme  $D(\Omega)$  dense dans  $H^1(\Omega)$ , alors :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} C(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (4.6)$$

Ainsi, la formulation variationnelle devient :

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega) \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} C(x) u(x) v(x) dx \\ F(v) &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \end{aligned}$$

### Deuxième Étape : Existence et Unicité de la Solution de la Formulation Variationnelle

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous vérifions que la formulation variationnelle [4.6](#) admet une solution unique dans l'espace  $H^1(\Omega)$ .

#### Vérification des Conditions du Théorème de Lax-Milgram

1.  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert
2. La forme linéaire  $F(v)$  doit être continue.
3. La forme bilinéaire  $a(u, v)$  doit être continue et coercitive.

#### Continuité de la Forme Linéaire $F(v)$

Pour montrer que  $F(v)$  est une forme linéaire continue, nous devons prouver qu'il



existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$|F(v)| \leq M \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Étant donné :

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|F(v)| \leq \int_{\Omega} |f(x)v(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque  $f \in L^2(\Omega)$  et en utilisant l'inégalité de Poincaré, nous avons :

$$\left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Ainsi :

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Donc  $F$  continue sur  $H^1(\Omega)$ .

### **Continuité et Coercivité de la Forme Bilinéaire $a(u, v)$**

Pour montrer la continuité de  $a(u, v)$ , nous devons prouver qu'il existe une constante

$M > 0$  telle que :

$$a(u, v) \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Étant donné :

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \\
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |c(x) u(x) v(x)| dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| \cdot |\nabla v(x)| dx + \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \int_{\Omega} |u(x)| |v(x)| dx \\
 &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

et :

$$\begin{aligned}
 &\leq \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \max \left( 1, \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \right) \left[ \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
 &\leq \max \left( 1, \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \right) \left[ \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)} \right] \\
 &\leq 2 \max \left( 1, \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \right) \left( \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\nabla v(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|v(x)\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad M = 2 \max \left( 1, \sup_{x \in \Omega} |c(x)| \right) \succ 0
 \end{aligned}$$

Pour montrer la coercivité de  $a(u, u)$ , nous devons prouver qu'il existe une constante  $\alpha \succ 0$  telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Étant donné :

$$\begin{aligned}
 |a(u, u)| &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} c(x)u^2(x) dx \\
 &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_0 \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \\
 &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|u(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\geq \min(1, C_0) \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|u(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)
 \end{aligned}$$

et sachant que  $c(x) \neq 0$ , nous avons :

$$a(u, u) \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

où  $\alpha = \min(1, C_0)$ .

En conclusion, les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle [4.6](#) dans l'espace  $H^1(\Omega)$ .

**Troisième étape : Équivalence entre le problème (P.N) et la formule variationnelle [4.6](#)**

Pour démontrer l'équivalence entre le problème (P.N) et la formulation variationnelle [4.6](#), nous considérons deux cas.

**Premier Cas :**  $\Omega$  régulière

Supposons que la solution de la formulation variationnelle est régulière et appartient

$H^2(\Omega)$ .

Soit  $u \in H^2(\Omega)$ , on suppose que  $u$  est une solution de la formulation variationnelle 4.6.

En utilisant le théorème de Green, nous avons :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds$$

De plus,

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds$$

En substituant dans l'équation 4.6 :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

Puis,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds$$

Si on prend  $v \in D(\Omega)$ , alors  $v|_{\Gamma} = 0$ , et on obtient :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$f \in L^2(\Omega) \Rightarrow -\Delta u + cu - f \in L^2(\Omega)$$

et  $u \in H^2(\Omega)$  alors  $\nabla u \in H^1(\Omega)$  implique que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

C'est-à-dire :

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \Omega$$

si  $v \in D(\bar{\Omega})$  alors  $v|_{\Gamma} \neq 0$ , étant donné

$$\int_{\Gamma} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} v(x) ds = 0$$

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Ainsi,  $u$  est une solution du problème .

**Deuxième Cas :**  $\Omega$  non régulière

Supposons que la solution de la formulation variationnelle n'est pas régulière.

on suppose dans l'équation [4.6](#),  $(\sigma = \nabla u)$  une fonction vectorielle dans  $(L^2(\Omega))^n$  alors

$$\int_{\Omega} \sigma(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (4.7)$$

Nous devons montrer que la solution  $u$  du problème [4.6](#) appartient à  $H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \sigma(x)v(x)dx = - \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sigma(x)v(x)dx \right| &= \left| - \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |c(x)u(x)v(x)| dx + \int_{\Omega} |f(x)v(x)| dx \end{aligned}$$

d'après Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in D(\Omega) \end{aligned}$$

d'après lemme [2.1](#), on a  $\sigma$  admet diverge au sens faible dans  $L^2(\Omega)$ , C'est-à-dire :

$$\exists \operatorname{div}(\sigma) \quad \int_{\Omega} \sigma(x)\nabla v(x)dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(x))v(x)dx$$

on a :

$$\operatorname{div} \sigma = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$$

En substituant dans l'équation [4.7](#), Nous trouvons

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

C'est-à-dire

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = 0 \quad \forall v \in D(\Omega)$$

on a

$$(-\Delta u + cu - f) \in L^2(\Omega)$$

Alors, d'après le lemme [2.1](#), on obtient

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \Omega$$

et pour déterminer la condition aux limites, nous utilisons la formule de Stokes suivante :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(x))v(x)dx = - \int_{\Omega} \sigma(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Gamma} \sigma(x)\eta(x)v(x)ds$$

On trouve

$$\int_{\Omega} \sigma(x)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(x))v(x)dx + \int_{\Gamma} \sigma(x)\eta(x)v(x)ds$$

Où

$$\sigma.\eta = \nabla u.\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \operatorname{div}(\sigma) = \Delta u$$

En substituant dans l'équation [4.7](#), Nous trouvons

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$

Alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds$$

Pour  $v \in D(\bar{\Omega})$ , on a

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) + c(x)u(x) - f(x))v(x)dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds = 0$$

donc

$$v|_{\Gamma} \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Cela montre que  $u$  vérifie la formulation variationnelle dans  $H^1(\Omega)$ , ce qui termine la preuve de l'équivalence entre les problèmes  $(P.N)$  et [4.6](#). Par conséquent, la solution de la formulation variationnelle est une solution faible de le problème  $(P.N)$ .



# Conclusion

*Ce mémoire donne une aide générale sur les solutions d'équations différentielles partielles elliptiques à travers une approche variationnelle. Nous avons abordé les notions théoriques principaux, notamment les espaces de Sobolev et les distributions, et démontré l'efficacité des méthodes variationnelles via le théorème de Lax-Milgram pour assurer l'existence et l'unicité des solutions. Les applications aux problèmes aux limites de Dirichlet, Neumann et soit problème mixte*

Ces méthodes sont importantes pour résoudre des problèmes en mathématiques appliquées et en ingénierie, comme le montrent les recherches menées dans ces domaines

# Bibliographie

- [1] Bailly, P., Carrère, C. (2015). Statistiques descriptives : Théorie et applications, PUG, coll., p. 165-167.
- [2] .Bernard, P.M., Lapointe, C. (1995). Mesures statistiques en épidémiologie, Presses de l'Université du Québec, Sainte-Foy, page 89.
- [3] Allaire, G. (2005). Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique.
- [4] Brezis, H., & Brézis, H. (2011). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations New York : Springer.
- [5] Chourab, N. Etude générale d'une équation elliptique (Doctoral dissertation, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA).
- [6] D.Manceaux,Résolution pratique des équations aux dérivées partielles.
- [7] Youcef.Zohra,Résolution Numérique des équations Elliptiques,Université de Biskra.
- [8] Ghemima.Bachir et Bellhadi.Houssin, Étude de quelques problèmes aux limites par des méthodes variationnelles, Univ El Oued.
- [9] Traka.Dalila ,(2019),Résolution Numérique Des Équations Élliptiques,Univ Mohamed Khider,Biskra.

- [10] V.MIKHAILOV. Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.
- [11] Rochat, J. (2009). Les espaces de Sobolev..

# Annexe B : Abréviations et Notations

- $\Omega$  : un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^n$ .
- $\bar{\Omega}$  : l'adhérence de  $\Omega$ .
- $\partial\Omega$  : le frontière du domaine  $\Omega$ .
- $\Delta u$  : Laplacien de  $u$ .
- $\nabla u$  : Gradient de  $u$ .
- $C_c^\infty(\Omega)$  espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.
- $D(\Omega)$  espace des fonctions infiniment dérivables à support compact
- $D'(\Omega)$  espace des distributions
- $\partial^\alpha$  dérivée partielle d'ordre  $\alpha$ .
- $H^1(\Omega)$  espace de Sobolev
- $H_0^1(\Omega)$  espace de Sobolev à trace nulle
- $L^2(\Omega)$  espace de Lebesgue
- $L^\infty(\Omega)$  espace de Lebesgue
- $\eta$  normale unitaire extérieure
- $V'$  dual d'un espace  $V$
- $ds$  mesure de surface

### ملخص

يهدف هذا العمل الى دراسة نظرية لبعض المسائل الخطية باستخدام التحليل الدالي. والتي تهدف الى وجود ووحدانية الحلول المسائل الناقصية من نوع ديريشلي ونيومان من خلال استخدام طريقة التقريب التغييري. الكلمات المفتاحية: التقريب التغييري، الحلول الضعيفة، وجود الحلول، وحدانية الحلول.

### Résumé:

Ce mémoire vise à étudier théoriquement certains problèmes linéaires en utilisant l'analyse fonctionnelle. Nous explorons l'existence et l'unicité des solutions faibles pour les problèmes elliptiques de type Dirichlet et Neumann en utilisant la méthode de la formulation variationnelle.

Les mots clés importants: formulation variationnelle, solutions faibles, existence des solutions, unicité des solutions.

### Abstract:

This thesis aims to theoretically study some linear problems using functional analysis. We explore the existence and uniqueness of weak solutions for elliptic problems of Dirichlet and Neumann type through the method of variational formulation.

Key words: variational formulation, weak solutions, existence of solutions, uniqueness of solutions.